ГЛАВА II

Общая топология

Как уже отмечалось выше, понятие метрического пространства недостаточно для развития ряда важных проблем математики. В XX столетии в математике возникла и развилась более общая концепция пространства — понятие топологического пространства. К настоящему времени это понятие стало универсальным в том смысле, что «структура» топологического пространства, являясь достаточно богатой и содержательной, обычно предшествует введению других геометрических структур. Язык теории топологических пространств стал общепринятым во всех разделах математики, связанных с понятием пространства. Эта глава посвящена изложению теории топологических пространств и их непрерывных отображений.

§ 1. Топологическое пространство и непрерывное отображение

1. Определение топологического пространства. Пусть X — множество произвольной природы и $\tau = \{U\}$ — совокупность его подмножеств, обладающая следующими свойствами:

1) $\varnothing, X \in \tau$;

2) объединение любой совокупности множеств из τ принадлежит τ;

3) пересечение любого конечного числа множеств из τ принадлежит τ.

Такая совокупность подмножеств τ называется *топологией* на X. Множество X с заданной на нем топологией τ называется *топологическим пространством* и обозначается (X, τ), подмножества из совокупности τ называются *открытыми* (в пространстве (X, τ)).

Там, где это не вызовет недоразумений, мы часто вместо (X, τ) будем писать просто X.

Пример 1. X — числовая прямая $\mathbb{R}^1$. Топологию на $\mathbb{R}^1$ можно задать следующим набором подмножеств: пустое множество $\varnothing$, всевозможные интервалы и их объединения $U = \bigcup\limits_{\alpha} (a_\alpha, b_\alpha)$ (проверьте!).

П р и м е р 2. $X = \mathbb{R}^2$. Открытым множеством назовем всякое множество в $X = \mathbb{R}^2$, которое вместе с каждой своей точкой содержит достаточно малый открытый круг с центром в этой точке, а также пустое множество. Легко проверить, что система всех открытых множеств в $X = \mathbb{R}^2$ образует топологию.

П р и м е р 3. X — произвольное множество. Совокупность $\tau_0 = \{\varnothing, X\}$ задает топологию на X (проверьте!).

П р и м е р 4. X — произвольное множество, $\tau_1 = \{$всевозможные подмножества из $X\}$. Совокупность τ — топология на X (проверьте!).

Топология τ_1 называется *максимальной* или *дискретной*, а топология τ_0 — *минимальной* или *тривиальной*. Таким образом, на одном и том же множестве можно ввести различные топологии, например тривиальную и дискретную.

С понятием открытого множества в топологическом пространстве (X, τ) тесно связано двойственное понятие *замкнутого множества*: так называют множество, дополнение которого открыто. Таким образом, если $U \in \tau$, то $X \backslash U$ замкнуто, и обратно: если F замкнуто, то $X \backslash F$ открыто.

Упражнение 1°. Проверьте, что следующие множества замкнуты: отрезок $[a, b]$ в $\mathbb{R}^1$ с топологией примера 1; замкнутый круг в $\mathbb{R}^2$ с топологией примера 2.

В силу двойственного характера операций в теории множеств совокупность $\{F\}$ всех замкнутых множеств топологического пространства (X, τ) удовлетворяет следующим свойствам:

1) $X, \varnothing \in \{F\}$;

2) пересечение любой совокупности множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$;

3) объединение любого конечного числа множеств из $\{F\}$ принадлежит $\{F\}$.

Эти свойства полностью характеризуют замкнутые множества топологического пространства (X, τ), а следовательно, и топологию τ (так как множества из τ — это дополнения замкнутых множеств) и могут быть приняты в качестве аксиом топологического пространства. Таким образом, топологию на X можно задать, указав совокупность $\{F\}$ подмножеств X, удовлетворяющую свойствам 1) — 3); в этом случае топологией на X будет совокупность $\{X \backslash F\}$.

Различные топологии на одном и том же множестве образуют частично упорядоченное множество.

Определение 1. Говорят, что топология τ на X *слабее* (*грубее*) топологии τ' на X ($\tau \prec \tau'$), если из того, что $U \in \tau$, следует, что $U \in \tau'$, т. е. если $\tau \subset \tau'$. Топология τ' в этом случае *сильнее* (*тоньше*) топологии τ.

Заметим, что для всякой топологии τ имеем $\tau_0 \prec \tau \prec \tau_1$. Ясно, что существуют и несравнимые топологии. Топологии τ' и τ'' несравнимы в том случае, если каждая из них содержит лишь часть множеств, принадлежащих другой.

Рассмотрим вопрос о том, как можно построить топологию; сначала дадим важное определение.

Определение 2. Совокупность $B = \{V\}$ открытых множеств топологического пространства (X, τ) называется *базой топологии* τ, если для всякого открытого множества $U \in \tau$ и для всякой точки $x \in U$ найдется такое множество $V \in B$, что $x \in V$ и $V \subset U$.

Следовательно, всякое непустое открытое множество топологического пространства (X, τ) можно представить в виде объединения открытых множеств из базы топологии τ (это свойство характеризует базу и часто принимается за определение базы). В частности, X равно объединению всех множеств базы (всякую систему подмножеств из X, объединение которых равно X, называют *покрытием* X). Если $\{V_\alpha\}$ — некоторое покрытие X, то возникает вопрос: при каких условиях можно построить топологию на X так, чтобы семейство $\{V_\alpha\}$ было базой этой топологии?

Теорема 1 (критерий базы). *Пусть* $X = \bigcup\limits_\alpha V_\alpha$. *Покрытие* $B = \{V_\alpha\}$ *является базой некоторой топологии на* X *тогда и только тогда, когда для каждого* V_α, *каждого* V_β *из* B *и каждого* $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ *существует* $V_\gamma \in B$ *такое, что* $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

Доказательство. Если $B = \{V_\alpha\}$ — база топологии, то $V_\alpha \cap V_\beta$ — открытое множество, и по определению базы для каждого $x \in V_\alpha \cap V_\beta$ существует V_γ: $x \in V_\gamma \subset V_\alpha \cap V_\beta$.

Обратно: если $B = \{V_\alpha\}$ удовлетворяет условию теоремы, то множества $U = \bigcup V_\alpha$ (всевозможные объединения) и пустое множество $\varnothing$ образуют, как нетрудно проверить, топологию на X, для которой $B = \{V_\alpha\}$ — база. ■

Заметим, что в доказательстве мы указали и способ построения топологии, если задано семейство B, удовлетворяющее условию теоремы.

Можно ли сконструировать топологию на множестве X по произвольному его покрытию $\{S_\alpha\}$? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Покрытие* $\{S_\alpha\}$ *естественно порождает топологию на* X, *а именно совокупность множеств* $\left\{V = \bigcap\limits_{\alpha \in K} S_\alpha\right\}$, *где* K — *произвольное конечное подмножество из* $\{\alpha\}$, — *база топологии.*

Доказательство. Проверим, что совокупность $\{V\}$ удовлетворяет критерию базы. В самом деле, для $V_\alpha \cap V_\beta$ положим $V_\gamma = V_\alpha \cap V_\beta$. Очевидно, $V_\gamma \in \{V\}$, поэтому критерий базы выполнен. ■

Таким образом, покрытие $\{S_\alpha\}$ множества X определяет на X топологию, открытыми множествами которой являются всевозможные объединения $\bigcup \left(\bigcap\limits_{\alpha \in K} S_\alpha \right)$ и пустое множество.

Определение 3. Семейство $\{S_\alpha\}$ по отношению к топологии, которую оно порождает, называется *предбазой* этой топологии.

Примеры. 5. Пусть $X = \mathbb{R}^1$. Множества вида $S_\alpha = \{x\colon x < \alpha\}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, и $S_\beta = \{x\colon x > \beta\}$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, образуют предбазу топологии числовой прямой $\mathbb{R}^1$, указанной в примере 1.

6. Пусть $X = \mathbb{R}^n$ есть n-мерное векторное пространство. В качестве базы топологии на $\mathbb{R}^n$ можно взять систему множеств $B = \{V_{a,b}\}$, где $V_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ a_i < \xi_i < b_i,\ i = 1, \ldots, n\}$, ξ_i — координата вектора $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$; $a = (a_1, \ldots, a_n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n)$ — произвольные векторы в $\mathbb{R}^n$, причем $a_i < b_i$.

Такие множества $V_{a,b}$ называются *открытыми параллелепипедами* в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 2°. Докажите, что описанная в примере 6 система параллелепипедов образует базу топологии на $\mathbb{R}^n$. Убедитесь, что в случаях $n = 1, 2$, топология, определяемая этой базой, совпадает с топологиями на $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, указанными в примерах 1, 2.

В дальнейшем, если не будет указано, какая именно топология рассматривается на $\mathbb{R}^n$, мы будем считать, что $\mathbb{R}^n$ снабжено топологией, база которой указана в примере 6.

В топологическом пространстве естественно выбирать базу топологии с возможно меньшим количеством элементов. Например, в $\mathbb{R}^1$ множества $V = (t_1, t_2)$, где t_1, t_2 рациональны, образуют базу топологии из счетного числа элементов.

Аналогично в $\mathbb{R}^n$ можно выбрать базу топологии, состоящую из счетного множества параллелепипедов с рациональными вершинами, т. е. вида

$$V_{r_1, r_2} = \{x\colon r_1^i < \xi_i < r_2^i,\ \ i = 1, \ldots, n\},$$

где r_1, r_2 — рациональные векторы в $\mathbb{R}^n$.

2. Окрестности. Пусть (X, τ) — топологическое пространство и $x \in X$ — произвольная точка.

Определение 4. *Окрестностью точки* $x \in X$ называется всякое подмножество $\Omega(x) \subset X$, удовлетворяющее условиям: 1) $x \in \Omega(x)$; 2) существует $U \in \tau$ такое, что $x \in U \subset \Omega(x)$.

Можно рассматривать совокупность всех окрестностей данной точки x. Эта совокупность обладает следующими свойствами:

1) объединение любой совокупности окрестностей точки x есть окрестность точки x;

2) пересечение конечного числа окрестностей точки x — окрестность точки x;

3) всякое множество, содержащее некоторую окрестность точки x, является окрестностью точки x.

Теорема 3. *Подмножество A ($A \neq \varnothing$) топологического пространства (X, τ) открыто тогда и только тогда, когда оно содержит некоторую окрестность каждой своей точки.*

Доказательство. Пусть A открыто, $x \in A$. Тогда ясно, что A — окрестность x, следовательно, A содержит окрестность любой своей точки. Пусть для каждого $x \in A$ существует окрестность точки x, целиком лежащая в A. По определению окрестности в ней содержится некоторое открытое множество U_x, $x \in U_x$. Рассмотрим объединение $\bigcup\limits_{x \in A} U_x$ всех таких множеств. Оно открыто и совпадает с A. Действительно, так как всякая точка множества A принадлежит $\bigcup\limits_{x \in A} U_x$, то $A \subseteq \bigcup\limits_{x \in A} U_x$. С другой стороны, для каждого x имеем $U_x \subset A$, т. е. $\bigcup\limits_{x \subset A} U_x \subset A$. Поэтому $A = \bigcup\limits_{x \in A} U_x$, значит, A открыто. ■

Окрестности используют для отделения точек друг от друга.

Определение 5. Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек, x, y, найдутся такие окрестности $U(x)$, $U(y)$ этих точек, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Топологическое пространство (X, τ) с тривиальной топологией не является хаусдорфовым, если оно содержит более одной точки (проверьте!).

Свойства окрестностей точки, рассмотренные выше, можно положить в основу следующего определения топологического пространства, объявляя их аксиомами.

Определение 6. *Топологическое пространство* — это множество X, для каждой точки x которого указана непустая система подмножеств $\{\Omega_\alpha(x)\}$, называемых *окрестностями точки* x, удовлетворяющих следующим свойствам: 1) x принадлежит каждой своей окрестности $\Omega_\alpha(x)$; 2) если множество $U \subset X$ содержит некоторое $\Omega_\alpha(x)$, то U — также окрестность точки x; 3) для любых окрестностей $\Omega_{\alpha_1}(x)$, $\Omega_{\alpha_2}(x)$ точки x их пересечение $\Omega_{\alpha_1}(x) \cap \Omega_{\alpha_2}(x)$ также является окрестностью точки x; 4) для всякой окрестности $\Omega_\alpha(x)$ точки x найдется такая окрестность $\Omega_{\alpha_1}(x) \subset \Omega_\alpha(x)$, которая является окрестностью каждой своей точки.

Упражнение 3°. Покажите, что множества, являющиеся окрестностью каждой своей точки, и $\varnothing$ образуют топологию на X.

3. Непрерывное отображение. Гомеоморфизм. Обсудим теперь определение непрерывного отображения топологических пространств.

Пусть (X, τ), (Y, σ) — два топологических пространства с топологиями τ, σ соответственно. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множеств.

Определение 7. Говорят, что f — *непрерывное отображение* топологических пространств, если полный прообраз $f^{-1}(V)$ любого открытого множества V пространства (Y, σ) является открытым множеством пространства (X, τ).

Упражнения. 4°. Сформулируйте определение непрерывного отображения в терминах базы топологии.

5°. Покажите, что числовая непрерывная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ задает непрерывное отображение $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$.

6°. Докажите, что $f\colon X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз $f^{-1}(F)$ замкнут в X для каждого замкнутого множества F в Y.

Если $f\colon X \to Y$, $g\colon Y \to Z$ — отображения топологических пространств, то естественно определяется суперпозиция $gf\colon X \to Z$ по правилу $(gf)\colon x \mapsto g(f(x))$.

Теорема 4. *Если f, g непрерывны, то и gf непрерывно.*

Доказательство легко следует из замечания

$$(gf)^{-1}(W) = f^{-1}\left(g^{-1}(W)\right),$$

где $W \subset Z$ — произвольное множество.

Определение 8. Два топологических пространства, (X, τ), (Y, σ), называются *гомеоморфными*, если существует отображение $f\colon X \to Y$, удовлетворяющее условиям: 1) $f\colon X \to Y$ — биективное отображение; 2) f непрерывно; 3) f^{-1} непрерывно.

Заметим, что это определение по форме в точности повторяет определение гомеоморфизма метрических пространств, введенное в § 2 гл. I.

Определение 9. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *открытым* (*замкнутым*), если образ каждого открытого (замкнутого) множества в X открыт (замкнут) в Y.

Упражнение 7°. Докажите, что отображение $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм тогда и только тогда, когда определено отображение f^{-1}: $X \to Y$ и отображения f и f^{-1} одновременно открыты и замкнуты.

Таким образом, гомеоморфизм преобразует открытые множества в открытые, а замкнутые — в замкнутые.

Сопоставление каждому открытому множеству U пространства X его образа $f(U)$ при гомеоморфизме $f\colon X \to Y$ устанавливает биективное соответствие между топологиями пространства X и Y. Поэтому любое свойство пространства X, формулируемое в терминах топологии этого пространства, будет верным и для пространства Y, гомеоморфного X, и так же будет формулироваться в терминах топологии Y. Таким образом, гомеоморфные пространства X и Y обладают идентичными свойствами и с этой точки зрения являются неразличимыми.

Свойства топологических пространств, сохраняющиеся при гомеоморфизмах, называются *топологическими свойствами* *. В этой связи отметим задачу, долгое время считавшуюся основной задачей топологии (и не решенную полностью до сих пор), — дать эффективный способ различать негомеоморфные пространства.

Упражнения. 8°. Покажите, что гомеоморфизм задает соответствие баз и предбаз гомеоморфных пространств.

9°. Покажите, что отношение гомеоморфизма есть отношение эквивалентности.

10°. Покажите, что интервал $(-1, +1)$ числовой оси гомеоморфен всей числовой оси, предъявите формулу гомеоморфизма.

11°. Покажите, что отрезок и интервал на числовой оси не гомеоморфны.

Существует весьма полезное расширение понятия гомеоморфизма — *локальный гомеоморфизм*. Это такое непрерывное отображение $f\colon X\to Y$, что для всякой пары точек x, y, $y=f(x)$, найдутся окрестности $U(x)$, $V(y)$ такие, что $f\colon U(x)\to V(y)$ — гомеоморфизм.

Упражнение 12°. Убедитесь, что отображение $\mathbb{R}^1\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^1\setminus\{0\}$, задаваемое формулой $y=x^2$, — локальный гомеоморфизм.

4. Подпространство топологического пространства. Как видно из предыдущего, подмножества метрических и топологических пространств часто рассматриваются как самостоятельные объекты. При этом подмножество Y метрического пространства X естественно наследует метрику из X. Определим теперь понятие наследственной топологии на подмножестве Y, когда X — топологическое пространство.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, $Y\subset X$ — подмножество в X. Рассмотрим систему подмножеств множества Y

$$\tau_Y=\{V\colon V=U\cap Y,\ U\in\tau\}.$$

Теорема 5. *Система τ_Y является топологией на Y.*

Доказательство предлагается провести читателю (оно очевидно).

Топология τ_Y называется *индуцированной* или *наследственной топологией* из X. Пространство (Y, τ_Y) называется *подпространством* пространства (X, τ).

Подмножества топологических пространств рассматривают, как правило, с индуцированной топологией.

Если $f\colon X\to Z$ — непрерывное отображение топологических пространств (X, τ), (Z, σ), а Y — подпространство X, то можно рассматривать и отображение $f\colon Y\to Z$, которое называется *сужением* f на Y и обозначается $f\big|_Y$.

---

* При изучении топологических свойств гомеоморфные пространства X, Y часто не различают.

3*

Теорема 6. *Отображение* $f\big|_Y: Y \to Z$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $W \in \sigma$, тогда $(f\big|_Y)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap Y$. Так как $f^{-1}(W) \in \tau$, то $(f\big|_Y)^{-1}(W) \in \tau_Y$. ■

Упражнения. 13°. Покажите, что открытое множество в подпространстве Y топологического пространства X не обязательно открыто в X. Разберите примеры для $X = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Аналогичный вопрос для замкнутых множеств в Y. Предварительно докажите, что всякое замкнутое множество F_Y в Y имеет вид $F_Y = F \cap Y$, где F — замкнутое множество в X.

14°. Пусть $A, B \subset X$ — замкнутые множества топологического пространства X и пусть $X = A \cup B$. Тогда отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f\big|_A: A \to Y$, $f\big|_B: B \to Y$ непрерывны.

Введем еще одно полезное понятие. Отображение $i: Y \to X$ топологических пространств Y, X называется *вложением* Y в X, если: 1) i непрерывно; 2) $i: Y \to i(Y)$ — гомеоморфизм, где $i(Y) \subset X$ — подпространство в X.

Вложения полезны, когда мы хотим «выделить» подпространство $Y \subset X$ из объемлющего пространства X и рассматривать его отдельно. Связь с X сохраняется посредством естественного отображения $Y \to X$, сопоставляющего элементу из Y тот же самый элемент в X, которое является вложением.

§ 2. Топология и непрерывные отображения метрических пространств. Пространства $\mathbb{R}^n$, S^{n-1}, D^n

1. Топология в метрическом пространстве. Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство с метрикой ρ. На X естественным образом можно построить топологию. Рассмотрим всевозможные множества $D_\varepsilon(x) = \{y: \rho(y, x) < \varepsilon\}$, где $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Множество $D_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* радиуса ε с центром в точке x.

Совокупность $\{D_\varepsilon(x)\}$ всех открытых шаров образует покрытие метрического пространства, для которого выполнен критерий базы (теорема 1 § 1). Действительно, пусть $D_{\varepsilon_1}(x_1)$ и $D_{\varepsilon_2}(x_2)$ — два открытых шара с непустым пересечением. Пусть $y \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$ и $\delta = \min\{\varepsilon_1 - \rho(y, x_1), \varepsilon_2 - \rho(y, x_2)\}$ и $z \in D_\delta(y)$; тогда

$$\rho(z, x_1) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_1) < \delta + \rho(y, x_1) \leqslant \varepsilon_1,$$
$$\rho(z, x_2) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_2) < \delta + \rho(y, x_2) \leqslant \varepsilon_2.$$

Следовательно, $z \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$, откуда $D_\delta(y) \subset D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены.