Упражнения. 2°. Сформулируйте критерий непрерывности отображения $f\colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ комплексных пространств.

3°. Докажите, что $\mathbb{C}^n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^{2n}$.

4°. Докажите, что шары в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенные с помощью метрик (1), (5), гомеоморфны.

5°. Докажите непрерывность функций

$$f(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1^2 + \xi_2^2)^{1/2}, \quad f(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}.$$

6°. Определим диски и сферу в пространстве $\mathbb{C}^n$ условиями (2)—(4) и обозначим их соответственно $D^n_{\mathbb{C},r}$, $\overline{D}^n_{\mathbb{C},r}$, $S^{n-1}_{\mathbb{C},r}$. Докажите, что они гомеоморфны соответственно D^{2n}_r, $\overline{D}^{2n}_r$, S^{2n-1}_r.

7°. Докажите, что в $\mathbb{R}^n$ диски любых радиусов гомеоморфны; докажите аналогичное утверждение для сфер.

§ 3. Факторпространство и фактортопология

1. Определение фактортопологии. Дадим строгое определение топологии в факторпространстве — фактортопологии — и с новой точки зрения проанализируем примеры § 3 гл. I.

Пусть в абстрактном множестве X между некоторыми элементами x, $y \in X$ определено отношение $x \sim y$. Это отношение называется *эквивалентностью*, если выполнены следующие свойства: 1) $x \sim x$ для любого $x \in X$ (рефлексивность); 2) если $x \sim y$, то $y \sim x$ (симметричность); 3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$ (транзитивность).

Множество X распадается на непересекающиеся классы эквивалентных между собой элементов, или *классы эквивалентности*.

Множество $\{D_\alpha\}$ всех классов эквивалентности обозначим через X/R, где R обозначает эквивалентность в X.

Определение. Множество X/R называется *фактормножеством* множества X по отношению эквивалентности R.

Пусть (X, τ) — топологическое пространство, пусть в множестве X определено отношение эквивалентности R. Тогда на фактормножестве X/R можно ввести естественную топологию следующим образом: подмножество $V \subset \{D_\alpha\}$, состоящее из элементов D_α, назовем открытым тогда и только тогда, когда объединение $\bigcup D_\alpha$ множеств D_α как подмножеств X открыто в пространстве (X, τ); к открытым множествам, естественно, отнесем и пустое множество. Эта совокупность открытых подмножеств в X/R является топологией и обозначается τ_R.

Упражнение 1°. Проверьте, что τ_R является топологией на X/R.

Топология τ_R называется *фактортопологией*; обычно ее имеют в виду, когда говорят о факторпространстве.

Мотивы определения топологии τ_R станут яснее, если рассмотреть отображение $\pi: X \to X/R$, сопоставляющее всякому элементу $x \in X$ содержащий его класс эквивалентности D_x; это отображение называется проекцией пространства X на факторпространство X/R. Легко видеть, что множество $V \subset X/R$ открыто тогда и только тогда, когда множество $\pi^{-1}(V)$ открыто в X. Таким образом, проекция π непрерывна как отображение из (X,τ) в $(X/R, \tau_R)$. (Заметим, что отсюда вытекает тот принцип непрерывности «склейки», о котором упоминалось в § 3 гл. I.)

Могут существовать, конечно, и другие топологии на множестве X/R, в которых проекция π непрерывна. Следующая теорема характеризует топологию τ_R.

Теорема 1. *Топология τ_R — сильнейшая среди всех топологий на X/R, для которых отображение π непрерывно.*

Доказательство. Если $\{W\}$ — топология на X/R, в которой отображение π непрерывно, то для всякого $W \in \{W\}$ множество $\pi^{-1}(W)$ открыто в X. Следовательно, W открыто в факторпространстве X/R, т. е. $W \in \tau_R$. Это означает, что топология $\{W\}$ слабее топологии τ_R. ■

Упражнение 2°. Пусть $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}^1$. Зададим эквивалентность $x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x - y$ рационально. Покажите, что факторпространство X/R не хаусдорфово.

2. Примеры факторпространств. Рассмотрим примеры § 3 гл. I. Если X — прямоугольник $abcd$, а отношение эквивалентности R задано так, что $x \sim x$ для каждого $x \in X$ и $x \sim y$ тогда и только тогда, когда $x \in ab$, $y \in cd$ и x, y лежат на одной горизонтали в X, то X/R — топологическое пространство, гомеоморфное цилиндру (см. рис. 1, 2).

Действительно, база топологии цилиндра образована двумерными «дисками» — пересечениями шаров в $\mathbb{R}^3$ с цилиндром (рис. 42). Если разрезать цилиндр по линии ab и развернуть в прямоугольник, то «диски» перейдут в базу топологии последнего, причем «диски», пересекающие линию ab, разрежутся на сегменты, дополняющие друг друга до круга и лежащие на противоположных концах прямоугольника. Отсюда ясно, что необходимо склеить дополнительные сегменты по линии разреза, чтобы получить базу топологии в X/R (рис. 43). Теперь легко убедиться, что, сопоставляя эквивалентным точкам прямоугольника ту точку цилиндра, в которую они «склеились», мы получаем гомеоморфизм рассматриваемого факторпространства X/R с цилиндром.

Точно так же можно исследовать топологию листа Мёбиуса (см. следующий пример «склейки» в § 3 гл. I). На рис. 44 изображены некоторые открытые множества листа Мёбиуса. Здесь сегменты «склеиваются» по центрально-симметричным точкам, лежащим на сторонах ab, cd.

В третьем примере «склейки» соответствующее факторпространство гомеоморфно тору, элементы базы его топологии изображены на рис. 45. Здесь соответствующие сегменты склеиваются не только по вертикальным основаниям, лежащим на ab, cd, но и по горизонтальным, лежащим на ac, bd.

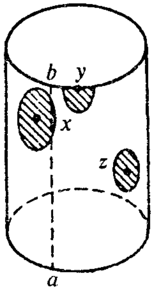

Рис. 42

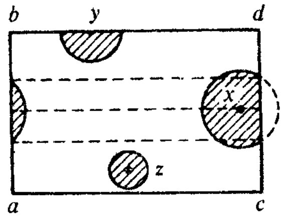

Рис. 43

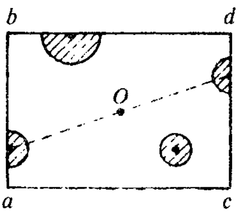

Рис. 44

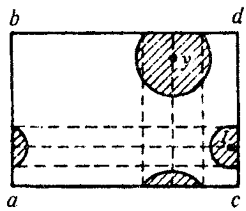

Рис. 45

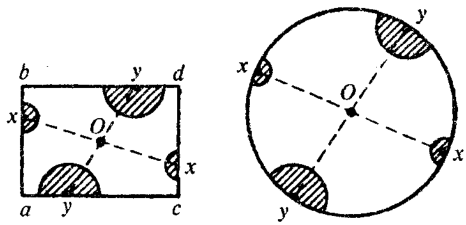

Рис. 46

Наконец, в последнем примере получаем проективную плоскость, элементы ее базы топологии изображены на рис. 46. Здесь сегменты склеиваются по диаметрально противоположным точкам своих оснований как на вертикальных, так и на горизонтальных краях прямоугольника.

Приведем еще один полезный пример образования факторпространства. Пусть $X \subset Y$ — подпространство топологического пространства X. Объявим все точки Y эквивалентными между собой, а точки $x \in X \setminus Y$ — эквивалентными самим себе. Факторпространство по этой эквивалентности обозначают X/Y, а проекцию $\pi\colon X \to X/Y$ называют *склеиванием множества* Y в точку. Например,

$S^1 = I/\{0, 1\}$ — факторпространство отрезка $I = [0, 1]$ по множеству концевых точек.

3. Отображения факторпространств. Пусть X, X' — топологические пространства и R, R' — эквивалентности в них. Рассмотрим отображение f: $X \to X'$. Будем говорить, что отображение f *сохраняет эквивалентность*, если из $x \overset{R}{\sim} y$ следует $f(x) \overset{R'}{\sim} f(y)$. Для таких отображений естественно определяется отображение $\hat{f}$: $X/R \to X'/R'$ факторпространств следующим образом: пусть D_α — класс эквивалентности в X' и $x \in D_\alpha$ — любой элемент, D'_β — класс эквивалентности в X', содержащий точку $f(x)$; тогда $\hat{f}(D_\alpha) = D'_\beta$.

Упражнение 3°. Покажите, что отображение $\hat{f}$ определено корректно. Отображение $\hat{f}$ называют *фактороотображением*.

Теорема 2. *Если непрерывное отображение f: $X \to X'$ сохраняет эквивалентность, то соответствующее ему фактороотображение $\hat{f}$: $X/R \to X'/R'$ непрерывно.*

Доказательство. Обозначим через π, π' проекции пространств X, X' на соответствующие факторпространства. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\pi'} \\ X/R & \xrightarrow{\hat{f}} & X'/R' \end{array}$$

коммутативна, т. е. для каждого $x \in X$ имеем $(\hat{f}\pi)(x) = (\pi' f)(x)$. Если множество V открыто в X'/R', то $(\pi' f)^{-1}(V)$ открыто в X, так как $\pi' f$ непрерывно. Но $(\hat{f}\pi)^{-1}(V) = (\pi' f)^{-1}(V)$, следовательно, множество $(\hat{f}\pi)^{-1}(V)$ открыто в X. Поскольку $(\hat{f}\pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(V))$, то множество $\hat{f}^{-1}(V)$ открыто в X/R (по определению топологии факторпространства), и, следовательно, $\hat{f}$ непрерывно. ∎

Сформулируем признак гомеоморфности факторпространств.

Теорема 3. *Если f: $X \to X'$ — гомеоморфизм и отображения f, f^{-1} сохраняют эквивалентность, то фактороотображение $\hat{f}$: $X/R \to X'/R'$ является гомеоморфизмом.*

Действительно, в этом случае отображение f^{-1} определяет фактороотображение $\widehat{f^{-1}} = (\hat{f})^{-1}$ (проверьте!) и можно применить теорему 2 как к $\hat{f}$, так и к $(\hat{f})^{-1}$.

К перечисленным в § 3 гл. I «моделям» проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ добавим еще три. Первая получается из сферы $X = S^2$, на которой склеиваются диаметрально противоположные точки (рис. 47). Вторая состоит из элементов — прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через точку нуль ($x \overset{R}{\sim} y \Leftrightarrow x, y$ лежат на одной такой прямой и $x \neq 0$, $y \neq 0$) (рис. 47).

Упражнение 4°. Опишите топологию полученных пространств как топологию факторпространств S^2/R и $(\mathbb{R}^3\setminus 0)/R$ соответственно.

Третья модель $\mathbb{R}P^2$ состоит в следующем. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ произвольную плоскость, P, не проходящую через начало координат. Зафиксируем на P точку a — проекцию на P начала координат в $\mathbb{R}^3$. Согласно только что рассмотренной второй модели $\mathbb{R}P^2$ это пространство состоит из прямых в $\mathbb{R}^3$, проходящих через начало. Сопоставим каждой такой прямой точку пересечения ее с плоскостью P (если она пересекает P) или же прямую в P, проходящую через точку a, параллельную данной. Полученную прямую на плоскости P символически отождествим с бесконечно удаленной точкой, в которой пересекаются эти параллельные прямые.

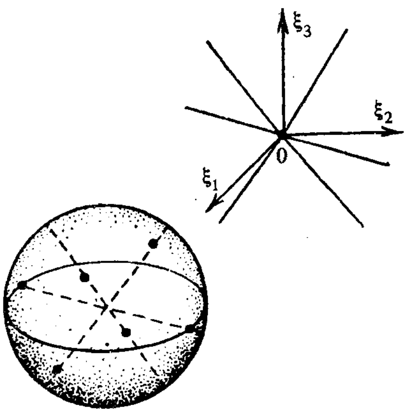

Рис. 47

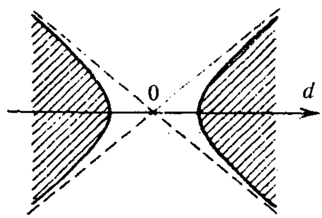

Рис. 48

Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{R}P^2$ (второй моделью) и плоскостью P с присоединенными к ней бесконечно удаленными точками, по одной на каждое направление (прямую, проходящую через начало) в P. В полученном множестве плоскость P рассматривается с обычной топологией; *окрестность бесконечно удаленной точки*, соответствующей какому-нибудь направлению d на P, определяется как часть плоскости P (заштрихованная на рис. 48), ограниченная произвольной гиперболой с осью d. Множество всех бесконечно удаленных точек, присоединенных к плоскости P, называют также *абсолютом* или *бесконечно удаленной прямой.*

Упражнение 5°. Докажите гомеоморфизм всех реализаций $\mathbb{R}P^2$.

Рассмотрим замкнутый диск $\overline{D}^n$ и его край S^{n-1}. Отождествим все точки края. Полученное факторпространство обозначим $\overline{D}^n/S^{n-1}$.

Теорема 4. *Пространство* $\overline{D}^n/S^{n-1}$ *гомеоморфно сфере* S^n.

Доказательство. В п. 3 § 2 было показано, что диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен замкнутой полусфере $\overline{S}^n_+$. Этот гомеоморфизм тождествен на общем краю (S^{n-1}) этих множеств, следовательно, в $\overline{S}^n_+$ индуцируется отношение эквивалентности из $\overline{D}^n$ и согласно последней теореме $\overline{D}^n/S^{n-1}$ гомеоморфно $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$.

Покажем, что $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$ гомеоморфно S^n. Имеется естественное включение: $\overline{S}^n_+ \to S^n$. Обозначим южный полюс $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ сферы S^n через $*$. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение $\varphi\colon \overline{S}^n_+ \to S^n$ такое, что $\varphi(S^{n-1}) = *$ и $\varphi\big|_{S^n_+}\colon S^n_+ \to S^n \setminus \{*\}$ — гомеоморфизм. Его можно построить, например, так: если $x \in \overline{S}^n_+$ и $x \neq N$ (N — северный полюс), то через точки 0, N, x проводим двумерную плоскость, пересекающую S^n по окружности (меридиану); сдвинем x по меридиану на дугу, вдвое большую, чем дуга $\smile{xN}$, получим точку $\varphi(x)$; положим $\varphi(N) = N$. Определено факторотображение

$$\widehat{\varphi}\colon\ \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n/\{*\} = S^n,$$

которое, очевидно, является гомеоморфизмом.

Произведение двух гомеоморфизмов,

$$\overline{D}^n/S^{n-1} \to \overline{S}^n_+/S^{n-1}, \qquad \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n,$$

и будет искомым гомеоморфизмом. ∎

§ 4. Классификация поверхностей

1. Поверхности и их триангуляция. Вернемся к изучению замкнутых поверхностей. Данные выше определения топологического пространства, факторпространства, гомеоморфизма топологических пространств, рассмотренные примеры создают твердую базу для доказательства упомянутой в § 3 гл. I теоремы о том, что всякая замкнутая поверхность топологически эквивалентна одной из поверхностей вида M_p или N_q, т. е. сфере с приклеенными p ручками или q листами Мёбиуса. Здесь будут уточнены соответствующие понятия и дано доказательство вышеупомянутой теоремы.

Топологическое пространство X, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу, назовем *двумерным многообразием*. Удобно изучать такие пространства, разбивая их на элементарные куски, топологически эквивалентные треугольникам двумерной евклидовой плоскости. Уточним это представление.