где k_{j-1} — некоторое целое число, $0 \leqslant k_{j-1} \leqslant k$. Тогда определено действие $\mathbb{Z}_k$ в $\mathbb{C}^{n+1}$ и в $S^n_{\mathbb{C}}$:

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_{n+1}) \mapsto$$
$$\mapsto \left(e^{2\pi i \frac{1}{k}}\xi_1, e^{2\pi i \frac{k_1}{k}}\xi_2, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_{j-1}}{k}}\xi_j, \ldots, e^{2\pi i \frac{k_n}{k}}\xi_{n+1}\right).$$

Определение 5. Пространство $S^n_{\mathbb{C}}/\mathbb{Z}_k$ при условии взаимной простоты всякого k_i с k называется *обобщенным линзовым пространством* и обозначается $L(k, k_1, \ldots, k_n)$. При $n = 1$ пространство $L(k, k_1)$ называется *линзовым пространством*.

Упражнения. 4°. Покажите, что при условии взаимной простоты всякого k_i с k каждая орбита описанного выше действия группы $\mathbb{Z}_k$ состоит из k точек.

5°. Покажите, что на обобщенном линзовом пространстве следующая формула определяет действие группы S^1:

$$e^{i\alpha}(\xi_1, \ldots, \xi_{n+1}) = \left(e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_1, \ldots, e^{i\frac{\alpha}{k}}\xi_{n+1}\right).$$

6°. Покажите, что $L(k, k_1, \ldots, k_n)/S^1 = \mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

§ 6. Операции над множествами в топологическом пространстве

В этом параграфе мы снова обратимся к изучению свойств топологических пространств и рассмотрим операции замыкания, выделения внутренней части и границы множества и тесно связанное с этими операциями понятие предельных и граничных точек. Все эти понятия обобщают известные понятия математического анализа.

1. Замыкание множества. Пусть (X, τ) — топологическое пространство.

Определение 1. *Замыканием* $\bar{A}$ множества $A \subset X$ называется пересечение всех замкнутых множеств, содержащих A.

Очевидны следующие утверждения.

1. Замыкание $\bar{A}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее A.

2. Если A замкнуто, то $\bar{A} = A$. Замкнутое множество можно охарактеризовать через понятие предельных точек, определяемое ниже.

Определение 2. Точка $x \in X$ называется *предельной* для данного множества $A \subset X$, если в каждой окрестности $\Omega(x)$ точки x содержится хотя бы одна точка $x' \in A$, отличная от x.

Упражнение 1°. Убедитесь, что в этом определении можно ограничиться только открытыми окрестностями точки x.

Пример. Рассмотрим в $\mathbb{R}^1$ множества $A = \{n\}$, $B = \{1/n\}$, $n = 1, 2, \ldots$; $C = (0, 1)$, $D = [0, 1]$.

Множество A не имеет предельных точек, множество B имеет одну предельную точку 0, предельные точки множеств C и D заполняют весь отрезок $[0, 1]$.

Понятие предельной точки в топологическом пространстве является, как легко видеть, обобщением понятия предельной точки в анализе. Докажем несколько полезных утверждений, связанных с понятием предельных точек.

Теорема 1. *Множество $A \subset X$ замкнуто тогда и только тогда, когда оно содержит все свои предельные точки.*

Доказательство. Пусть A замкнуто, x — предельная точка A и $x \notin A$. Тогда x принадлежит открытому множеству $\Omega(x) = X \setminus A$, являющемуся окрестностью точки x. Но $\Omega(x) \cap A = \varnothing$, что противоречит тому, что x — предельная точка.

Пусть A содержит все свои предельные точки. Покажем, что оно замкнуто, т. е. что его дополнение $U = X \setminus A$ открыто. Для этого достаточно показать, что для любой точки $x \in U$ найдется такая окрестность $\Omega(x)$ точки x, что $\Omega(x) \subset U$. В предположении противного для некоторой точки $x_0 \in U$ и всякой ее окрестности $\Omega(x_0)$ найдется точка $x' \in \Omega(x_0)$ такая, что $x' \notin U$. Тогда $x' \in X \setminus U = A$, следовательно, x_0 — предельная точка для A, и, значит, $x_0 \in A$ в противоречие с предположением, что $x_0 \in U = X \setminus A$. ■

Множество всех предельных точек множества A называют *производным множеством* множества A и обозначают A'. Таким образом, возникает новая операция, сопоставляющая каждому множеству $A \subset X$ его производное множество A'.

Теорема 2. *Для любого множества $A \subset X$ множество $A \cup A'$ замкнуто.*

Доказательство. Покажем, что множество $X \setminus (A \cup A')$ открыто. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus (A \cup A')$. Тогда x не предельная точка для A, поэтому найдется такая ее окрестность $\Omega(x)$, что $\Omega(x) \cap A = \varnothing$. Пусть $x' \in \Omega(x)$ — произвольная точка. Тогда для любой окрестности $V(x')$ точки x' такой, что $V(x') \subset \Omega(x)$, имеем $V(x') \cap A = \varnothing$, следовательно, x' не предельная точка для A и $\Omega(x) \cap A' = \varnothing$. Таким образом, $\Omega(x) \subset X \setminus (A \cup A')$; ввиду произвольности x множество $X \setminus (A \cup A')$ открыто, следовательно, $A \cup A'$ замкнуто. ■

Упражнение 2°. 1) Проверьте, что $(A \cup B)' = A' \cup B'$; $(A \cap B)' \subset A' \cap B'$; $(A \setminus B)' \supset A' \setminus B'$.

2) Пусть $X = \{a, b\}$ — пространство из двух элементов с тривиальной топологией. Приведите пример множества $A \subset X$, для которого не выполнено включение $(A')' \subset A'$.

Докажем основное утверждение о структуре замыкания множества.

Теорема 3. $\bar{A} = A \cup A'$ *для всякого множества* A, $A \subset X$.

Доказательство. По теореме 2 множество $A \cup A'$ замкнуто. Следовательно, по определению замыкания $\bar{A} \subset A \cup A'$. С другой стороны, любое замкнутое множество, содержащее A, содержит, очевидно, и все предельные точки A, а следовательно, содержит A'. Отсюда следует, что $A \cup A' \subset \bar{A}$. Таким образом, $\bar{A} = A \cup A'$. ∎

Упражнение 3°. Пусть A — множество рациональных точек на вещественной прямой $\mathbb{R}^1$. Покажите, что $\bar{A} = \mathbb{R}^1$.

Если топологическое пространство X имеет не более чем счетное подмножество A, замыкание которого совпадает с X, то оно называется *сепарабельным*. Легко проверить, что сепарабельность — топологическое свойство.

Упражнения. 4°. Покажите, что пространство $\mathbb{R}^n$, диск D^n и сфера S^{n-1} сепарабельны.

5°. Проверьте следующие свойства операций замыкания: $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$; $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$; $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$; $\bar{A} \setminus \bar{B} \subset \overline{A \setminus B}$; если $A \subset B$, то $\bar{A} \subset \bar{B}$.

6°. Пусть Y — подпространство топологического пространства X и A — подмножество в Y. Обозначим через $\bar{A}_Y$ замыкание множества A в подпространстве Y, через $\bar{A}$ — замыкание A в X. Покажите, что $\bar{A}_Y = \bar{A} \cap Y$.

Определение 3. Точка $x \in A$ называется *изолированной* точкой множества A, если существует окрестность $\Omega(x)$ точки x, не содержащая точек множества A, отличных от x.

Точка $x \in A$ изолирована тогда и только тогда, когда $x \in A \setminus A'$.

Определение 4. Множество A называется *дискретным*, если каждая его точка изолирована.

2. Внутренность множества. Рассмотрим еще два важных понятия, связанных с понятием окрестности.

Определение 5. Точка $x \in A$ называется *внутренней точкой* множества A, если найдется такая ее окрестность $\Omega(x)$, что $\Omega(x) \subset A$.

Множество всех внутренних точек множества A называется *внутренностью* A и обозначается $\operatorname{Int} A$.

Пример. Пусть $A = [0, 1]$ — отрезок вещественной прямой $\mathbb{R}^1$, тогда $\operatorname{Int} [0, 1] = (0, 1)$.

Операция Int двойственна операции замыкания, что видно из ее свойств, формулируемых в следующей теореме.

Теорема 4. *Для любого множества* $A \subset X$ *имеем*: 1) $\operatorname{Int} A$ — *открытое множество*; 2) $\operatorname{Int} A$ — *наибольшее открытое множество, содержащееся в* A; 3) (A открыто) $\Leftrightarrow$ ($\operatorname{Int} A = A$); 4) ($x \in \operatorname{Int} A$) $\Leftrightarrow$ ($x \in A$ *и* x *не является предельной точкой для* $X \setminus A$); 5) $\overline{X \setminus A} = X \setminus \operatorname{Int} A$.

Доказательство. Свойства 1) — 3) почти очевидны. Проверим, например, свойство 1). Пусть $x \in \operatorname{Int} A$; тогда найдется такая открытая окрестность $U(x)$ точки x, что $U(x) \subset A$. Поэтому $\operatorname{Int} A$ есть окрестность каждой своей точки и, следовательно, открытое множество.

Проверим свойство 4). Если $x \in \operatorname{Int} A$, то, очевидно, $x \in A$ и $x \notin (X \backslash A)'$. Обратно: если $x \in A$ и $x \notin (X \backslash A)'$, то найдется окрестность $\Omega(x) \subset A$, следовательно, $x \in \operatorname{Int} A$.

Проверку свойства 5) предоставим читателям. ■

Часто приходится рассматривать множество $\operatorname{Int}(X \backslash A)$, которое называется *внешней* открытой частью множества A и обозначается $\operatorname{ext} A$.

Упражнение 7°. Покажите, что $\bar{A} = X \backslash \operatorname{ext} A$.

3. Граница множества. Следующие важные понятия — понятия граничной точки и границы множества A, ассоциирующиеся с интуитивным представлением о «перегородке», отделяющей область евклидова пространства от внешней части.

Определение 6. *Границей* ∂A множества A назовем множество $X \backslash (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{ext} A)$. Всякую точку границы назовем *граничной точкой* множества A.

Таким образом, $x \in \partial A$ тогда и только тогда, когда каждая окрестность x содержит точку как из A, так и из $X \backslash A$.

Пример. Пусть $X = \mathbb{R}^1$ и $A = (0, 1]$. Тогда $\operatorname{Int} A = (0, 1)$, $X \backslash A = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$, $\operatorname{Int}(X \backslash A) = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$. Следовательно, $\partial A = \{0, 1\}$ — множество из двух точек: 0 и 1.

Таким образом, имеем граничную операцию ∂. Ее связь с операциями замыкания и Int выясняет следующая теорема.

Теорема 5. *Для любого* $A \subset X$ *имеем*: 1) $\partial A = \bar{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$; 2) $\partial A = \bar{A} \backslash \operatorname{Int} A$; 3) $\bar{A} = A \cup \partial A$; 4) $\operatorname{Int} A = A \backslash \partial A$; 5) ($A$ *замкнуто*) $\Leftrightarrow$ ($\partial A \subset A$); 6) (A *открыто*) $\Leftrightarrow$ ($(\partial A) \cap A = \varnothing$).

Доказательство. Докажем некоторые из этих утверждений, оставив другие для упражнения. 1) Пусть $x \in \partial A$; тогда в любой окрестности $U(x)$ точки x найдутся точки x_1, x_2 такие, что $x_1 \in A$, $x_2 \in X \backslash A$. Отсюда $x \in \bar{A}$ и $x \in \overline{X \backslash A}$, т. е. $x \in \bar{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$. Обратно: если $x \in \bar{A} \cap \overline{(X \backslash A)}$, то $x \in \bar{A}$, $x \in \overline{(X \backslash A)}$. Так как $\overline{(X \backslash A)} = X \backslash \operatorname{Int} A$, $A = X \backslash \operatorname{ext} A$ (см. п. 5 теоремы 4 и упр. 7°), то $x \notin \operatorname{Int} A$, $x \notin \operatorname{ext} A$, откуда следует $x \in \partial A$.

2) Согласно определению

$$\partial A = X \backslash (\operatorname{Int} A \cup \operatorname{ext} A) = (X \backslash \operatorname{ext} A) \backslash \operatorname{Int} A = \bar{A} \backslash \operatorname{Int} A.$$

3) Так как $\operatorname{Int} A \subset \bar{A}$, то из 2) следует $\bar{A} = \operatorname{Int} A \cup \partial A \subset \subset A \cup \partial A$; так как $\partial A \subset \bar{A}$, то $A \cup \partial A \subset A \cup \bar{A} = \bar{A}$.

5) Если A замкнуто, то $\partial A \subset \bar{A} = A$. Обратно: если $\partial A \subset A$, то в силу 3) $\bar{A} = A \cup \partial A$ (см. п. 3), откуда $A = \bar{A}$, т. е. A замкнуто. ■

Упражнения. 8°. Пусть U открыто в X, $A = \partial U$. Покажите, что $\partial A = A$. Докажите обратное утверждение.

9°. Пусть Y — подпространство топологического пространства X и A — подмножество в Y. Обозначим через $\partial_Y A$ границу множества A в Y, а через ∂A — границу A в X. Убедитесь, что не всегда $\partial_Y A = (\partial A) \cap Y$. Приведите примеры.

§ 7. Операции над множествами в метрическом пространстве. Шар и сфера. Полнота

1. Операции над множествами в метрическом пространстве. Здесь мы специализируем для метрических пространств понятия, изученные в предыдущем параграфе. Напомним, что база топологии в метрическом пространстве (X, ρ) состоит из всевозможных шаров $D_r(x_0)$, где $r > 0$ — радиус, а x_0 — центр шара. Метрика ρ позволяет говорить о сходящихся последовательностях в X (см. § 2 гл. I). Выразим $\bar{A}$, A', $\operatorname{Int} A$, ∂A в этих терминах:

а) условие $x \in \operatorname{Int} A$ эквивалентно тому, что для некоторого $\varepsilon > 0$ шар $D_\varepsilon(x)$ целиком содержится в A; это следует из определения метрической топологии τ_ρ;

б) условие $x \in A'$ эквивалентно тому, что существует последовательность $\{a_n\}$, сходящаяся к x, где $a_n \in A$, $a_n \neq x$.

Действительно, если $x \in A'$, то для всякого $r_1 > 0$ найдется элемент a_1 в A такой, что $a_1 \in D_{r_1}(x)$, $a_1 \neq x$. Пусть $0 < r_2 < \rho(x, a_1)$; тогда снова найдется элемент $a_2 \in D_{r_2}(x)$, $a_2 \neq x$, и т. д. Таким образом строятся последовательности $\{r_n\}$ и $\{a_n\} \subset A$ такие, что $a_n \neq x$, $\rho(a_n, x) < r_n$, $r_n \to 0$, т. е. $a_n \to x$.

Обратно, пусть существует последовательность $a_n \to x$, где $a_n \neq x$, $a_n \in A$. Тогда для всякой окрестности $\Omega(x)$ точки x существуют шар $D_\varepsilon(x) \subset \Omega(x)$ и такое $N(\varepsilon)$, что $\rho(a_n, x) < \varepsilon$ для $n \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда $a_n \in \Omega(x)$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $a_n \neq x$, что завершает доказательство.

Приведенное определение предельной точки в терминах сходящихся к ней последовательностей постоянно используется в анализе как определение предельной точки множества;

в) условие замкнутости множества A (A содержит все свои предельные точки) в метрическом пространстве эквивалентно тому, что из существования последовательности $\{a_n\} \subset A$, сходящейся к x, следует условие $x \in A$. Действительно, условие замкнутости A эквивалентно, например, условию $A' \subset A$ (см. § 6), что эквивалентно предыдущему утверждению;