Теорема 4. *Пространство* $\overline{D}^n/S^{n-1}$ *гомеоморфно сфере* S^n.

Доказательство. В п. 3 § 2 было показано, что диск $\overline{D}^n$ гомеоморфен замкнутой полусфере $\overline{S}^n_+$. Этот гомеоморфизм тождествен на общем краю (S^{n-1}) этих множеств, следовательно, в $\overline{S}^n_+$ индуцируется отношение эквивалентности из $\overline{D}^n$ и согласно последней теореме $\overline{D}^n/S^{n-1}$ гомеоморфно $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$.

Покажем, что $\overline{S}^n_+/S^{n-1}$ гомеоморфно S^n. Имеется естественное включение: $\overline{S}^n_+ \to S^n$. Обозначим южный полюс $(0, 0, \ldots, 0, -1)$ сферы S^n через $*$. Тогда существует непрерывное сюръективное отображение $\varphi: \overline{S}^n_+ \to S^n$ такое, что $\varphi(S^{n-1}) = *$ и $\varphi\big|_{S^n_+}: S^n_+ \to S^n \setminus \{*\}$ — гомеоморфизм. Его можно построить, например, так: если $x \in \overline{S}^n_+$ и $x \neq N$ (N — северный полюс), то через точки 0, N, x проводим двумерную плоскость, пересекающую S^n по окружности (меридиану); сдвинем x по меридиану на дугу, вдвое большую, чем дуга $\smile{xN}$, получим точку $\varphi(x)$; положим $\varphi(N) = N$. Определено факторотображение

$$\widehat{\varphi}: \quad \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n/\{*\} = S^n,$$

которое, очевидно, является гомеоморфизмом.

Произведение двух гомеоморфизмов,

$$\overline{D}^n/S^{n-1} \to \overline{S}^n_+/S^{n-1}, \qquad \overline{S}^n_+/S^{n-1} \to S^n,$$

и будет искомым гомеоморфизмом. ■

§ 4. Классификация поверхностей

1. Поверхности и их триангуляция. Вернемся к изучению замкнутых поверхностей. Данные выше определения топологического пространства, факторпространства, гомеоморфизма топологических пространств, рассмотренные примеры создают твердую базу для доказательства упомянутой в § 3 гл. I теоремы о том, что всякая замкнутая поверхность топологически эквивалентна одной из поверхностей вида M_p или N_q, т. е. сфере с приклеенными p ручками или q листами Мёбиуса. Здесь будут уточнены соответствующие понятия и дано доказательство вышеупомянутой теоремы.

Топологическое пространство X, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому кругу, назовем *двумерным многообразием*. Удобно изучать такие пространства, разбивая их на элементарные куски, топологически эквивалентные треугольникам двумерной евклидовой плоскости. Уточним это представление.

Определение 1. *Топологическим треугольником* в X будем называть пару (T, φ), где T — подпространство в X, а $\varphi: \Delta \to T$ — гомеоморфизм некоторого треугольника $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ на T.

Если гомеоморфизм $\varphi: \Delta \to T$ зафиксирован (и когда это не может привести к недоразумению), для сокращения речи мы будем называть топологическим треугольником подпространство $T \subset X$. Образы вершин, сторон треугольника Δ (вместе с сужением гомеоморфизма φ) называются соответственно *вершинами*, *ребрами* топологического треугольника T. Для единообразия удобно и стороны треугольника Δ называть ребрами.

Определим ориентацию треугольника. Из вершин Δ можно образовать различные упорядоченные тройки точек. Считаем, что две тройки эквивалентны, если одна получается из другой циклической перестановкой. Ясно, что классов эквивалентности получается ровно два. *Треугольник Δ ориентирован*, если фиксирован один из этих классов эквивалентности. *Топологический треугольник (T, φ) ориентирован*, если ориентирован треугольник Δ. Очевидно, что ориентация треугольника Δ равнозначна заданию определенного направления обхода его вершин (по часовой или против часовой стрелки). Это направление обхода с помощью гомеоморфизма φ определяет направление обхода вершин топологического треугольника — индуцированную гомеоморфизмом φ ориентацию. Ориентация треугольника задает, очевидно, ориентации его ребер (как упорядоченные пары вершин).

Заметим для дальнейшего, что совершенно аналогично определяется ориентация n-угольника и его ребер при $n > 3$ (заданием направления обхода вершин).

Определение 2. *Триангуляцией* двумерного многообразия называется конечное множество $K = \{(T_i, \varphi_i)\}_{i=1}^{k}$ топологических треугольников в X, удовлетворяющее свойствам: 1) $X = \bigcup\limits_{i=1}^{k} T_i$; 2) пересечение любой пары треугольников из K либо пусто, либо совпадает с их общей вершиной или общим ребром.

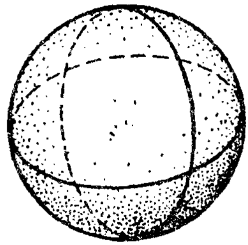

Рис. 49

Многообразие, для которого существует триангуляция, называется *триангулируемым*. Если любые две вершины треугольников из K можно соединить путем, составленным из ребер, то X назовем связным.

На рис. 49 изображен пример триангуляции сферы S^2, состоящей из восьми треугольников.

Определение 3. *Замкнутой поверхностью* будем называть связное триангулируемое двумерное многообразие.

Заметим, что рассматривавшиеся в § 3 гл. I примеры замкнутых поверхностей, триангулируемых на топологические многоугольники, являются примерами замкнутых поверхностей в смысле определения 3 (чтобы в этом убедиться, достаточно триангулировать многоугольники).

Упражнение 1°. Постройте триангуляции тора и проективной плоскости. Убедитесь, что они являются замкнутыми поверхностями.

Топологические свойства замкнутой поверхности определяются строением ее триангуляции. Для изучения последней удобно рассмотреть ее схематическое представление на плоскости. При этом можно считать, что плоские треугольники Δ_i — прообразы треугольников $T_i \subset K$ — лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Опишем такое представление. Пусть (T_i, φ_i), (T_j, φ_j) — треугольники из K и $T_i \cap T_j = a$ — их общее ребро; пусть $a_i = \varphi_i^{-1}(a)$, $a_j = \varphi_j^{-1}(a)$ — соответствующие ему ребра в Δ_i, Δ_j. Определен склеивающий гомеоморфизм

$$\varphi_{ij} = \varphi_j^{-1}\Big|_a \circ \varphi_i\Big|_{a_i}\colon\ a_i \to a_j.$$

Таким образом, триангуляции K можно сопоставить систему $\Delta = (\{\Delta_i\}_{i=1}^k, \{\varphi_{ij}\})$ треугольников плоскости вместе с гомеоморфизмами φ_{ij} для соответствующих пар ребер. Объявим в $\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i$ эквивалентными точки, соответствующие друг другу при гомеоморфизмах φ_{ij}. Обозначим указанную эквивалентность через R.

Лемма. *Факторпространство* $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i\right)\Big/R$ *гомеоморфно поверхности* X.

Доказательство. Гомеоморфизмы $\varphi_i\colon \Delta_i \to T_i$ естественно задают сюръективное отображение $\Phi\colon \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i \to X$, причем прообраз $\Phi^{-1}(x)$ для любого $x \in X$ есть в точности класс R-эквивалентности. Фактоотображение $\overline{\Phi}\colon \left(\bigcup\limits_{i=1}^{k} \Delta_i\right)\Big/R \to X$ является непрерывным отображением по теореме 2 § 3. Очевидно, что оно биективно и обратное к нему отображение $\overline{\Phi}^{-1}$ непрерывно. ■

2. Развертка поверхности. В дальнейшем нам понадобятся системы, аналогичные системе Δ, схематически представляющей триангуляцию K поверхности X, но такие, что вместе с треугольниками в них могут входить и n-угольники ($n > 3$).

Определение 4. *Разверткой* называется система $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$, где $\{Q_i\}$ — конечный набор непересекающихся плоских многоугольников, а $\{\varphi_{ij}\}$ — конечный набор склеивающих гомеоморфизмов пар ребер многоугольников из набора $\{Q_i\}$, причем каждое ребро склеивается только с одним ребром; допускается склейка ребер одного многоугольника.

В частности, система $\Delta = (\{\Delta_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ является разверткой; говорят, что Δ — развертка поверхности X, связанная с триангуляцией K.

Заметим, что если положение многоугольника Q_i на плоскости меняется при помощи некоторого гомеоморфизма α_i, то естественно определяются и новые гомеоморфизмы $\{\alpha_j \varphi_i \alpha_i^{-1}\}$ склейки его ребер, которые мы в дальнейшем не будем отличать от гомеоморфизмов $\{\varphi_{ij}\}$.

Для произвольной развертки Q рассмотрим факторпространство $\hat{Q}$ объединения $\bigcup\limits_i Q_i$ по эквивалентности R, определяемой гомеоморфизмами $\{\varphi_{ij}\}$, $\hat{Q} = \left(\bigcup\limits_i Q_i \right) / R$. Будем называть $\hat{Q}$ факторпространством развертки Q. Очевидно, факторпространство развертки — двумерное многообразие; оно допускает триангуляцию, порождаемую достаточно мелкой триангуляцией многоугольников Q_i. Таким образом, если факторпространство $\hat{Q}$ связно, то оно является замкнутой поверхностью (в дальнейшем рассматриваются только такие $\hat{Q}$). Будем называть Q в этом случае *разверткой поверхности* $\hat{Q}$.

Факторотображение индуцирует разбиение поверхности $\hat{Q}$ на образы многоугольников, образы ребер (ребра разбиения), образы вершин (вершины разбиения); разбиение, вообще говоря, не является триангуляцией.

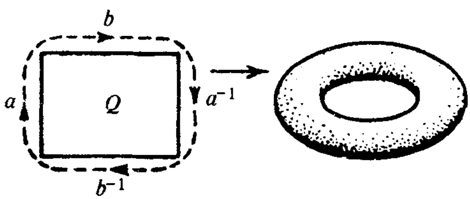

Рис. 50

На рис. 50 изображена развертка тора, представленная многоугольником. Стрелка и обозначения его ребер указывают закон склеивания тора.

В дальнейшем многоугольники развертки будем ориентировать, фиксируя какие-то ориентации каждого из них. Ориентации многоугольников задают соответствующие ориентации ребер. При склеивающем гомеоморфизме φ_{ij}: $a_i \to a_i$ двух ребер ребро a_i получает индуцированную (из ориентации ребра a_i) гомеоморфизмом φ_{ij}

ориентацию, которая, вообще говоря, может отличаться от ориентации ребра a_j.

Развертка Q называется *ориентируемой*, если при одинаковой ориентации всех ее многоугольников (например, обход вершин против часовой стрелки) гомеоморфизмы склейки ребер индуцируют в ребре-образе ориентацию, противоположную заданной. В противном случае (т. е. если хотя бы в одном ребре ориентация совпадает с индуцированной) развертку называют неориентируемой.

Поверхность X называется *ориентируемой* (*неориентируемой*) в соответствии с ориентируемостью (неориентируемостью) ее развертки.

3. Классификация разверток.

Определение 5. Две развертки, Q и Q', называются *эквивалентными*, если их факторпространства гомеоморфны.

Введем некоторые элементарные операции над разверткой, которые преобразуют ее в эквивалентную.

Подразделение. Пусть в развертке Q имеется n-угольник Q_i ($n > 3$). Проведем в нем какую-нибудь диагональ d, которая разбивает Q_i на два многоугольника, Q_i' и Q_i''. Раздвинем многоугольники Q_i' и Q_i'' и построим из Q новую развертку $\tilde{Q}$, заменив многоугольник Q_i на два многоугольника, Q_i' и Q_i''. При этом два новых ребра, d' и d'', — копии диагонали d — свяжем естественным гомео-

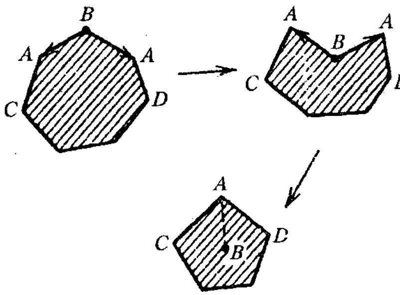

Рис. 51

морфизмом отождествления, а гомеоморфизмы старых ребер сохраним. Развертка $\tilde{Q}$ называется *подразделением развертки* Q; очевидно, что Q и $\tilde{Q}$ эквивалентны.

Склеивание (укрупнение). Эта операция обратна первой. Два многоугольника, Q_i' и Q_i'', развертки Q склеиваются в один многоугольник Q_i по одному из гомеоморфизмов их ребер d' и d''; гомеоморфизмы остальных ребер Q_i' и Q_i'' индуцируют гомеоморфизмы ребер многоугольника Q_i.

Свертывание. Пусть в многоугольнике Q_i развертки Q склеиваются два соседних ребра с противоположными ориентациями. «Склеив» эти ребра, получим развертку $\tilde{Q}$, содержащую вместо Q_i

многоугольник, число вершин которого на два меньше, чем у Q_i; набор гомеоморфизмов развертки $\tilde{Q}$ на один меньше, чем у Q (рис. 51).

Подчеркнем, что описанные операции сохраняют класс эквивалентности развертки (убедитесь!).

Для удобства дальнейшего изложения мы будем описывать каждую развертку набором специальных слов-символов по следующему правилу. Пусть $Q = (\{Q_i\}, \{\varphi_{ij}\})$ — некоторая развертка. Зафиксируем для каждого многоугольника развертки какую-нибудь ориентацию (для определенности будем считать, что для всех многоугольников развертки фиксировано направление обхода по часовой стрелке). Обозначим ребра многоугольников развертки Q буквами так, чтобы склеиваемые между собой ребра многоугольников были обозначены одинаковыми буквами, а не склеиваемые — разными. Порядок склеивания ребер, задаваемый гомеоморфизмами φ_{ij}, будем указывать на рисунках с помощью стрелок, задав стрелками направления склеиваемых ребер так, чтобы начало одного ребра склеиваемой пары склеивалось с началом другого, а конец — с концом (при этом направление одного из ребер каждой склеиваемой пары можно задавать произвольно, направление другого определяется однозначно соответствующим гомеоморфизмом склейки φ_{ij}). Таким образом мы ориентируем все ребра многоугольников развертки, которые склеиваются с другими ребрами. При этом может оказаться, что ориентация некоторых ребер не совпадает с ориентацией, задаваемой фиксированным обходом многоугольников. К буквенным обозначениям таких ребер добавим показатель -1. Так же, как в § 3 гл. I, запишем последовательно обозначения ребер одного многоугольника Q_i в слово $\omega(Q_i)$, обходя последовательно ребра в заданном направлении. Слово $\omega(Q_i)$ характеризует схему «приклеивания» многоугольника Q_i в развертке Q, а набор слов для всех многоугольников развертки Q характеризует развертку Q.

Выделяют два основных типа разверток.

Определение 6. *Канонической разверткой* I *типа* называется развертка, состоящая из одного многоугольника, определяемого словом вида aa^{-1} или вида

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1} \ldots a_mb_ma_m^{-1}b_m^{-1}, \qquad m > 0.$$

Определение 7. *Канонической разверткой* II *типа* называется развертка, состоящая из одного многоугольника со словом вида $a_1a_1a_2a_2 \ldots a_ma_m$, $m > 0$.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Всякая развертка эквивалентна канонической развертке* I *или* II *типа в соответствии с ее ориентируемостью или неориентируемостью.*

Доказательство. Сделаем вначале два замечания. Во-первых, легко видеть, что с помощью укрупнений всегда можно перейти от развертки, соответствующей триангуляции K поверхности X, к развертке, состоящей из одного многоугольника. Поэтому везде ниже рассматриваются только такие развертки. Во-вторых, если в слове развертки, отличном от aa^{-1}, имеются все же сочетания вида aa^{-1}, то от них можно последовательно избавляться с помощью операции свертывания по общей вершине A ребер a и a^{-1}. Слово новой развертки получается из слова старой вычеркиванием сочетания aa^{-1}.

В результате придем либо к слову из двух букв (aa^{-1} или aa), либо к слову не менее, чем из четырех букв, в котором нет сочетаний вида aa^{-1} (напомним, что поверхность замкнута). И так как слова aa, aa^{-1} описывают каноническую развертку, то дальнейшему анализу подлежит лишь последний случай.

Разобьем этот анализ на ряд шагов.

1) От полученной развертки Q' можно перейти к такой, у которой все вершины эквивалентны, т. е. склеиваются при факторизации. В самом деле, предположим, что в Q' есть неэквивалентные вершины. Тогда в Q найдется ребро a, концы A, B которого не эквивалентны. Пусть b — другое ребро, примыкающее к вершине B, со второй вершиной C. Соединим A с C диагональю d. В этом случае ребро b', с которым обязано склеиваться ребро b, найдется вне треугольника ABC. Иначе либо $b = a$, либо $b = a^{-1}$, что противоречило бы неэквивалентности вершин A и B или отсутствию сочетаний вида aa^{-1}. Применим теперь операцию подразделения по диагонали d, а затем операцию укрупнения по ребру b (склеим его с ребром b'). В полученной развертке P' множество вершин, эквивалентных A, стало на одну больше, а множество вершин, эквивалентных B, — на одну меньше (рис. 52). Если при этом в слове развертки P' появились сочетания вида aa^{-1}, то уберем их с помощью операции свертывания. При этом следует отметить, что последняя перестройка не может изменить разности между множеством вершин, эквивалентных B, и множеством вершин, эквивалентных A (проверьте!).

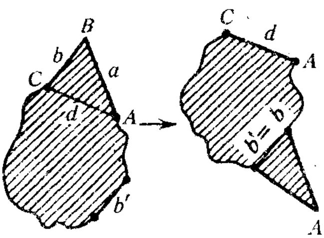

Рис. 52

Далее, если остались еще вершины, не эквивалентные A, то повторяем весь описанный прием, пока не получим развертку с искомым свойством.

Таким образом, в дальнейшем можно считать, что в рассматриваемой развертке все вершины эквивалентны и в ее слове нет сочетаний вида aa^{-1}.

2) Покажем теперь, что две одинаковые буквы в слове развертки можно всегда поставить рядом. В самом деле, пусть буквы a и a не стоят рядом. Проведем тогда в многоугольнике диагональ d, соединяющую начала ребер a и a. Сделаем подразделение по d и затем укрупнение по a. В новом слове буквы a, как видно, уже не будет,

но появится сочетание dd, чего мы и добивались (рис. 53). (Нетрудно проверить, что результаты первого шага сохраняются.)

Точно так же поступаем с другими одинаковыми буквами, не стоящими рядом.

Отметим при этом, что, выполняя описанный прием, мы не разделяем других сочетаний вида aa, поскольку отделяются лишь ребра, соседние с ребром a, которые заведомо ему не эквивалентны.

3) Считая условия 1), 2) шагов выполненными, покажем, что если буквы a и a^{-1} в слове не стоят рядом, то найдутся еще буквы b, b^{-1} такие, что пары a, a^{-1} и b, b^{-1} разделяют друг друга (рис. 54).

Будем рассуждать от противного. Если такой пары b, b^{-1} нет, то между a и a^{-1} содержатся только сочетания вида cc. Но такая ситуация противоречит эквивалентности всех вершин развертки, так как она возможна лишь при условии, что вершины A, B ребра a не эквивалентны (рис. 55).

4) Таким образом, в слове развертки есть две пары: a, a^{-1} и b, b^{-1}, разделяющие друг друга. Покажем, что эту четверку можно заменить на сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$, сохраняя условия шагов 1), 2). Соединим начала ребер a и a^{-1} диагональю x и проведем по ней подразделение и затем укрупнение по ребру b (рис. 56). В полученном многоугольнике соединим концы ребер x и x^{-1} диагональю y и снова проведем подразделение по y и затем укрупнение по a (рис. 57).

Получена развертка, в слове которой вместо букв a, b, a^{-1}, b^{-1} появилось сочетание $xyx^{-1}y^{-1}$. Если при этих операциях возникнут сочетания вида cc^{-1}, то они устраняются свертыванием, а сочетания вида dd и $cdc^{-1}d^{-1}$ не разрываются. Таким образом, сохраняются условия, достигнутые на шагах 1) и 2).

В результате применения конструкций шагов 1)—4) мы преобразовали исходное слово к слову, состоящему из сочетаний вида $xyx^{-1}y^{-1}$ и aa. Если сочетаний вида aa в слове нет, то это каноническая развертка I типа.

5) Если одновременно имеются сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ и aa, то слово приводится к каноническому виду II типа следующим образом. Соединяем диагональю d общую вершину ребер a и a с общей вершиной ребер y и x^{-1}, производим подразделение по d и укрупнение по a (рис. 58). Получившиеся две пары разделенных ребер x и x, y и y превращаем в сочетания zz, ww применением операции шага 2) (рис. 59, 60); после этих операций появляется разделенная пара d^{-1}, d^{-1}, которую снова применением операции шага 2) превращаем в сочетание vv (рис. 60). Получаем слово требуемого канонического вида.

Таким образом, пара сочетаний $xyx^{-1}y^{-1}$, aa заменяется в слове сочетанием трех пар вида aa. При этом не нарушаются другие сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ или aa. Процесс можно повторить до полного исчезновения сочетаний вида $xyx^{-1}y^{-1}$. ■

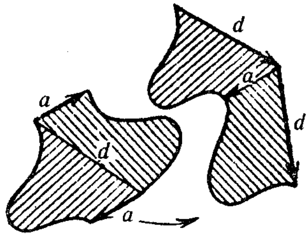

Рис. 53

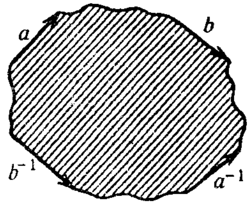

Рис. 54

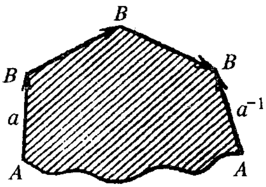

Рис. 55

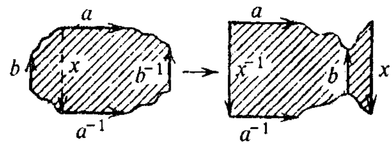

Рис. 56

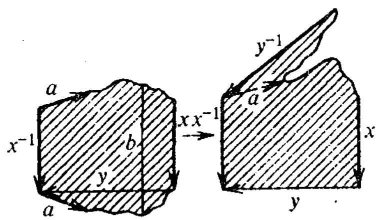

Рис. 57

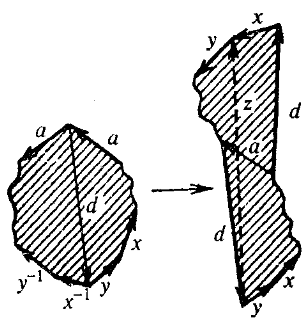

Рис. 58

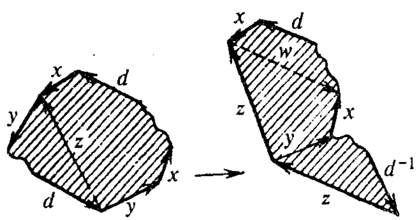

Рис. 59

Упражнение 2°. Убедитесь, что две замкнутых поверхности, X и X', развертки которых эквивалентны каноническим одного типа и с одним и тем же числом m, гомеоморфны.

4. Эйлерова характеристика и топологическая классификация поверхностей. Обратимся к геометрической интерпретации только что доказанной теоремы. В § 3 гл. I было показано, что сочетания вида $xyx^{-1}y^{-1}$ в слове канонической развертки поверхности X соответствуют ручке, а сочетание вида aa — листу Мёбиуса, приклеенным к остальной части поверхности X по своему краю. Таким образом, принадлежность канонической развертки поверхности к I и II типам означает, что эта поверхность склеена из конечного числа ручек или из конечного числа листов Мёбиуса соответственно. Такую склейку нетрудно представить как результат приклеивания этих ручек или листов Мёбиуса к сфере S^2.

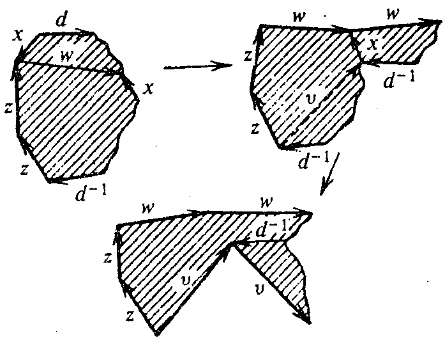

Рис. 60

Итак, мы видим, что поверхность с канонической разверткой I типа есть ориентируемая поверхность типа M_p, где p — число приклеенных к сфере ручек (*род поверхности*). Если же каноническая развертка поверхности принадлежит ко II типу, то это неориентируемая поверхность типа N_q, $q \geqslant 1$, где q — число приклеенных к сфере листов Мёбиуса (также *род поверхности*).

В процессе доказательства теоремы было также показано, что если к сфере приклеено p ручек и $q \geqslant 1$ листов Мёбиуса одновременно, то полученная поверхность неориентируема и имеет тип N_{2p+q}.

Теорема о классификации разверток позволяет сделать вывод о том, что любая замкнутая поверхность гомеоморфна некоторой поверхности типа M_p, N_q. Для уточнения этого результата рассмотрим эйлерову характеристику нашей поверхности. Пусть в разбиении поверхности X имеется a_0 вершин, α_1 ребер и α_2 образов многоугольников. Число $\chi(X) = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2$ назовем *эйлеровой характеристикой* поверхности. Очевидно, это определение обобщает данное ранее (см. § 3 гл. I), так как теперь образ многоугольника, например, не является обязательно топологическим многоугольником (возможно склеивание сторон одного многоугольника).

Если X имеет тип M_p и P — его каноническая развертка со словом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$, то, очевидно, $\alpha_0=1$, $\alpha_1=2p$, $\alpha_2=1$ и $\chi(X)=2-2p$.

Если X имеет тип N_q и $a_1a_1a_2a_2\ldots a_qa_q$ — слово его канонической развертки, то $\alpha_0=1$, $\alpha_1=q$, $\alpha_2=1$ и $\chi(X)=2-q$.

Если Q — произвольная развертка поверхности X, то с помощью элементарных операций она преобразуется в каноническую развертку. Легко заметить, что элементарные операции не меняют $\chi(X)$. В самом деле, при подразделении числа α_1 и α_2 увеличиваются на 1, а α_0 не меняется; при укрупнении α_1 и α_2 уменьшаются на 1 при неизменном α_0; при свертывании α_0 и α_1 уменьшаются на 1. Следовательно, альтернированная сумма $\alpha_0-\alpha_1+\alpha_2$ не меняется. Отсюда следует важный вывод: каноническая развертка P не зависит от выбора элементарных преобразований развертки Q. Действительно, если бы Q приводилась к двум каноническим разверткам P, P', например, I типа

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1} \quad \text{и} \quad \tilde{a}_1\tilde{b}_1\tilde{a}_1^{-1}\tilde{b}_1^{-1}\ldots\tilde{a}_{p_1}\tilde{b}_{p_1}\tilde{a}_{p_1}^{-1}\tilde{b}_{p_1}^{-1},$$

то эйлерова характеристика, вычисленная по разбиению Q, совпадала бы с результатом вычисления ее по разбиениям P, P', и мы имели бы равенство $2-2p=2-2p_1$, откуда $p=p_1$, т. е. совпадение слов для P и P'. Аналогичное рассуждение приводится в случае разверток P, P' II типа.

Если же P — развертка I типа, а P' — II типа, то равенство $2-2p=2-q$ возможно при $q=2p$. Поэтому вышеприведенное рассуждение устанавливает лишь невозможность иметь для развертки два канонических вида I и II типов с p и $q\neq 2p$. Общее заключение о невозможности одновременного приведения развертки к каноническим видам I и II типов следует из сохранения свойства ориентируемости (или неориентируемости) развертки при элементарных преобразованиях (проверьте!).

В итоге нами доказана первая часть следующей центральной теоремы о топологической классификации поверхностей.

Теорема 2. *Всякая замкнутая поверхность топологически эквивалентна поверхности типа M_p или N_q. Поверхности типов M_p и N_q, $q\geqslant 1$, топологически не эквивалентны, если p, q не равны нулю одновременно; поверхности $M_p(N_q)$ при различных значениях $p(q)$* также топологически не эквивалентны.

Вторая часть теоремы была объяснена в § 3 гл. I (п. 4) и выше. Это объяснение можно было бы считать доказательством, если бы были доказаны топологическая инвариантность эйлеровой характеристики $\chi(X)$ для произвольной замкнутой поверхности X (это доказано было только для случая $X=S^2$) и негомеоморфность M_p и

N_q при $q=2p$, $p>0$. Эти факты будут установлены в § 4 гл. III на основе понятия фундаментальной группы пространства.

Упражнения. 3°. Изобразите схему склеивания поверхности, каноническая развертка которой имеет слово

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_3b_3a_3^{-1}b_3^{-1}.$$

4°. Нарисуйте схему склеивания поверхности, характеризующейся словом $a_1a_1a_2a_2a_3a_3$. Укажите тип и род этой поверхности.

5°. Убедитесь, что следующие замкнутые поверхности имеют указанный тип и род:

1) сфера — $M_0=N_0$;

2) тор (сфера с одной ручкой) — M_1;

3) крендель (сфера с двумя ручками) — M_2;

4) проективная плоскость — N_1;

5) бутылка Клейна — N_2.

Нарисуйте схемы их разбиений.

6°. *Одномерным многообразием* M^1 назовем топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому интервалу числовой оси. *Триангуляцией* M^1 назовем разбиение его *на дуги* — топологические образы отрезка $[0, 1]$, примыкающие друг к другу по своим концам (вершинам); предполагаем, что M^1 состоит из конечного числа дуг. Докажите, что триангулируемое многообразие M^1 гомеоморфно окружности S^1 или нескольким ее экземплярам.

§ 5. Пространства орбит; проективные и линзовые пространства

1. Определение пространства орбит. Рассмотрим важные примеры факторпространств, возникающие при действии групп на топологических пространствах.

Пусть $H(X)$ — множество всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя. Определено произведение двух гомеоморфизмов, h_1 и h_2: $(h_1h_2)(x)=h_2(h_1(x))$, для каждого $h\in H(X)$ имеется обратное отображение $h^{-1}\in H(X)$, причем $hh^{-1}=h^{-1}h=1_x$. Таким образом, $H(X)$ — группа по умножению (вообще говоря, не коммутативная) с единицей 1_x.

Определение 1. Будем говорить, что некоторая абстрактная группа G *действует* (*слева*) *на пространстве* X, если задан гомоморфизм группы G в группу $H(X)$.

Если G действует на X, то, следовательно, каждому $g\in G$ соответствует $h_g\in H(X)$: $g\mapsto h_g$; $g_1g_2\mapsto h_{g_1}h_{g_2}$; $g^{-1}\mapsto(h_g)^{-1}$; $1_G\mapsto 1_X$.