N_q при $q = 2p$, $p > 0$. Эти факты будут установлены в § 4 гл. III на основе понятия фундаментальной группы пространства.

Упражнения. 3°. Изобразите схему склеивания поверхности, каноническая развертка которой имеет слово

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} a_3 b_3 a_3^{-1} b_3^{-1}.$$

4°. Нарисуйте схему склеивания поверхности, характеризующейся словом $a_1 a_1 a_2 a_2 a_3 a_3$. Укажите тип и род этой поверхности.

5°. Убедитесь, что следующие замкнутые поверхности имеют указанный тип и род:

1) сфера — $M_0 = N_0$;

2) тор (сфера с одной ручкой) — M_1;

3) крендель (сфера с двумя ручками) — M_2;

4) проективная плоскость — N_1;

5) бутылка Клейна — N_2.

Нарисуйте схемы их разбиений.

6°. *Одномерным многообразием* M^1 назовем топологическое пространство, каждая точка которого имеет окрестность, гомеоморфную открытому интервалу числовой оси. *Триангуляцией* M^1 назовем разбиение его *на дуги* — топологические образы отрезка $[0, 1]$, примыкающие друг к другу по своим концам (вершинам); предполагаем, что M^1 состоит из конечного числа дуг. Докажите, что триангулируемое многообразие M^1 гомеоморфно окружности S^1 или нескольким ее экземплярам.

§ 5. Пространства орбит; проективные и линзовые пространства

1. Определение пространства орбит. Рассмотрим важные примеры факторпространств, возникающие при действии групп на топологических пространствах.

Пусть $H(X)$ — множество всех гомеоморфизмов топологического пространства X на себя. Определено произведение двух гомеоморфизмов, h_1 и h_2: $(h_1 h_2)(x) = h_2(h_1(x))$, для каждого $h \in H(X)$ имеется обратное отображение $h^{-1} \in H(X)$, причем $hh^{-1} = h^{-1}h = 1_X$. Таким образом, $H(X)$ — группа по умножению (вообще говоря, не коммутативная) с единицей 1_X.

Определение 1. Будем говорить, что некоторая абстрактная группа G *действует* (*слева*) *на пространстве* X, если задан гомоморфизм группы G в группу $H(X)$.

Если G действует на X, то, следовательно, каждому $g \in G$ соответствует $h_g \in H(X)$: $g \mapsto h_g$; $g_1 g_2 \mapsto h_{g_1} h_{g_2}$; $g^{-1} \mapsto (h_g)^{-1}$; $1_G \mapsto 1_X$.

Очевидно, что множество $\{h_g\}_{g \in G}$ — подгруппа группы $H(X)$.

Пусть $x \in X$ — произвольная точка; множество $\bigcup_{g \in G} h_g(x)$ называется ее *орбитой* и обозначается O_x.

Упражнение 1°. Покажите, что две орбиты, O_x, O_y, либо совпадают, либо не пересекаются.

Последнее утверждение позволяет ввести в X эквивалентность R: $x \overset{R}{\sim} y \iff O_x = O_y$, т. е. когда x, y принадлежат одной орбите.

Определение 2. Факторпространство X/R называется *пространством орбит группы* G и обозначается X/G.

Описанная конструкция образования факторпространств играет важную роль в современной топологии. Рассмотрим некоторые примеры.

2. Проективные пространства $\mathbb{R}P^n$, $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть каждой точке $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) \in S^n$ поставлена в соответствие диаметрально противоположная точка $Ax = (-\xi_1, \ldots, -\xi_{n+1}) \in S^n$. Отображение $A\colon S^n \to S^n$ является гомеоморфизмом и называется *центральной симметрией*. Очевидны соотношения $A = A^{-1}$, $A^2 = 1_{S^n}$. Следовательно, множество $\{A, 1_{S^n}\}$ является группой (по умножению), состоящей из двух элементов; она изоморфна группе (по сложению) $\mathbb{Z}_2$ вычетов по mod 2. Итак, определено действие $\mathbb{Z}_2$ на S^n.

Определение 3. Пространство $S^n/\mathbb{Z}_2$ называется *вещественным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{R}P^n$.

Таким образом, $\mathbb{R}P^n$ получено из S^n отождествлением диаметрально противоположных точек x, $-x$.

Рассмотрим множество $G = \mathbb{R}\backslash 0$ (все действительные числа, кроме нуля). Это группа по умножению. Зададим действие группы G на пространстве $X = \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}$:

$$h_\lambda(x) = \lambda x, \qquad \lambda \in G, \qquad x \in \mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\}.$$

Очевидно, O_x — множество всех точек прямой в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящей через 0 и x, кроме точки 0. Следовательно, $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/D$ — множество всех прямых в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящих через начало. Пространство $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$. Гомеоморфизм устанавливается соответствием: пара $(x, -x)$ соответствует прямой, проходящей через точки x, $-x$.

Упражнения. 2°. Опишите топологию факторпространства $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$ и убедитесь в гомеоморфности пространства $\mathbb{R}P^n$ и $(\mathbb{R}^{n+1}\backslash\{0\})/G$.

3°. Склеим диаметрально противоположные точки края диска $\bar{D}^n$. Покажите, что полученное факторпространство гомеоморфно $\mathbb{R}P^n$.

Рассмотрим теперь комплексное пространство $\mathbb{C}^{n+1}$. Пусть $G = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ — группа комплексных чисел по умножению. Она действует в $\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$ по правилу $h_\lambda(x) = \lambda x$, $\lambda \in G$, $x \in \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\}$. Следовательно, $(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/G$ можно отождествить с множеством всех комплексных прямых в $\mathbb{C}^{n+1}$, проходящих через нуль.

Определение 4. Пространство $(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/G$ называется *комплексным проективным пространством* и обозначается $\mathbb{C}P^n$.

Построим другую модель $\mathbb{C}P^n$. Рассмотрим в $\mathbb{C}^{n+1}$ единичную сферу $S^n_{\mathbb{C}} = \{x\colon |\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_{n+1}|^2 = 1\}$. На ней действует группа $G = \{e^{i\alpha}, 0 \leqslant \alpha < 2\pi\}$ по правилу

$$e^{i\alpha}x = (e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\alpha}\xi_2, \ldots, e^{i\alpha}\xi_{n+1}).$$

Эту группу G можно отождествить с единичной окружностью S^1 в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Тогда S^1 действует на координату $\xi_i \in \mathbb{C}$ и орбита точки ξ_i в $\mathbb{C}$ — окружность радиуса $|\xi_i|$, если $|\xi_i| \neq 0$. Следовательно, орбита $O_x = \{e^{i\alpha}x\}$ $(0 \leqslant \alpha < 2\pi)$ каждой точки $x \in S^n_{\mathbb{C}}$ — большой круг на $S^n_{\mathbb{C}}$. Но $S^n_{\mathbb{C}}$ можно отождествить с S^{2n+1} и O_x можно считать большим кругом на S^{2n+1}; следовательно, действие $G = S^1$ определено на S^{2n+1}. Таким образом, имеем гомеоморфизм $S^n_{\mathbb{C}}/S^1 \to S^{2n+1}/S^1$.

Установим теперь гомеоморфизм $(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/G \to S^n_{\mathbb{C}}/S^1$. Этот гомеоморфизм определим, сопоставив каждой комплексной прямой (точке $\mathbb{C}P^n$) тот большой круг на $S^n_{\mathbb{C}}$ (точку $S^n_{\mathbb{C}}/S^1$), по которому комплексная прямая пересекает $S^n_{\mathbb{C}}$. Суперпозиция

$$(\mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\})/G \to S^n_{\mathbb{C}}/S^1 \to S^{2n+1}/S^1$$

задает гомеоморфизм $\mathbb{C}P^n$ и S^{2n+1}/S^1.

3. Линзовые пространства. В конце п. 2 мы имели дело с группой S^1 комплексных чисел, по модулю равных 1, действующей в комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Рассмотрим конечные подгруппы группы S^1, которые, как известно, являются конечными циклическими группами и изоморфны аддитивным группам $\mathbb{Z}_k$ вычетов по mod k.

Пусть

$$\xi_j \mapsto e^{2\pi i \frac{k_{j-1}}{k}} \xi_j,$$

где k_{j-1} — некоторое целое число, $0 \leqslant k_{j-1} \leqslant k$. Тогда определено действие $\mathbb{Z}_k$ в $\mathbb{C}^{n+1}$ и в $S^n_{\mathbb{C}}$:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \left(e^{2\pi i \frac{1}{k}}\xi_1, e^{2\pi i \frac{k_1}{k}}\xi_2, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_{j-1}}{k}}\xi_j, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_n}{k}}\xi_{n+1}\right).$$

Определение 5. Пространство $S^n_{\mathbb{C}}/\mathbb{Z}_k$ при условии взаимной простоты всякого k_i с k называется *обобщенным линзовым пространством* и обозначается $L(k, k_1, \ldots, k_n)$. При $n = 1$ пространство $L(k, k_1)$ называется *линзовым пространством*.

Упражнения. 4°. Покажите, что при условии взаимной простоты всякого k_i с k каждая орбита описанного выше действия группы $\mathbb{Z}_k$ состоит из k точек.

5°. Покажите, что на обобщенном линзовом пространстве следующая формула определяет действие группы S^1:

$$e^{i\alpha}(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = \left(e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_1, \ldots, e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_{n+1}\right).$$

6°. Покажите, что $L(k, k_1, \ldots, k_n)/S^1 = \mathbb{C}P^n$.

§ 6. Операции над множествами в топологическом пространстве

В этом параграфе мы снова обратимся к изучению свойств топологических пространств и рассмотрим операции замыкания, выделения внутренней части и границы множества и тесно связанное с этими операциями понятие предельных и граничных точек. Все эти понятия обобщают известные понятия математического анализа.

1. Замыкание множества. Пусть (X, τ) — топологическое пространство.

Определение 1. *Замыканием* $\bar{A}$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Очевидны следующие утверждения.

1. Замыкание $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

2. Если A замкнуто, то $\bar{A} = A$. Замкнутое множество можно охарактеризовать через понятие предельных точек, определяемое ниже.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *предельной* для данного множества $A \subset X$, если в каждой окрестности $\Omega(x)$ точки x содержится хотя бы одна точка $x' \in A$, отличная от x.

Упражнение 1°. Убедитесь, что в этом определении можно ограничиться только открытыми окрестностями точки x.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1$ множества $A = \{n\}$, $B = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $C = (0, 1)$, $D = [0, 1]$.