Таким образом, многозначная алгебраическая функция, определяемая уравнением (3), имеет риманову поверхность, топологически эквивалентную сфере с ручками. Это утверждение справедливо для любой многозначной алгебраической функции.

*Упражнение* 1°. Постройте риманову поверхность алгебраической функции $w^n - z = 0$, $n > 2$ целое, и убедитесь, что она $n$-листная и топологически эквивалентна сфере.

Изучение неалгебраических аналитических функций $w(z)$, удовлетворяющих уравнению $f(z, w) = 0$ с неалгебраической аналитической функцией $f$, в $z$-плоскости также приводит к римановым поверхностям, на которых аналитические функции однозначны.

*Упражнение* 2°. Рассмотрите логарифмическую функцию, определяемую уравнением $e^w - z = 0$, и постройте ее риманову поверхность.

## § 5. Немного об узлах

Понятие узла интуитивно представляется несложным. Простейшими примерами узлов являются «простой узел» (рис. 28) и «восьмерка» (рис. 29), которые нетрудно изобразить с помощью нити. Вся-

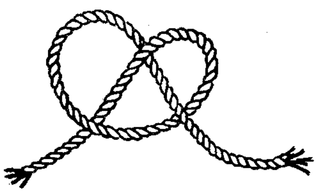

Рис. 28

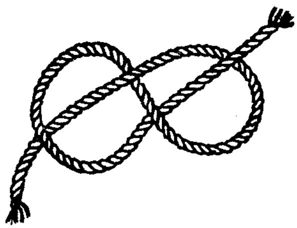

Рис. 29

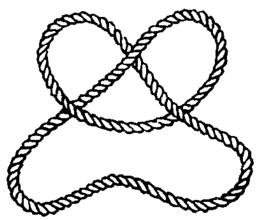

Рис. 30

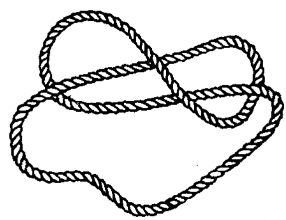

Рис. 31

кие попытки перевести «простой узел» в «восьмерку», не протаскивая концы через петлю, окончатся неудачей. Таким образом, эксперимент показывает, что эти узлы различны. Возникает вопрос о математической классификации узлов.

Мы можем запретить протаскивание концов через петлю, если отождествим (склеим) концы веревки (рис. 30 и 31). Тогда естественным будет следующее определение.

**Определение 1.** *Узлом* называется гомеоморфный образ окружности $S^1$ в $\mathbb{R}^3$.

Примеры: а) тривиальный узел (рис. 32); б) «простой узел», или «клеверный лист», или «трилистник» (рис. 28, 30); в) «восьмерка», или четырехкратный узел (рис. 29, 31).◆

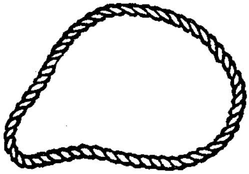

Рис. 32

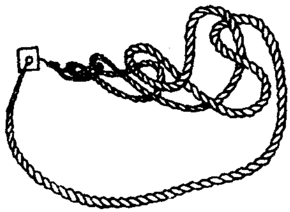

Рис. 33

Заметим, что в силу определения все узлы гомеоморфны. Поэтому для классификации узлов классифицируют вложения (гомеоморфизмы), с помощью которых окружность может быть вложена в $\mathbb{R}^3$.

**Определение 2.** Узлы $K_1$ и $K_2$ *эквивалентны*, если существует гимеоморфизм $\mathbb{R}^3$ на себя, отображающий $K_1$ на $K_2$.

Более точная классификация узлов основана на понятии изотопии пространства $\mathbb{R}^3$. Непрерывное отображение $H$: $[0, 1] \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ называется *изотопией*, если при каждом $t \in [0, 1]$ отображение $H$ гомеоморфно отображает $\mathbb{R}^3$ на себя, причем при $t = 0$ — это тождественное отображение. Таким образом, изотопия — это семейство гомеоморфизмов пространства $\mathbb{R}^3$, зависящих от параметра $t$ и непрерывно меняющихся с увеличением $t$, начиная с тождественного при $t = 0$.

**Определение 3.** Узлы $K_1$ и $K_2$ принадлежат одному *изотопическому типу*, если существует изотопия $H(T, x)$ пространства $\mathbb{R}^3$, $t \in [0, 1]$, $x \in \mathbb{R}^3$, такая, что $H(1, K_1) = K_2$.

*Упражнение* 1°. Покажите, что принадлежность к одному изотопическому типу является отношением эквивалентности.

Существуют примеры узлов, эквивалентных в смысле определения 2, но принадлежащих к разным изотопическим типам. Так, «трилистник» и зеркальный образ «трилистника», т. е. узел, симметричный «трилистнику» относительно некоторой плоскости в $\mathbb{R}^3$, не принадлежат к одному изотопическому типу (доказательство этого требует развития специальной техники). В то же время «восьмерка» и ее зеркальный образ принадлежат к одному изотопическому типу.

Основные свойства удобно изучать на узлах, завязанных сравнительно просто.

**Определение 4.** *Полигональным узлом* называется узел, являющийся объединением конечного числа прямолинейных отрезков.

**Определение 5.** Узел, эквивалентный полигональному, называется *ручным*. Узел, не эквивалентный полигональному, называется *диким*.

Примеры. Тривиальный узел, «трилистник», «восьмерка» — ручные узлы. На рис. 33 приведен пример дикого узла. Число петель в этом узле возрастает неограниченно, в то время как их размер неограниченно уменьшается при приближении к точке $p$. Интересно, что если бы число петель было конечным, то узел был бы эквивалентен тривиальному узлу.◆

Вопрос о классификации узлов тесно связан со свойствами пространств, дополнительных к узлам. Например, если какой-то топологический инвариант дополнений узлов $K_1$, $K_2$ различен, то узел $K_1$ не эквивалентен $K_2$ (и не изотопен). Полезным топологическим инвариантом является фундаментальная группа дополнения узла (см. гл. III). Заметим также, что множество всех классов эквивалентности узлов (или изотопической эквивалентности) можно наделить алгебраической структурой. Понятие об этой структуре можно дать следующим образом: назовем *композицией* (*умножением*) $K_1 * K_2$ двух узлов, $K_1$, $K_2$, последовательное завязывание их одного за другим; порядок завязывания узлов несуществен, точнее, узел $K_1 * K_2$ эквивалентен узлу $K_2 * K_1$. Таким образом определяется композиция классов эквивалентности узлов, которая коммутативна и ассоциативна. Класс эквивалентности тривиального узла играет роль единицы. Однако попытка решить уравнение $K * X = 1$ (развязать $K$ посредством завязывания узла $X$) не удается, кроме случая $K = 1$. Следовательно, классы эквивалентных узлов образуют не группу, а только полугруппу.

## § 6. О некоторых приложениях топологии в физике

В физике конденсированных состояний изучаются различные упорядоченные структуры в веществах, и топологические представления необходимо возникают при исследовании устойчивости тех или иных дефектов, возникающих в этих структурах. Этими дефектами являются: в кристаллах — дислокации (нарушения порядка кристаллической структуры), в жидких кристаллах — дисклинации (нарушения непрерывности в поле направлений молекул), вихри — в сверхтекучих жидкостях $He^3$, $He^4$ и ферромагнетиках и другие устойчивые геометрические конфигурации. Топологическая основа некоторых из этих явлений будет описана в этом параграфе.

1. Понятие векторного поля и его особой точки (или особой линии) первым появляется при математическом описании дефектов. Векторным полем на области $U \subset \mathbb{R}^3$ трехмерного евклидова пространства называют обычно отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$, сопоставляющее каждой точке $x \in U$ вектор $F(x) \in \mathbb{R}^3$, $F(x) \neq 0$ (мы отождествляем точки $x$ с их радиус-векторами $\vec{x}$); если от каждой точки