Определение 5. Узел, эквивалентный полигональному, называется *ручным*. Узел, не эквивалентный полигональному, называется *диким*.

Примеры. Тривиальный узел, «трилистник», «восьмерка» — ручные узлы. На рис. 33 приведен пример дикого узла. Число петель в этом узле возрастает неограниченно, в то время как их размер неограниченно уменьшается при приближении к точке p. Интересно, что если бы число петель было конечным, то узел был бы эквивалентен тривиальному узлу.◆

Вопрос о классификации узлов тесно связан со свойствами пространств, дополнительных к узлам. Например, если какой-то топологический инвариант дополнений узлов K_1, K_2 различен, то узел K_1 не эквивалентен K_2 (и не изотопен). Полезным топологическим инвариантом является фундаментальная группа дополнения узла (см. гл. III). Заметим также, что множество всех классов эквивалентности узлов (или изотопической эквивалентности) можно наделить алгебраической структурой. Понятие об этой структуре можно дать следующим образом: назовем *композицией* (*умножением*) $K_1 * K_2$ двух узлов, K_1, K_2, последовательное завязывание их одного за другим; порядок завязывания узлов несуществен, точнее, узел $K_1 * K_2$ эквивалентен узлу $K_2 * K_1$. Таким образом определяется композиция классов эквивалентности узлов, которая коммутативна и ассоциативна. Класс эквивалентности тривиального узла играет роль единицы. Однако попытка решить уравнение $K * X = 1$ (развязать K посредством завязывания узла X) не удается, кроме случая $K = 1$. Следовательно, классы эквивалентных узлов образуют не группу, а только полугруппу.

§ 6. О некоторых приложениях топологии в физике

В физике конденсированных состояний изучаются различные упорядоченные структуры в веществах, и топологические представления необходимо возникают при исследовании устойчивости тех или иных дефектов, возникающих в этих структурах. Этими дефектами являются: в кристаллах — дислокации (нарушения порядка кристаллической структуры), в жидких кристаллах — дисклинации (нарушения непрерывности в поле направлений молекул), вихри — в сверхтекучих жидкостях He^3, He^4 и ферромагнетиках и другие устойчивые геометрические конфигурации. Топологическая основа некоторых из этих явлений будет описана в этом параграфе.

1. Понятие векторного поля и его особой точки (или особой линии) первым появляется при математическом описании дефектов. Векторным полем на области $U \subset \mathbb{R}^3$ трехмерного евклидова пространства называют обычно отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^3 \setminus 0$, сопоставляющее каждой точке $x \in U$ вектор $F(x) \in \mathbb{R}^3$, $F(x) \neq 0$ (мы отождествляем точки x с их радиус-векторами $\vec{x}$); если от каждой точки

$x \in U$ отложить выходящий из нее вектор $\vec{F}(x)$, то возникающая (рис. 34) геометрическая ситуация и называется векторным полем на U. При этом желательно требовать непрерывную зависимость

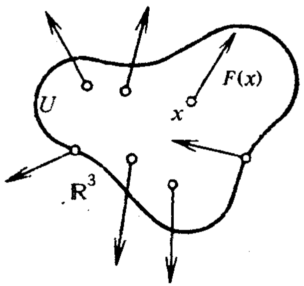

Рис. 34

вектора $\vec{F}(x)$ от точки x (т. е. непрерывность отображения F: $U \to \mathbb{R}^3 \backslash 0$). Однако это требование не всегда удовлетворяется для всех точек из U — в отдельных точках (называемых «особыми») или на кривых $\gamma \subset U$ («особых линиях») поле $\vec{F}$ может оказаться разрывным или даже неопределенным; в частности, нулевое значение $\vec{F}(x) = \vec{0}$ также считается неопределенным (не определено направление вектора). В подобных случаях говорят о векторном поле с особенностями.

Например, если область U занята физическим веществом — ферромагнетиком, — то в ее точках определен магнитный момент — вектор $\vec{M}$ (даже в отсутствие внешнего магнитного поля), если температура ниже критической, характерной для данного вещества. Возникающее векторное поле $\vec{F}(x) = \vec{M}(x)$ на области U может иметь особые точки и особые линии. Простейший тип особой точки имеем в случае поля, направленного по радиус-векторам $\vec{x}$: $\vec{M}(x) = M(x) \cdot \vec{x}/|\vec{x}|$, где $M(x) \neq 0$ — числовая непрерывная функция на U, $0 \in U$; здесь в точке $x = 0$ поле не определено, $x = 0$ — особая точка, называемая «еж».

Если вектор $\vec{M}(x)$ во всякой точке, где он определен, параллелен подпространству $\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$, то $\vec{M}(x) \in \mathbb{R}^2$ и в любой плоскости Π_{x^0}, проходящей через точку $x^0 \in U^1$ и параллельной $\mathbb{R}^2$, на сечении $V_{x^0} = U \cap \Pi_{x^0}$ задано векторное поле $\vec{M}$: $V_{x^0} \to \mathbb{R}^2$, которое может иметь в плоской области V_{x^0} особую точку x^0_*; при параллельном переносе плоскости Π_{x^0} (меняя x^0) эти особые точки x^0_* могут слиться в особую линию l векторного поля $\vec{M}$ на U (рис. 35); особая линия l называется «вихрем» поля $\vec{M}$. Вихри естественно появляются при движениях сплошных сред — жидкостей и газов, когда частицы среды описывают круговые движения вокруг некоторой линии l. Обычно под вихрем понимают именно это круговое движение среды, линию l называют при этом «осью» вихря. При математическом описании вихрей удобно «вихрь» отождествлять с «осью» вихря.

Роль векторного поля $\vec{M}$ здесь играет поле скоростей $\vec{v}(x)$ точек среды x, l — особая линия векторного поля $\vec{v}(x)$.

Замечательным фактом является открытие и исследование вихревых движений в сверхтекучем гелии He^4. Жидкость He^4 при температурах T, близких к абсолютному нулю, ведет себя как смесь двух компонент — «нормальной» (плотность ρ_n, скорость $\vec{v_n}$) и «сверхтекучей» (плотность ρ_s, скорость $\vec{v_s}$), $\rho_s + \rho_n = \rho$ — полная плотность; имеем при $T = 0$ $\rho_n = 0$, $\rho_s = \rho$. Именно сверхтекучая компонента He^4 образует вихри, устойчивые, несмотря на силы вязкого трения. Вихри в жидкостях и газах не обладают такой устойчивостью.

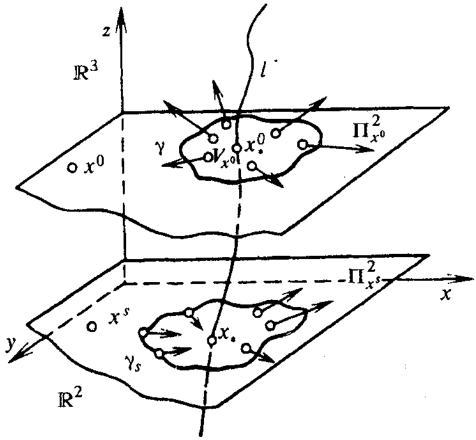

Рис. 35

2. Чтобы уяснить топологические причины устойчивости и законы эволюции вихрей в ферромагнетике и сверхтекучем He^4, необходимо ввести простейшие топологические инварианты.

Фиксируем двумерную плоскость $\Pi^2 \subset \mathbb{R}^3$ и путь $\gamma \subset \Pi^2$, гомеоморфный окружности и снабженный ориентацией (фиксированным направлением обхода). Пусть задано непрерывное отображение f: $\gamma \to S^1 \subset \mathbb{R}^2$ в окружность единичного радиуса с центром в начале координат, также снабженную ориентацией. Когда точка $p \in \gamma$ пробегает путь $\widetilde{p_0 p}$ от фиксированной точки $p_0 \in \gamma$ в направлении ориентации γ, точка $q = f(p)$ на S^1 пробегает путь на S^1, идущий (в зависимости от положения точки p) либо в направлении ориентации, либо против нее и отсчитываемый от точки $q = f(p_0)$ (рис. 36). Когда точка p сделает один полный обход пути γ, точка $q = f(p)$ в итоге сделает k_+ полных витков вокруг S^1 в направлении ориентации S^1 и k_- — в противоположном направлении.

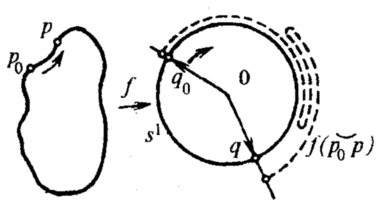

Рис. 36

Степенью отображения f ориентированной кривой γ в S^1 называется разность $k_+ - k_-$, обозначаемая $\deg f$. Эту степень можно определить и как суммарное число полных поворотов радиус-вектора $\vec{q}$, считая полный поворот в направлении ориентации за $+1$ и в противоположном направлении — за -1.

Понятие степени очевидным образом распространяется и на непрерывные отображения $f: \gamma \to \Gamma$ замкнутых ориентированных путей γ, Γ и $\mathbb{R}_3$, не обязательно лежащих в плоскости, но гомеоморфных окружности.

3. Степень $\deg f$ является топологическим инвариантом (точнее говоря, гомотопическим): она сохраняется, если непрерывно менять («гомотопировать») отображение f. Это означает, что если f включается в семейство отображений f_λ: $\gamma \to \Gamma$, зависящее от числового параметра λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, так, что $f_1 = f$ и точка $q' = f_\lambda(p)$ непрерывно зависит от переменных $(\lambda, p) \in [0, 1] \times \gamma$, то для каждого отображения семейства f_λ степень $\deg f_\lambda$ постоянна для всех λ из промежутка $[0, 1]$.

Таким образом, при непрерывном изменении отображения f (без резких скачков, без разрывов) нельзя уменьшить суммарное число положительных и отрицательных петель образа $f(\gamma)$, накрученных на Γ, т. е. число $k_+ - k_-$.

Другое важное свойство степени $\deg f$ состоит в следующем: если γ, γ_1, γ_2 — пути, гомеоморфные окружности, с фиксированными ориентациями и f: $\gamma \to \gamma_1$, g: $\gamma_1 \to \gamma_2$ — непрерывные отображения, степени которых $\deg f$, $\deg g$, то степень $\deg (gf)$ суперпозиции $gf: \gamma \to \gamma_2$ равна произведению степеней f, g: $\deg (gf) = (\deg g)(\deg f)$. Это свойство проверяется подсчетом суммарного числа петель образа $(gf)(\gamma)$, накрученных на γ_2, через аналогичные суммы для образов $f(\gamma)$, $g(\gamma_1)$.

Сопоставим каждому отображению f: $\gamma \to \Gamma$ класс $[f]$ всех гомотопных ему отображений f': $\gamma \to \Gamma$. Нетрудно убедиться, используя наглядные соображения, что отношение гомотопности отображений является отношением эквивалентности. Следовательно, множество всех непрерывных отображений из γ в Γ разбивается на множества непересекающихся классов $\{[f]\}$, называемых гомотопическими классами. Для всех отображений f' из класса $[f]$ $\deg f' = \deg f$, поэтому каждому классу можно сопоставить целое число: $[f] \to \deg f$. Нетривиальный факт — указанное соответствие является биективным (см. § 3 гл. III). Поэтому целое $n = \deg f$ является гомотопическим инвариантом класса отображений $[f]$, и удобно этот класс нумеровать индексом n: $[f]_n$. Класс $[f]_0$ состоит из всех отображений, гомотопных постоянному отображению f_0: $\gamma \to q_*$ пути γ в постоянную точку $q_* \in \Gamma$.

4. Вернемся теперь к магнитному вихрю в ферромагнетике (рис. 35) и к вихрю в сверхтекучем He^4.

В плоскости Π_{x^0} возьмем ориентированный замкнутый путь γ, на котором нет особых точек и внутри которого имеется единственная особая точка x_0; пусть он гомеоморфен окружности и один раз обегает особую точку x_0; пусть $S^1 \subset \mathbb{R}^2$ — ориентированная окружность единичного радиуса с центром в 0. Векторное поле $\vec{M}$, рассматриваемое только в точках $x \in \gamma$, задает отображение $f\colon\ \gamma \to S^1$, где

$$\overrightarrow{f(x)} = \frac{\vec{M}(x)}{|\vec{M}(x)|}, \qquad x \in \gamma. \tag{1}$$

Для отображения (1) определена степень $\deg f$, называемая вращением векторного поля $\vec{M}$ на γ; будем обозначать последнее $\varkappa(\vec{M};\ \gamma)$.

Будем теперь плоскость Π_{x^0} непрерывно перемещать параллельно самой себе в положение Π_{x^1}, а контур γ через промежуточные положения γ_s (в соответствующей плоскости Π_{x^s}) — в контур $\gamma_1 \subset \Pi_{x^1}$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, причем $\gamma_{s=0} = \gamma$, $\gamma_{s=1} = \gamma_1$. Предполагается, что все контуры γ_s окружают особую линию l, гомеоморфны исходному $\alpha(s)\colon \gamma \to \gamma_s$, ориентированы одинаково и что гомеоморфизм $\alpha(s)$ сохраняет ориентацию (т. е. $\deg \alpha(s) = +1$), непрерывно зависит от параметра s и $\alpha(0) = 1_\gamma\colon \gamma \to \gamma$ — тождественное отображение γ в себя. Векторное поле $\vec{M}(x)$, рассматриваемое на контуре γ_s, можно «перенести» гомеоморфизмом $\alpha(s)\colon \gamma \to \gamma_s$ на контур γ по формуле $\vec{F}_s(x) = \vec{M}(\alpha(s)(x))$, $x \in \gamma$. Семейство $\vec{F}_s(x)$ на γ, очевидно, непрерывно зависит от (x, s), следовательно, является гомотопией на γ векторных полей $\vec{F}_1(x) = \vec{M}(\alpha(1)(x))$, $F_0(x) = \vec{M}(x)$. В силу свойств степени имеем

$$\varkappa(\vec{M}, \gamma) = \varkappa(\vec{F}_1, \gamma) = (\deg \alpha(1))\varkappa(\vec{M}, \gamma_1) = \varkappa(\vec{M}, \gamma_1),$$

где последее вращение — вращение поля $\vec{M}$ на γ_1 в плоскости Π_{x^1}.

Это общее вращение поля $\vec{M}$ в произвольной плоскости Π_{x^1} называется топологическим индексом $\varkappa(l)$ вихря l в ферромагнетике (или топологическим зарядом вихря). Требуемые выше условия выполняются, например, для ферромагнетика, имеющего «легкую плоскость намагничивания» $\mathbb{R}^2$ (физическая терминология). В этом случае условие устойчивости вихря в ферромагнетике (при гомотопиях поля намагниченности $\vec{M}$ в плоскости $\mathbb{R}^2$) состоит в отличии от нуля степени $\deg f$, или, равносильно, вращения $\varkappa(\vec{M}, \gamma)$.

Рассмотрим сверхтекучую компоненту He^4. При температурах, близких к абсолютному нулю, возникающая в He^4 сверхтекучая часть жидкости («сверхтекучий конденсат») описывается на языке квантовой механики комплекснозначной волновой функцией $\Psi(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$; имеем $\Psi(x) = |\Psi(x)|e^{i\Phi(x)}$, где $|\Psi|$ — модуль комплексного числа, Φ — фаза волновой функции. При этом, если сверхтекучий конденсат находится в равновесном состоянии ($\vec{v_s} = 0$), то $|\Psi|$ — постоянен (не зависит от x), Φ — неопределенная константа; если сверхтекучий конденсат находится в неравновесном состоянии ($\vec{v_s} \neq 0$ тождественно), то $|\Psi|$ остается константой, а $\Phi = \Phi(x)$ становится функцией точки $x \in \mathbb{R}^3$, причем поле скорости сверхтекучей компоненты находится по формуле $\vec{v_s}(x) = \frac{\hbar}{m} \operatorname{grad} \Phi$, где $\hbar$ — постоянная Планка, m — масса атома He^4.

Пусть U — область в $\mathbb{R}^3$, занятая сверхтекучим конденсатом. Для всякой точки $x \in U$, в которой $\vec{v_s}(x) \neq 0$, определена фаза $\Phi(x)$, которой соответствует луч в $\mathbb{R}^2$, выходящий из нуля под углом $\Phi(x)$, отсчитываемым против часовой стрелки от фиксированного направления. Для точки $x \in U$, в которой $\vec{v_s}(x) = 0$, угол $\Phi(x)$ не определен. Таким образом, на области U возникает векторное поле единичных векторов $\vec{d}(x)$, $d\colon U \to S^1$, направленных по лучам, соответствующим значениям фазы $\Phi(x)$, за исключением особых точек, в которых фаза $\Phi(x)$ не определена. Если выбрать замкнутый ориентированный путь γ в U, на котором нет особых точек, то для отображения $d\colon \gamma \to S^1$ определена степень $\deg\, d$ (при фиксированной ориентации на S^1).

Рассмотрим теперь вихрь в сверхтекучем He^4 с вихревой линией l; на l не определено значение фазы Φ и она состоит из особых точек поля $\vec{d}(x)$. В качестве γ выберем ориентированный замкнутый путь, один раз охватывающий вихревую линию l. Как и для вихря в ферромагнетике, степень $\deg\, d$ отображения $d\colon \gamma \to S^1$ называется топологическим индексом (или топологическим зарядом) вихря. Устойчивость вихря в сверхтекучем He^4 снова характеризуется отличием от нуля топологического индекса вихря.

5. Устойчивость вихрей в ферромагнетике и сверхтекучем He^4 с физической точки зрения означает, что они наблюдаемы в естественных условиях, несмотря на внешние воздействия, от которых полностью избавиться невозможно. С математической стороны эта устойчивость обусловлена, как показывается ниже, условием отличия от нуля топологического индекса вихря и связана, таким образом, с гомотопическими свойствами окружности S^1.

Если магнитное поле $\vec{M}(x)$ или сверхтекучую скорость $\vec{v_s}(x)$ (соответсвующую фазу $\Phi(x)$) достаточно мало изменить равномерно для всех x, то новые значения $\vec{M_1}(x) = \vec{M}(x) + \Delta\vec{M}(x)$, $(\vec{v_1})_s(x) = \vec{v_s}(x) + \Delta\vec{v_s}(x)$ (фаза $\Phi_1(x) = \Phi(x) + \Delta\Phi(x)$) при достаточно малых приращениях будут гомотопны прежним. Такие гомотопии, например, могут быть записаны в виде $\overrightarrow{M_\lambda}(x) = \overrightarrow{M}(x) + \lambda\Delta\overrightarrow{M}(x)$, $\Phi_\lambda(x) = \Phi(x) + \lambda\Delta\Phi(x)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; эти гомотопии порождают гомотопии векторных полей $\overrightarrow{f(x)}$, $\overrightarrow{d(x)}$, т. е. отображения $f_\lambda\colon \gamma \to S^1$, $d_\lambda\colon \gamma \to S^1$ (f_λ определено формулой (1)), зависящие от параметра λ непрерывно и совпадающие с $f_0 = f$, $d_0 = d$ при $\lambda = 0$ и с f_1, d_1 — отвечающими полями $\overrightarrow{M}_1(x)$, $(\overrightarrow{v_1})_s(x)$ — при $\lambda = 1$.

Следовательно, $\deg f_\lambda$, $\deg d_\lambda$ не меняются при изменении λ: $\deg f_0 = \deg f_1$, $\deg d_0 = \deg d_1$. Таким образом, малые физические возмущения не меняют степень на контуре γ. Если топологический индекс $\deg f$ или $\deg d$ вихря был отличен от нуля, то и после возмущения $\deg f_1 \neq 0$ или $\deg d_1 \neq 0$ на кривой γ. А отсюда следует центральное утверждение о том, что кривая γ охватывает особую линию измененного векторного поля $\overrightarrow{M}_1(x)$ или $(\overrightarrow{v_1})_s(x)$. Действительно, выбирая кривую γ окружностью (лежащей в плоскости Π_{x^0}) и предполагая, что ограничиваемый ею замкнутый круг $D \subset \Pi_{x^0}$ не имеет особой точки поля $\overrightarrow{M}_1$ или $(\overrightarrow{v_1})_s$ (следа пересечения особой линии вихря с D), получим продолжение отображения $f_1\colon D \to S^1$ ($d_1\colon D - S^1$) с окружности γ на круг D. Зададим деформацию круга D к своему центру a: $\varphi_\lambda(x) = a + \lambda(x - a)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Она порождает гомотопию $\tilde{f}_\lambda(\tilde{d}_\lambda)\colon \gamma \to S^1$ по формуле $\tilde{f}_\lambda(x) = f(\varphi_\lambda(x))$ (аналогично для $\tilde{d}_\lambda$). При $\lambda = 1$ $\tilde{f}_1(x) = f_1(x)$, при $\lambda = 0$ $\tilde{f}_0(x) = f_1(a)$ — постоянное отображение; мы показали, таким образом, что отображение $f_1\colon \gamma \to S^1$ гомотопно постоянному, если оно продолжается на D (и аналогично для $d_1\colon \gamma \to S^1$). Очевидно, что степень $\deg \tilde{f}_0$ ($\deg \tilde{d}_0$) постоянного отображения равна нулю, а из свойства сохранения степени при гомотопии следует, что и $\deg \tilde{f}_1 = 0$ (и аналогично $\deg \tilde{d}_1 = 0$), что противоречит ранее установленному выводу об отличии $\deg f_1$ ($\deg d_1$) от нуля. Таким образом, убеждаемся в наличии особой точки векторного поля $\overrightarrow{M}_1(x)$ или $\overrightarrow{d}_1(x)$ внутри круга D; передвигая D вдоль линии вихря l, получим семейство особых точек, которые сливаются в линию вихря l_1 поля $\overrightarrow{M}_1(x)$ или поля $(\overrightarrow{v_1})_s(x)$.

Следовательно, малые физические возмущения магнитного поля в ферромагнетике (в плоскости $\mathbb{R}^2$) или поля скорости сверхтекучей компоненты He^4 не могут уничтожить вихрь ненулевого топологического индекса — в этом и состоит высказанное выше утверждение об устойчивости вихрей. Фактически установлено более сильное утверждение о «топологической устойчивости»: вихрь сохраняется при всякой гопотопии $\vec{M}_\lambda(x)$, $(\vec{v_\lambda})_s(x)$, не обязательно малой, но такой, чтобы были определены и непрерывны гомотопии $f_\lambda\colon \gamma \to S^1$, $d_\lambda\colon \gamma \to S^1$.

Что касается вихрей топологического индекса 0, то они топологически неустойчивы (т. е. могут быть разрушены в процессе гомотопии).

6. Имеется чисто физическая причина появления окружности S^1 в анализе вихрей в п. 5. Согласно известному принципу физики, наблюдаемые в экспериментах устойчивые состояния вещества соответствуют локальным минимумам энергии. Энергия вычисляется по заданному полю (векторному, тензорному и др.), описывающему состояние вещества. Например, в случае ферромагнетика энергия определяется векторным полем магнитного момента $M(x)$, в случае гелия He^4 — волновой функцией $\Psi(x)$. Так называемые «вырожденные состояния» вещества характеризуются неединственностью поля, на котором энергия принимает значение локального минимума. Например, для ферромагнетика энергия может иметь минимальное значение, когда векторы $\vec{M}(x)$ ортогональны определенной кристаллической оси (т. е. лежат в некоторой двумерной плоскости $\mathbb{R}^2$), при этом имеют постоянный модуль $|\vec{M}(x)|$ и могут иметь любое направление (это как раз случай «легкой плоскости» намагничивания). Множество всех таких векторов $\vec{M}(x)$ образует окружность S^1 радиуса $|\vec{M}(x)| = \mathrm{const}$ и называется областью вырожденных (по параметру намагниченности) состояний ферромагнетика. Если энергия ферромагнетика зависит только от модуля намагниченности $|\vec{M}| = \mathrm{const}$, то область вырождения — двумерная сфера S^2; этот случай соответствует аморфному (изотропному) веществу.

Случай сверхтекучего гелия He^4 отличен от случая ферромагнетика — он связан с квантовой механикой: для сверхтекучего конденсата в равновесии фаза Φ волновой функции $\Psi = |\Psi|\exp(i\Phi)$ остается произвольной, модуль $|\Psi|$ постоянным, энергия не зависит от Φ, следовательно, имеем вырождение по фазе Φ и область вырожденных состояний — множество всевозможных значений функции Ψ на комплексной плоскости — является окружностью S^1 радиуса $|\Psi|$.

Топологические индексы вихрей, рассмотренные выше, определяются отображениями $f, d\colon \gamma \to S^1$ замкнутых кривых в области вырождения ферромагнетика (с легкой плоскостью намагничивания) и сверхтекучего He^4. Таким образом, наличие топологически устойчивых вихрей в этих веществах связано с топологическими свойствами области вырождения, которой является для них окружность S^1.

7. В физике, однако, встречаются области вырождения, отличные от S^1. Уже случай изотропного ферромагнетика демонстрирует двумерную область вырождения — сферу S^2. Нетрудно сделать вывод об отсутствии топологически устойчивых вихрей в этой ситуации. Если D — произвольный круг с границей γ (окружностью), то любое отображение $f\colon \gamma \to S^2$ гомотопно постоянному отображению f_0: $\gamma \to \vec{c} \in S^2$. Такая гомотопия, например, осуществляется движением точек кривой $f(\gamma)$ на S^2 к фиксированной точке $\vec{c}$ по меридианам, идущим из $(-\vec{c})$ в $\vec{c}$ (для простоты можно считать, что $(-\vec{c})$ не лежит на образе $f(\gamma)$). Следовательно, $\deg f = \deg f_0 = 0$, и круг D не обязательно пересекается с линией топологически устойчивого вихря. Этот факт — следствие топологических свойств области вырождения — сферы S^2.

Но в силу тех же свойств в изотропном ферромагнетике существуют и наблюдаются более простые топологические особенности — изолированные особые точки векторного поля $\vec{M}(x)$; пример особой точки типа «еж» обсуждался в п. 1. Для построения топологического индекса особой точки необходимо задать отображение f (см. (1), п. 4) на сфере $S^2_\varepsilon(x^*)$ достаточно малого радиуса ε с центром в особой точке x^*, действующее в единичную сферу S^2, т. е. f: $S^2_\varepsilon(x^*) \to S^2$. Для такого отображения обобщается понятие степени отображения, обозначаемой по-прежнему $\deg f$. Конструкция степени значительно сложнее, чем для отображений окружности в окружность. Во-первых, сферы необходимо ориентировать, ориентировав их касательные плоскости так, чтобы ориентации в близких точках были одинаковы. Во-вторых, необходимо определить алгебраическое число слоев образа $f(S^2_\varepsilon)$, лежащих на сфере S^2; при этом слою приписывается число $(+1)$, если его ориентация совпадает с ориентацией S^2, и число (-1) в противном случае. Придание точного смысла этим словам в случае непрерывных отображений — довольно длинная работа (основания для этого содержатся в гл. III, § 4; гл. IV, § 5; гл. V, § 6); для случая дифференцируемых отображений определение $\deg f$ можно дать методами дифференциальной геометрии (см., например, [53]). В этом параграфе мы будем пользоваться не строгим, но наглядным описанием $\deg f$, данным выше. Свойства степени отображений окружностей (п. 3) верны и для степени отображений сфер. Таким образом, для ферромагнетика с магнитным векторным полем $\vec{M}(x)$ и особой точкой x^* определено целое число $\deg f$, называемое топологическим индексом особой (изолированной) точки x^* и обозначаемое $\varkappa(x^*)$; это число не зависит от радиуса $\varepsilon > 0$ сферы $S^2_\varepsilon(x^*)$, если ε достаточно мало. Это число $\varkappa(x^*)$ физики называют топологическим зарядом особой точки x^*.

В случае особой точки типа «еж» (п. 1) имеем $\varkappa(x^*) = +1$. Топологический индекс $\varkappa(x^*)$ играет ту же роль при исследовании особых точек, что и топологический индекс $\varkappa(l)$ при исследовании вихрей. Особая точка топологически устойчива, если $\varkappa(x^*) \neq 0$; такая точка физически наблюдаема и сохраняется при гомотопиях магнитного поля; напротив, если $\varkappa(x^*) = 0$, то особая точка x^* может быть устранена при подходящей гомотопии магнитного поля, т. е. является топологически неустойчивой.

В начале 70-х годов нашего столетия были изучены области вырождения сверхтекучих фаз гелия He^3. Этих фаз оказалось две, называемых A, B, из них наиболее сложная и интересная — фаза A. Область вырождения фазы A характеризуется множеством четверок $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{v})$ векторов из $\mathbb{R}^3$, где первые тройки $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ — всевозможные ортонормированные реперы с фиксированной ориентацией, а $\vec{v}$ — произвольный единичный вектор (векторы $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, 3$, $\vec{v}$) имеют определенный физический смысл [16], который мы не обсуждаем). Множество ориентированных реперов $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ можно отождествить с группой $SO(3)$ — группой ортогональных матриц 3×3 или группой вращения твердого тела. Множество векторов $\vec{v}$ — единичная сфера S^2. Следовательно, область вырождения A-фазы — декартово произведение $S^2 \times SO(3)$(его размерность равна 5). При определенных физических условиях вектор $\vec{v}$ фиксируется, и тогда область вырожденных состояний сводится к группе $SO(3)$. В этой ситуации не работает степень отображения и необходимо привлекать более сложный аппарат гомотопической топологии — понятие фундаментальной группы. Соответствующий анализ показывает, что имеется два класса вихрей: один — топологически устойчивые вихри, другой — топологически неустойчивые. Экспериментально удается наблюдать не только устойчивые, но и неустойчивые вихри, помещая A-фазу во вращающийся сосуд. Наблюдаемые новые явления, такие, как вихрь с концом, вихревое течение без особой линии, вихри на поверхности, допускают теоретическое объяснение на основе топологических представлений.

8. Как выше было замечено, для исследования более сложных, чем сфера S^2 или окружность S^1, областей вырождения необходимо использовать более сложный аппарат теории гомотопий. Вначале заметим, что понятие гомотопии и гомотопических классов естественно распространяется и на отображения $f\colon X \to Y$ произвольных множеств, лежащих в евклидовых (и даже в метрических и топологических пространствах); совокупность всех таких отображений снова разбивается на гомотопические классы $\{[f]\}$, классы эквивалентности, совокупность которых обозначается через $\pi(X, Y)$. Однако описание этих классов становится более сложным и является одной из важных задач гомотопической топологии.

Наиболее часто рассматриваются отображения $f\colon S^n \to Y$ n-мерной единичной сферы в Y, $n \geqslant 1$, гомотопические классы которых $\pi[S^n, Y]$ называются n-мерными гомотопическими классами.

Путь $[f]$ — гомотопический класс из $\pi[S^n, Y]$. Отображения класса $[f]$ называют n-мерными сфероидами (или «петлями» при $n=1$). Полезно зафиксировать точку $x_0 \in S^n$, точку $y_0 \in Y$ и ограничить класс сфероидов $f\colon S^n \to Y$ условием $f(x_0) = y_0$ — сфероиды в отмеченной точке y_0. Их образы можно представлять себе как сильно деформированные сферы, прикрепленные к точке y_0. Для гомотопии f_λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, сфероида f также вводится условие $f_\lambda(x_0) = y_0$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$; это означает, что хотя образ $f_\lambda(S^n)$ и перемещается в Y при изменении λ, однако он всегда прикреплен к неизменной точке y_0. Тогда соответствующие гомотопические классы сфероидов («петель» при $n=1$) в точке y_0 обозначаются через $\pi_n(Y, y_0)$.

Важное свойство множества $\pi_n(Y, y_0)$ — в нем вводится понятие произведения, и $\pi_n(Y, y_0)$ становится группой (коммутативной при $n > 1$). Проще всего описать операцию произведения при $n = 1$. Пусть S^1 ориентирована. Если $f\colon S^1 \to Y$ — петля из класса $[f]$, то при движении точки x по S^1, начиная от точки x_0, в направлении ориентации точка $y = f(x)$ описывает путь в Y с началом и концом в точке y_0 («петлю») в точке y_0. Пусть f, g — две петли в точке y_0 из классов $[f]$, $[g] \in \pi_1(Y, y_0)$; тогда можно рассмотреть «сложную» петлю в точке y_0, составленную из петли f, проходимой вначале, и петли g, проходимой следом за ней, причем эта двойная петля соответствует одному полному обходу окружности S^1 точкой x (рис. 37).

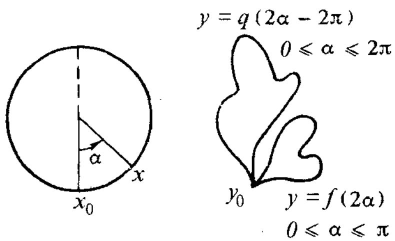

Рис. 37

Двойная петля и определяет класс из $\pi_1(Y, y_0)$, равный по определению произведению $[f] \circ [g]$ класса $[f]$ на класс $[g]$ (в указанном порядке). Петля $e\colon S^1 \to y_0 \in Y$ (постоянное отображение) определяет класс $[e]$, являющийся единицей в $\pi_1(Y, y_0)$: $[e] \circ [f] = [f] \circ [e] = [f]$ для любого $[f] \in \pi_1(Y, y_0)$. Любая петля из класса $[e]$ гомотопна постоянному отображению e. Обратный элемент $[f]^{-1}$ определяется петлей f, но проходимой в обратном направлении: $y = f(2\pi - \alpha)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. Нетрудно проверить справедливость аксиом группы.

Умножение гомотопических классов в $\pi_n(Y, y_0)$ при $n > 1$ описывается сложнее, и мы отсылаем читателя к гл. III, где подробно изложены начальные сведения о группах π_1 и π_n, $n > 1$. Группа $\pi_1(Y, y_0)$ называется фундаментальной группой пространства Y в точке y_0. Для линейно связанных пространств (в которых любые две точки возможно соединить путем) группа $\pi(Y, y_0)$ не зависит от выбора точки y_0 (т. е. $\pi_1(Y, y_0)$ и $\pi_1(Y, y_1)$ изоморфны для любых точек y_0, y_1). Действительно, если петля $f \in \pi_1(Y, y_1)$, то ее можно «перенести» в $\pi_1(Y, y_0)$, где ей соответствует петля $\tilde{f}$, составленная из трез частей, $\overrightarrow{y_0y_1}$, f, $\overrightarrow{y_1y_0}$, проходимых в указанном порядке, где $\overrightarrow{y_0y_1}$ — путь, соединяющий точку y_0 с y_1 и проходимый в направлении от y_0 к y_1, а $\overrightarrow{y_1y_0}$ — обратный путь. Это правило и задает изоморфизм групп $\pi_1(Y, y_1)$, $\pi_1(Y, y_0)$.

Указанный изоморфизм позволяет отождествлять группы $\pi_1(Y, y_0)$, $\pi_1(Y, y_1)$ для линейно связанных пространств, и они обозначаются символом $\pi_1(Y)$.

Приведем ряд примеров. Если $Y = S^1$, то $\pi_1(S^1)$ — коммутативная группа, изоморфная группе целых чисел $\mathbb{Z}$ по сложению; этот факт записывают равенством $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$. Аналогичное утверждение имеем и для $Y = S^n$, $n > 1$: $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$. Образующий элемент γ_n группы $\pi_n(S^n)$, $n \geqslant 1$, содержит тождественное отображение 1_{S^n}: $S^n \to S^n$; следовательно, произвольный элемент $[f] \in \pi_n(S^n)$ имеет вид $[f] = k\gamma_n$. Целое k вляется по определению степенью отображения f: $S^n \to S^n$, обозначаемой $\deg f$. В частном случае f: $S^1 \to S^1$ число k имеет следующее геометрическое истолкование: петля f гомотопна петле, получаемой повторением петли 1_{S^1}: $S^1 \to S^1$ в положительном направлении k раз, если $k > 0$, и в отрицательном $|k|$ раз, если $k < 0$, при $k = 0$ петля f гомотопна постоянной петле e.

Таким образом, в рассматриваемом случае $[f] = (\deg f)\gamma_1$ для f: $S^1 - S^1$, и, более общо, $[f] = (\deg f)\gamma_n$, если f: $S^n \to S^n$, $n > 1$; тем самым устанавливается однозначная связь между гомотопическим классом $[f]$ и степенью $\deg f$ отображения f. В частности, при $Y = S^2$ мы получаем определение $\deg f$ для случая отображений f: $S^2 \to S^2$, необходимое при рассмотрении особых точек ферромагнетика. Если $Y \neq S^n$, то, вообще говоря, такой связи может не быть или потребуется обобщение понятия степени $\deg f$; это зависит от алгебраического строения гомотопической группы $\pi_n(Y)$. Так, например, при классификации вихрей сверхтекучей фазы A гелия He^3 необходимо рассматривать отображения — петли f: $S^1 \to SO(3)$ — и иметь их гомотопическую классификацию. Так как $\pi_1(SO(3)) = \mathbb{Z}_2$, то, как и выше, имеем выражение гомотопического класса $[f] = k\gamma_*$, где γ_* — образующий класс в $\pi_1(SO(3))$, а $k \in \mathbb{Z}_2$ — вычет по mod 2, принимающий значения либо 0, либо 1. Определяя $\deg_2 f$ — степень по mod 2 — равенством $\deg_2 f = k$, приходим к обобщению целочисленной степени. При этом основные свойства степени сохраняются (проверьте в качестве упражнения!), и мы получаем два типа вихрей: топологически устойчивых с топологическим индексом вихря 1 и топологически неустойчивых с индексом 0.

9. Особые точки и особые линии (вихри) возникают и в другом классе веществ — так называемых жидких кристаллах, интенсивно изучающихся физиками в последние 20 лет. Под этим именем известен ряд состояний вещества, в которых наблюдается определенная «структура порядка», промежуточная между упорядоченностью обычных жидкостей и упорядоченностью твердых кристаллических тел.

«Эта вспышка интереса была вызвана многими причинами. Во-первых, жидкие кристаллы ускорили революцию в технике устройств визуального представления информации (дисплеев)... Во-вторых, жидкокристаллическое состояние присуще многим биологически активным системам, в том числе и человеческому телу... В-третьих, и это важнее всего с нашей точки зрения, физика жидких кристаллов оказалась необычайно сложной» [73, с. 21—22].

Наиболее просто такая структура выражена в «нематических» жидких кристаллах (или кратко — «нематиках»), которые состоят из удлиненных (стержнеобразных) молекул; молекулы нематика имеют одну (продольную) ось симметрии. Для нематиков характерен ориентационный порядок осей симметрии молекул, когда оси близких молекул почти параллельны. Задавая в каждой точке x нематика направление («директор»), определяемое осью молекулы, проходящей через x, получим «поле направлений» директора. Поле директора определяет состояние нематика подобно тому, как поле намагниченности ферромагнетика определяет состояние последнего. Для аналитического задания поля директора удобно каждому направлению сопоставить единичный вектор $\vec{d}(x)$ в $\mathbb{R}^3$, параллельный директору в точке x; на области $U \subset \mathbb{R}^3$, занятой нематиком, возникает векторное поле $\vec{d}(x)$. Поле директора определяется векторным полем $\vec{d}(x)$, но его следует отличать от векторного поля $\vec{d}(x)$, так как векторы $\pm\vec{d}(x)$ задают одно и то же направление. Концы вектора $\pm\vec{d}(x)$ задают на единичной сфере пространства $\mathbb{R}^3$ пару центрально-симметричных точек, которую можно считать точкой $\hat{d}(x)$, проективного пространства $\mathbb{R}P^2$, получаемого из двумерной сферы S^2 склейкой (отождествлением) диаметрально противоположных точек; напомним, что $\mathbb{R}P^2$ можно получить и из полусферы, склеивая диаметрально противоположные точки на экваторе (см. § 3). Таким образом, поле директора полностью характеризуется отображением $\hat{d}: U \to \mathbb{R}P^2$ области U в проективное пространство $\mathbb{R}P^2$. Именно $\mathbb{R}P^2$ является областью вырожденных состояний нематика, так как для направлений осей молекул нет каких-либо физических ограничений (в отличие от ряда других типов жидких кристаллов).

Естественно требование непрерывности отображения $\hat{d}$ на всей области U, однако это не всегда возможно и возникают (как и для векторного поля) особые точки (и особые линии) в области U, в

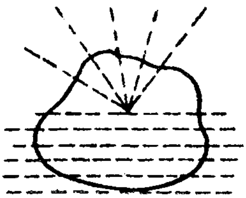

Рис. 38

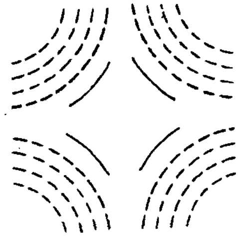

Рис. 39

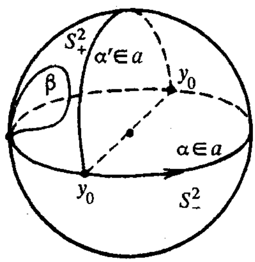

Рис. 40

которых (и на которых) отображение не определено или терпит разрыв. Особые линии наблюдаются оптически в виде тонких нитей в нематике, откуда и происходит название «нематик» (от греческого — «нить»). На рис. 38, 39 приведены две картины поля директора в нематике в случае плоского поля $\hat{d}(x)$ (т. е. $\hat{d}(x) \in \mathbb{R}^2$); вихрь здесь представлен центральной точкой.

Топологическая классификация вихрей определяется по прежнему сценарию. Возьмем окружность S^1, окружающую особую линию, и рассмотрим на ней поле директора, определяемое отображением $\hat{d}\colon S^1 \to \mathbb{R}P^2$. Гомотопический класс $[\hat{d}] \in \pi_1(\mathbb{R}P^2)$. Структура группы $\pi_1(\mathbb{R}P^2)$ известна: $\pi_1(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}_2$, где образующая $a \in \mathbb{Z}_2$ — гомотопический класс, содержащий петлю α — экватор (полусферы) со склеенными диаметрально противоположными точками, $a^1 = 0$ — класс постоянной петли (см. гл. III, § 4). Таким образом, определена обобщенная степень $\deg_2 \hat{d}$, принимающая одно из двух значений, 0 или 1. Следовательно, имеется лишь два топологически различных типа вихрей: один отвечает значению $\deg_2 \hat{d} = 0$, другой — значению $\deg_2 \hat{d} = 1$; первый топологически неустойчив, второй топологически устойчив. На рис. 38 представлен пример топологически устойчивого вихря, петля $\widehat{d}$ которого совпадает с петлей-экватором α; следовательно, $\deg_2 \widehat{d} = 1$. Гомотопический класс a этой петли содержит и другие петли в $\mathbb{R}P^2$, которые на полусфере выглядят как кривые, начало и конец которых лежат на экваторе и являются концами диаметра (см. рис. 40). Для этих петель направление $\widehat{d}(x)$ выходит из плоскости $\mathbb{R}^2$, и тем не менее они не гомотопны в $\mathbb{R}P^2$ постоянной петле. Произведение двух таких петель уже попадает в 0 — класс постоянной петли в $\mathbb{R}P^2$. В этот класс попадают все те петли, начало и конец которых на полусфере совмещены. Например, вихрь на рис. 39 характеризуется петлей из класса 0. Все указанные заключения можно усмотреть геометрически, предполагая, что отмеченная точка $y_0 \in Y = \mathbb{R}P^2$, в которой вычисляется группа $\pi_1(Y, y_0)$, задается концами диаметра на экваторе.

Следовательно, ввиду топологического отличия областей вырождения состояний у изотропного ферромагнетика и у нематика (S^2 и $\mathbb{R}P^2$ соответственно) получаем различные физические выводы: о ненаблюдаемости вихрей в первом случае и наблюдаемости — во втором (вихрей с топологическим индексом $\deg_2 \widehat{d} = 1$). Эксперименты согласуются с теорией. При этом физики называют топологически устойчивые вихри «вихрями силы 1/2», подчеркивая, что направление $\widehat{d}(x)$ при прохождении петли меняется на угол $1/2(2\pi)$, т. е. на угол π. Если же направление $\vec{d}(x)$ меняется на угол $N \cdot (2\pi)$, N целое, то вихрь называется «силы N»; в нашей классификации вихрь силы N имеет топологический индекс $\deg_2 \widehat{d} = 0$ и топологически неустойчив (пример такого вихря силы $N = -1$ изображен на рис. 39).

Эксперименты показывают сильную размытость линии вихря силы $N = \pm 1$, что интерпретируется как «вытекание вихря в третье измерение»; последнее означает, что директор вблизи линии дисклинации поворачивается и ориентируется вдоль этой линии, и таким образом особая линия вихря перестает существовать. Топология предсказывает несуществование дисклинаций целочисленной силы N. Именно обнаружение эффекта вытекания вихря в третье измерение, а также исследование дефектов в веществах с более сложными областями вырождения (как He^3) привело в 1976 г. советских физиков Г. Е. Воловика, В. П. Минеева, а также французов — Г. Тулуза, М. Клемана — к необходимости топологического описания дефектов с использованием гомотопической топологии. Оказывается, что мультипликативные свойства группы π_1 определяют способы, которыми вихри могут комбинировать друг с другом: слияние вихрей (при этом происходит сложение их топологических индексов) или распад вихря на несколько вихрей с суммарным сохранением топологического индекса (заряда) — важные законы для физики конденсированных состояний вещества.

Для нематика, как и для ферромагненика, возможно появление точечных дефектов, т. е. особых точек в поле направлений директора

$\widehat{d}(x)$. Если x^* — такая точка, то для определения ее топологического индекса (заряда) необходимо окружить x^* сферой $S^2_\varepsilon(x^*)$ (как в случае ферромагнетика) достаточно малого радиуса ε, не содержащей других особых точек, и рассмотреть отображение $\widehat{d}$: $S^2_\varepsilon(x^*) \to \mathbb{R}P^2$; его гомотопический класс $[\widehat{d}] \in \pi_2(\mathbb{R}P^2, y_0)$, где $y_0 = \widehat{d}(x_0)$, x_0 — отмеченная точка в $S^2_\varepsilon(x^*)$. Так как $\pi_2(\mathbb{R}P^2) = \mathbb{Z}$ — свободная абелева группа (с образующей γ_2, порожденной отображением склейки диаметрально противоположных точек $\overline{\gamma}_2$: $S^2 \to \mathbb{R}P^2$), то $[\widehat{d}] = k\gamma_2$, где $k \in \mathbb{Z}$ и называется целочисленной степенью $\deg \widehat{d}$. Эта степень не зависит от $\varepsilon > 0$ при $\varepsilon \to 0$ и называется топологическим индексом (или зарядом) $\varkappa(x^*)$ особой точки x^* (аналогично и для ферромагнетика можно более строго определить $\varkappa(x^*) = k$, где $[f] = k\gamma_2$, γ_2 — образующая свободной группы $\pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$). Топологически устойчивые особые точки имеют $\varkappa(x^*) \neq 0$, однако точечные дефекты с $|\varkappa(x^*)| > 1$ экспериментально не наблюдаются (точечные дефекты естественно наблюдаются, когда нематик заключен в цилиндрический капилляр и на его границе директор ортогонален стенке капилляра). Более общим образом ограничивающие вещество поверхности могут индуцировать новые классы дефектов, так как они могут изменить топологию области вырождения, равно как и другие классы нематиков, например, двуосные, дефекты которых напоминают дефекты сверхтекучей A-фазы He^3. Заметим, что область вырождения последней $SO(3)$ гомеоморфна $\mathbb{R}P^3$, поэтому (см. § 4 гл. III) $\pi_2(SO(3)) \sigma \pi_2(\mathbb{R}P^3) = 4$, откуда следует отсутствие в He^3 топологически устойчивых точечных особенностей.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В первой главе затронут материал из многих разделов топологий, по которым будут сделаны литературные указания после соответствующих глав. Здесь мы укажем источники для первого знакомства с предметом, а также книги, систематически излагающие (на том или ином уровне) курс топологии.

Систематическое изложение основных понятий топологии для начинающих — [14, 26, 69].

Элементарное изложение отдельных вопросов имеется в [17, 18, 32, 38].

Доказательство теоремы Жордана о замкнутой простой кривой — [1, 6].

Начальные сведения о метрических пространствах и их отображениях можно найти в [33, 40].

Наглядный материал, иллюстрирующий понятие топологического пространства (§ 3), можно пополнить по книгам [14, 17, 18, 27, 32, 38]; в частности, в [14, 34] излагается классификация двумерных поверхностей, в [14] дается представление о расслоенных пространствах.

Начальные сведения о римановых поверхностях см. в [84], а применения к эллиптическим интегралам — [66].

Начальные сведения по теории узлов — [14, 34]; систематическое изложение теории узлов — [36].

Систематическими начальными курсами по топологии являются книги [34, 64], по топологии и дифференциальной геометрии – [49, 53], а также серия книг [58–60].

Глубокое изложение идей, методов и результатов современной топологии в их развитии дано в фундаментальном труде [51]; первые две главы его и начало третьей могут быть использованы при первоначальном синтетическом изучении топологии.

По истории развития топологии в СССР см. также [28].

Приложения топологии к исследованию критических функций на гладких многообразиях (теория Морса, теория Люстерника–Шнирельмана) см. [44, 57, 74, 75].

О приложениях топологии к теории особенностей можно узнать из обзора [8], написанного для широкого круга читателей, а также из специальной монографии [10, 11]; роль топологии в проблеме минимальных поверхностей подробно освещена в монографиях [21, 75] (см. также [38]).

О приложениях топологии к физике конденсированных состояний вещества (некоторые описаны в § 6) можно ознакомиться по обзорам [16, 20, 30, 73]. О топологии пространства в современных физических теориях элементарных частиц популярно рассказывается в [29]. И, наконец, об обратном влиянии идей теоретической физики на современную топологию многообразий можно узнать из специальной монографии [77]: во введении и первой главе ее описаны результаты С. Дональдсона и М. Фридмана (1981–1982 гг.) о классификации четырехмерных многообразий, полученные при изучении пространства решений уравнений Янга–Миллса в теоретической физике. Из этих результатов вытекает, в частности, что классическое пространство $\mathbb{R}^4$ допускает не стандартные гладкие структуры (так называемые«фальшивые»), и даже в несчетном количестве (К. Таубс, 1987 г.). Укажем и на фундаментальную монографию [86], посвященную топологическим методам в квантовой теории поля и теории конденсированных сред.