Теорема 6. *Отображение* $f\big|_Y: Y \to Z$ *непрерывно.*

Доказательство. Пусть $W \in \sigma$, тогда $(f\big|_Y)^{-1}(W) = f^{-1}(W) \cap Y$. Так как $f^{-1}(W) \in \tau$, то $(f\big|_Y)^{-1}(W) \in \tau_Y$. ■

Упражнения. 13°. Покажите, что открытое множество в подпространстве Y топологического пространства X не обязательно открыто в X. Разберите примеры для $X = \mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$. Аналогичный вопрос для замкнутых множеств в Y. Предварительно докажите, что всякое замкнутое множество F_Y в Y имеет вид $F_Y = F \cap Y$, где F — замкнутое множество в X.

14°. Пусть $A, B \subset X$ — замкнутые множества топологического пространства X и пусть $X = A \cup B$. Тогда отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда $f\big|_A: A \to Y$, $f\big|_B: B \to Y$ непрерывны.

Введем еще одно полезное понятие. Отображение $i: Y \to X$ топологических пространств Y, X называется *вложением* Y в X, если: 1) i непрерывно; 2) $i: Y \to i(Y)$ — гомеоморфизм, где $i(Y) \subset X$ — подпространство в X.

Вложения полезны, когда мы хотим «выделить» подпространство $Y \subset X$ из объемлющего пространства X и рассматривать его отдельно. Связь с X сохраняется посредством естественного отображения $Y \to X$, сопоставляющего элементу из Y тот же самый элемент в X, которое является вложением.

§ 2. Топология и непрерывные отображения метрических пространств. Пространства $\mathbb{R}^n$, S^{n-1}, D^n

1. Топология в метрическом пространстве. Пусть (X, ρ) — некоторое метрическое пространство с метрикой ρ. На X естественным образом можно построить топологию. Рассмотрим всевозможные множества $D_\varepsilon(x) = \{y: \rho(y, x) < \varepsilon\}$, где $x \in X$, $\varepsilon > 0$. Множество $D_\varepsilon(x)$ называется *открытым шаром* радиуса ε с центром в точке x.

Совокупность $\{D_\varepsilon(x)\}$ всех открытых шаров образует покрытие метрического пространства, для которого выполнен критерий базы (теорема 1 § 1). Действительно, пусть $D_{\varepsilon_1}(x_1)$ и $D_{\varepsilon_2}(x_2)$ — два открытых шара с непустым пересечением. Пусть $y \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$ и $\delta = \min\{\varepsilon_1 - \rho(y, x_1), \varepsilon_2 - \rho(y, x_2)\}$ и $z \in D_\delta(y)$; тогда

$$\rho(z, x_1) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_1) < \delta + \rho(y, x_1) \leqslant \varepsilon_1,$$
$$\rho(z, x_2) \leqslant \rho(z, y) + \rho(y, x_2) < \delta + \rho(y, x_2) \leqslant \varepsilon_2.$$

Следовательно, $z \in D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$, откуда $D_\delta(y) \subset D_{\varepsilon_1}(x_1) \cap D_{\varepsilon_2}(x_2)$. Таким образом, условия теоремы 1 выполнены.

Определение 1. Топология τ_ρ, определяемая базой всех открытых шаров в метрическом пространстве (X, ρ), называется топологией, *индуцированной метрикой* ρ, или *метрической топологией*.

Таким образом, открытыми множествами топологии τ_ρ являются всевозможные объединения открытых шаров метрического пространства (X, ρ) и пустое множество $\varnothing$.

Теорема 1. *Построенная топология* τ_ρ *хаусдорфова.*

Доказательство. Пусть $x \neq y$, в этом случае $\rho(x, y) = \alpha > 0$ (по свойству метрики). Взяв $\varepsilon = \alpha/3$, рассмотрим $D_\varepsilon(x)$, $D_\varepsilon(y)$. Легко видеть, что $D_\varepsilon(x) \cap D_\varepsilon(y) = \varnothing$. В самом деле, предположив противное, для точки $z \in D_\varepsilon(x) \cap D_\varepsilon(y)$ имели бы

$$\alpha = \rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3},$$

что невозможно. ■

Можно дать другое, эквивалентное определение открытых множеств в метрическом пространстве.

Определение 2. Множество $U \neq \varnothing$ *открыто*, если для всякой точки $x \in U$ найдется открытый шар $D_\delta(x)$ с центром в x, целиком содержащийся в U.

Заметим, что именно так мы определили в § 1 топологию на $\mathbb{R}^2$, и, следовательно, она совпадает с топологией τ_ρ, порожденной евклидовой метрикой ρ плоскости $\mathbb{R}^2$. Проверка эквивалентности двух определений открытых множеств предоставляется читателям.

Рассмотрим отображение $f\colon X \to Y$ метрического пространства (X, ρ_1) в метрическое пространство (Y, ρ_2). Теперь можно дать два определения непрерывности отображения f: как отображения метрических и как отображения топологических пространств. Эти два определения эквивалентны, а именно верна следующая теорема.

Теорема 2. *Отображение* $f\colon X \to Y$ *метрического пространства* (X, ρ_1) *в метрическое пространство* (Y, ρ_2) *непрерывно (в топологиях, индуцированных метриками) тогда и только тогда, когда для всякого* $x_0 \in X$ *и всякой сходящейся к* x_0 *последовательности* $\{x_n\}$ *в* X *последовательность* $\{f(x_n)\}$ *сходится в* Y *к* $f(x_0)$.

Доказательство. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение в топологиях X, Y, индуцированных метриками, и пусть $x_n \xrightarrow{\rho_1} x_0$. Покажем, что тогда $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$. Последнее означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется натуральное $N = N(\varepsilon, x_0)$ такое, что $\rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$ при $n > N$.

Рассмотрим в Y открытый шар $D_\varepsilon(f(x_0))$; обозначим его V_ε. Его прообраз $f^{-1}(V_\varepsilon)$ — открытое множество в X в силу непрерывности f, причем $x_0 \in f^{-1}(V_\varepsilon)$. Точка x_0 принадлежит $f^{-1}(V_\varepsilon)$ вместе с некоторым шаром $D_\delta(x_0)$ радиуса δ. Существует такой номер N ($N =$

$= N(\varepsilon, x_0)$), что x_n принадлежит $D_\delta(x_0)$ (и $f^{-1}(V_\varepsilon)$) при $n > N$. Но тогда $f(x_n) \in V_\varepsilon$ (т. е. $\rho_2(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon$) при $n > N$. Следовательно, отображение f непрерывно как отображение метрических пространств.

Пусть для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к некоторой точке x_0 в пространстве X, выполнено условие $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x_0)$. Покажем, что в этом случае прообраз всякого открытого множества открыт. Пусть V — открытое множество в Y, $U = f^{-1}(V)$. Покажем, что U открыто в пространстве X. Воспользуемся определением 2 открытого множества. Пусть $x \in f^{-1}(V)$, тогда достаточно найти такое $\varepsilon > 0$, что $D_\varepsilon(x) \subset f^{-1}(V)$. Предположим, что такого ε не существует. Тогда существуют такие последовательности $\{\varepsilon_n\}$, $\{x_n\}$, что $\varepsilon_n \to 0$, $x_n \in D_{\varepsilon_n}(x)$, но $x_n \notin f^{-1}(V)$. Следовательно, $x_n \xrightarrow{\rho_1} x$, откуда $f(x_n) \xrightarrow{\rho_2} f(x)$. Заметив, что $f(x)$ принадлежит V вместе с некоторым открытым шаром, заключаем, что $f(x_n) \in V$ и $x_n \in f^{-1}(V)$, начиная с некоторого номера, в противоречие с предположением. Таким образом, отображение f непрерывно в топологиях пространств X, Y, индуцированных метрикой. ■

2. Пространство $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим важный пример метрического пространства — *евклидово пространство*

$$\mathbb{R}^n = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n),\ -\infty < \xi_i < +\infty,\ i = 1, \ldots, n\},$$

состоящее из всех упорядоченных наборов (называемых *точками* или *векторами*) n вещественных чисел; числа ξ_i называются *координатами* точки, вектора.

Метрика (евклидова метрика) в $\mathbb{R}^n$ ($n \geqslant 1$) вводится аналогично метрике в $\mathbb{R}^3$:

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}, \qquad (1)$$

где $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — два произвольных вектора в $\mathbb{R}^n$.

Проверим, что это метрика. Свойства метрики (см. § 2 гл. I) 1), 2), 3), очевидно, выполнены. Проверим свойство 4). Требуется доказать неравенство

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}$$

для произвольных вещественных чисел ξ_i, η_i, ζ_i, $i = 1, \ldots, n$. Доказательство разбивается на две леммы.

Лемма 1 (неравенство Коши—Буняковского). *Для любых вещественных чисел* ξ_i, η_i, $i = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i \eta_i) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Для произвольного вещественного λ имеем $\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \lambda\eta_i)^2 \geqslant 0$, откуда $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 2\lambda \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i + \lambda^2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \geqslant 0$. Рассмотрим левую часть неравенства как полином от λ. Он не может иметь двух различных вещественных корней, следовательно, дискриминант его неположителен, что и приводит к неравенству

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i \right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2. \ \blacksquare$$

Лемма 2 (неравенство Минковского). *Для произвольных вещественных чисел* ξ_i, η_i, $i = 1, \ldots, n$, *справедливо неравенство*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2}.$$

Доказательство. Воспользуемся неравенством Коши—Буняковского:

$$\sum_{i=1}^{n} (\xi_i + \eta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\xi_i^2 + 2\xi_i\eta_i + \eta_i^2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2} + \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 = \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 \right)^{1/2} \right]^2.$$

Извлекая корень из обеих частей неравенства, получаем требуемое неравенство. $\blacksquare$

Закончим проверку свойства 4) метрики. Пользуясь неравенством Минковского, получаем

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} [(\xi_i - \zeta_i) + (\zeta_i - \eta_i)]^2 \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \zeta_i)^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^{n} (\zeta_i - \eta_i)^2 \right)^{1/2}.$$

Таким образом, ρ — метрика в $\mathbb{R}^n$. $\blacksquare$

Нетрудно видеть, что метрическая топология τ_ρ на $\mathbb{R}^n$, индуцированная евклидовой метрикой ρ, совпадает с топологией на $\mathbb{R}^n$, база которой указана в примере 6 § 1.

Пусть $x_0 = (\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0)$ — центр шара $D_r(x_0)$, а $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — его произвольная точка. Тогда координаты точки x удовлетворяют неравенству

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 < r^2. \tag{2}$$

Шар $D_r(x_0)$ в $\mathbb{R}^n$ часто обозначают $D_r^n(x_0)$ и называют *открытым n-диском. Замкнутым шаром* (*замкнутым n-диском*) $\overline{D}_r^n(x_0)$ называется множество точек x, координаты которых удовлетворяют нестрогому неравенству

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 \leqslant r^2; \tag{3}$$

$(n-1)$-мерная сфера $S_r^{n-1}(x_0)$ радиуса r с центром в точке x_0 определяется равенством

$$|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + \ldots + |\xi_n - \xi_n^0|^2 = r^2. \tag{4}$$

Будем называть сферу $S_r^{n-1}(x_0)$ *краем диска* $\overline{D}_r^n(x_0)$ или $D_r^n(x_0)$.

Метрика в $\mathbb{R}^n$ может быть задана и другими способами, например,

$$\rho(x, y) = \max_{i=1,\ldots,n} \{|\xi_i - \eta_i|\}. \tag{5}$$

Упражнение 1°. Опишите шар в $\mathbb{R}^n$ в метрике (5). Покажите, что евклидова метрика и метрика (5) индуцируют одинаковую топологию.

Рассмотрим комплексное n-мерное пространство $\mathbb{C}^n$: $\mathbb{C}^n = \{z\colon\ z = (z_1, \ldots, z_n),\ z_k = x_k + iy_k,\ x_k,\ y_k \in \mathbb{R}^1,\ k = 1, \ldots, n\}$. Метрика в нем вводится аналогично тому, как это было сделано в вещественном случае:

$$\rho(z', z'') = (|z_1' - z_1''|^2 + \ldots + |z_n' - z_n''|^2)^{1/2},$$

где $z' = (z_1', \ldots, z_n')$, $z'' = (z_1'', \ldots, z_n'')$ — элементы $\mathbb{C}^n$. Топологию на $\mathbb{C}^n$, индуцируемую этой метрикой, можно задать также при помощи метрики

$$\rho(z', z'') = \max_{k=1,\ldots,n} |z_k' - z_k''|.$$

Сформулируем теперь условие непрерывности отображений евклидовых пространств. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ сопоставляет каждой точке $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ определенную точку $(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, так что можно записать

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ \eta_m &= f_m(\xi_1, \ldots, \xi_n), \end{aligned} \tag{6}$$

где f_i, $i = 1, \ldots, m$, — числовая функция от n переменных. Такая функция задает отображение f_i: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ по правилу

$$\eta_i = f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n). \tag{7}$$

Очевидно, что непрерывность отображения f_i эквивалентна непрерывности числовой функции $f_i(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, как она определяется в анализе.

Отображение (7) назовем i-й компонентой отображения f. Отображение f определяется заданием всех его компонент f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Теорема 3. *Отображение* f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывна каждая его компонента*

$$f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Доказательство следует из замечания о том, что $f(x^k) \to f(x^0)$, $k \to \infty$, эквивалентно $f_i(x^k) \to f_i(x^0)$, $k \to \infty$, для $i = 1, \ldots, m$.

3. Диск D^m гомеоморфен $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим некоторые подмножества в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Пусть S^{n-1}, D^n — сфера и открытый n-диск единичного радиуса с центром в точке $(0, \ldots, 0)$. Обозначим через S_+^{n-1} часть сферы, где $\xi_n > 0$ (северное полушарие). Докажем, что диск D^{n-1} гомеоморфен полусфере S_+^{n-1}.

Можно считать, что пространство $\mathbb{R}^{n-1}$ совпадает с подпространством точек $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$ пространства $\mathbb{R}^n$, если отождествлять точки $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ и $(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$. Тогда D^{n-1} и S_+^{n-1} лежат в $\mathbb{R}^n$ и задаются так:

$$S_+^{n-1} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): \xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1,\ \xi_n > 0\},$$
$$D^{n-1} = \{(\xi_1, \ldots, \xi_n): \xi_1^2 + \ldots + \xi_{n-1}^2 < 1,\ \xi_n = 0\}.$$

В случае $\mathbb{R}^3$ имеем следующую ситуацию: S_+^2 — верхняя половина сферы без экватора, D^2 — внутренность единичного круга в $\mathbb{R}^2$ (рис. 41),

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S_+^2, \quad y = (\xi_1, \xi_2, 0) \in D^2.$$

Проекция $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \mapsto (\xi_1, \xi_2, 0)$ является гомеоморфизмом полусферы S^2_+ и диска D^2.

В $\mathbb{R}^n$ поступим аналогично: проекция

$$f\colon (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0)$$

задает непрерывное биективное отображение S^{n-1}_+ на D^{n-1} (проверьте!). Рассмотрим обратное отображение. Легко убедиться, что оно имеет вид

$$f^{-1}\colon (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, 0) \mapsto (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, (1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_{n-1}^2)^{1/2}) \quad (8)$$

и непрерывно. Таким образом, построен гомеоморфизм диска D^{n-1} и полусферы S^{n-1}_+. Назовем *замкнутой полусферой* $\overline{S}^{n-1}_+$ множество точек сферы S^{n-1}, удовлетворяющих неравенству $\xi_n \geqslant 0$. Ясно, что $\overline{S}^{n-1}_+ = S^{n-1}_+ \cup S^{n-2}$. Сферу S^{n-2} естественно назвать *краем полусферы* $\overline{S}^{n-1}_+$ (или S^{n-1}_+). Заметим, что S^{n-2} есть одновременно край диска $\overline{D}^{n-1}$ (или D^{n-1}). Легко усмотреть, что гомеоморфизм (8) определен и на S^{n-2} и $f^{-1}\big|_{S^{n-2}} = 1_{S^{n-2}}$. Таким образом, $\overline{D}^{n-1}$ гомеоморфно $\overline{S}^{n-1}_+$.

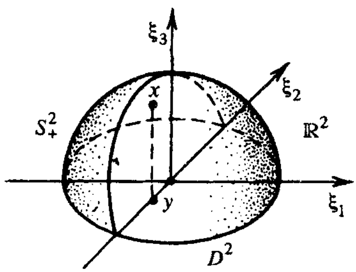

Рис. 41

Установим теперь важный гомеоморфизм.

Теорема 4. *Диск D^m гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 1$.*

Доказательство. Положим $m = n - 1$ и воспользуемся предыдущей конструкцией. Пространство $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, перенесем параллельно так, чтобы его начало координат попало в точку $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n$ — северный полюс сферы S^{n-1}. Точки новой плоскости имеют вид $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}, 1)$. Через каждую точку $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in S^{n-1}_+$ проведем полупрямую $\eta_1 \doteq t\xi_1$, $\eta_2 = t\xi_2, \ldots$ $\ldots, \eta_n = t\xi_n$, $t \geqslant 0$. Она пересекает построенную плоскость в единственной точке, соответствующей значению $t(x) = 1/\xi_n$. Сопоставляя точке x эту точку пересечения, получаем отображение Φ: $S^{n-1}_+ \to \mathbb{R}^{n-1}$, задаваемое правилом

$$(\xi_1, \ldots, \xi_n) \mapsto (\xi_1/\xi_n, \ldots, \xi_{n-1}/\xi_n, 1).$$

Это отображение, как легко проверить, — гомеоморфизм. Суперпозиция гомеоморфизмов

$$\Phi f^{-1}\colon D^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad n \geqslant 2,$$

и есть искомый гомеоморфизм. ■

Упражнения. 2°. Сформулируйте критерий непрерывности отображения $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ комплексных пространств.

3°. Докажите, что $\mathbb{C}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$.

4°. Докажите, что шары в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенные с помощью метрик (1), (5), гомеоморфны.

5°. Докажите непрерывность функций

$$f(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}, \quad f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

6°. Определим диски и сферу в пространстве $\mathbb{C}^n$ условиями (2)—(4) и обозначим их соответственно $D^n_{\mathbb{C},r}$, $\overline{D}^n_{\mathbb{C},r}$, $S^{n-1}_{\mathbb{C},r}$. Докажите, что они гомеоморфны соответственно D^{2n}_r, $\overline{D}^{2n}_r$, S^{2n-1}_r.

7°. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ диски любых радиусов гомеоморфны; докажите аналогичное утверждение для сфер.

§ 3. Факторпространство и фактортопология

1. Определение фактортопологии. Дадим строгое определение топологии в факторпространстве — фактортопологии — и с новой точки зрения проанализируем примеры § 3 гл. I.

Пусть в абстрактном множестве X между некоторыми элементами $x, y \in X$ определено отношение $x \sim y$. Это отношение называется *эквивалентностью*, если выполнены следующие свойства: 1) $x \sim x$ для любого $x \in X$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или *классы эквивалентности*.

Множество $\{D_\alpha\}$ всех классов эквивалентности обозначим через X/R, где R обозначает эквивалентность в X.

Определение. Множество X/R называется *фактормножеством* множества X по отношению эквивалентности R.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, пусть в множестве X определено отношение эквивалентности R. Тогда на фактормножестве X/R можно ввести естественную топологию следующим образом: подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$, состоящее из элементов D_α, назовем открытым тогда и только тогда, когда объединение $\bigcup D_\alpha$ множеств D_α как подмножеств X открыто в пространстве (X, τ); к открытым множествам, естественно, отнесем и пустое множество. Эта совокупность открытых подмножеств в X/R является топологией и обозначается τ_R.

Упражнение 1°. Проверьте, что τ_R является топологией на X/R.

Топология τ_R называется *фактортопологией*; обычно ее имеют в виду, когда говорят о факторпространстве.