5) Если A замкнуто, то $\partial A \subset \bar{A} = A$. Обратно: если $\partial A \subset A$, то в силу 3) $\bar{A} = A \cup \partial A$ (см. п. 3), откуда $A = \bar{A}$, т. е. A замкнуто. ■

Упражнения. 8°. Пусть U открыто в X, $A = \partial U$. Покажите, что $\partial A = A$. Докажите обратное утверждение.

9°. Пусть Y — подпространство топологического пространства X и A — подмножество в Y. Обозначим через $\partial_Y A$ границу множества A в Y, а через ∂A — границу A в X. Убедитесь, что не всегда $\partial_Y A = (\partial A) \cap Y$. Приведите примеры.

§ 7. Операции над множествами в метрическом пространстве. Шар и сфера. Полнота

1. Операции над множествами в метрическом пространстве. Здесь мы специализируем для метрических пространств понятия, изученные в предыдущем параграфе. Напомним, что база топологии в метрическом пространстве (X, ρ) состоит из всевозможных шаров $D_r(x_0)$, где $r > 0$ — радиус, а x_0 — центр шара. Метрика ρ позволяет говорить о сходящихся последовательностях в X (см. § 2 гл. I). Выразим $\bar{A}$, A', $\operatorname{Int} A$, ∂A в этих терминах:

а) условие $x \in \operatorname{Int} A$ эквивалентно тому, что для некоторого $\varepsilon > 0$ шар $D_\varepsilon(x)$ целиком содержится в A; это следует из определения метрической топологии τ_ρ;

б) условие $x \in A'$ эквивалентно тому, что существует последовательность $\{a_n\}$, сходящаяся к x, где $a_n \in A$, $a_n \neq x$.

Действительно, если $x \in A'$, то для всякого $r_1 > 0$ найдется элемент a_1 в A такой, что $a_1 \in D_{r_1}(x)$, $a_1 \neq x$. Пусть $0 < r_2 < \rho(x, a_1)$; тогда снова найдется элемент $a_2 \in D_{r_2}(x)$, $a_2 \neq x$, и т. д. Таким образом строятся последовательности $\{r_n\}$ и $\{a_n\} \subset A$ такие, что $a_n \neq x$, $\rho(a_n, x) < r_n$, $r_n \to 0$, т. е. $a_n \to x$.

Обратно, пусть существует последовательность $a_n \to x$, где $a_n \neq x$, $a_n \in A$. Тогда для всякой окрестности $\Omega(x)$ точки x существуют шар $D_\varepsilon(x) \subset \Omega(x)$ и такое $N(\varepsilon)$, что $\rho(a_n, x) < \varepsilon$ для $n \geqslant N(\varepsilon)$. Отсюда $a_n \in \Omega(x)$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$ и $a_n \neq x$, что завершает доказательство.

Приведенное определение предельной точки в терминах сходящихся к ней последовательностей постоянно используется в анализе как определение предельной точки множества;

в) условие замкнутости множества A (A содержит все свои предельные точки) в метрическом пространстве эквивалентно тому, что из существования последовательности $\{a_n\} \subset A$, сходящейся к x, следует условие $x \in A$. Действительно, условие замкнутости A эквивалентно, например, условию $A' \subset A$ (см. § 6), что эквивалентно предыдущему утверждению;

г) условие $x \in \partial A$ эквивалентно тому, что для всякого $r > 0$ имеем $D_r(x) \cap A \neq \varnothing$ и $D_r(x) \cap (X \backslash A) \neq \varnothing$, т. е. любой шар с центром в точке x «зачерпнет» точки из A и из $X \backslash A$. Это утверждение очевидно.

Дадим эквивалентное определение, часто используемое в анализе:

д) условие $x \in \partial A$ эквивалентно тому, что существует последовательность $\{a_n'\} \subset X \backslash A$, сходящаяся к x, и существует последовательность $\{a_n\} \subset A$, сходящаяся к x.

Действительно, пусть $x \in \partial A$. Тогда для всякого $r > 0$ шар $D_r(x)$ «черпает» точки как из A (точку a_r), так и из $X \backslash A$ (точку a_r'). Полагая $r = r_n$, $r_n \to 0$, получаем последовательности $a_{r_n} \in A$, $a_{r_n}' \in X \backslash A$ такие, что $a_{r_n} \to x$, $a_{r_n}' \to x$. Обратно, если $a_n \to x$, $\{a_n\} \subset A$ и $a_n' \to x$, $\{a_n'\} \subset X \backslash A$, то любой шар $D_r(x)$ содержит как точку a_n, так и точку a_n' при достаточно большом $n = n(r)$; следовательно, $x \in \partial A$.

2. Шар и сфера в $\mathbb{R}^n$. Изучим сферу S^n, открытый диск D^{n+1} и замкнутый диск $\bar{D}^{n+1}$ в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Теорема 1. *Верны следующие равенства:* $\bar{D}^{n+1} = (\overline{D^{n+1}}) = (D^{n+1})'$.

Доказательство. Если рассмотреть «луч» $\{t x_0\}$, $0 \leqslant t < +\infty$, выходящий из центра диска (точки 0) и проходящий через точку $x_0 \in \bar{D}^{n+1}$, $x_0 \neq 0$, то точки $x_n = \frac{n-1}{n} x_0$ этого луча стремятся к x_0 и лежат в D^{n+1} (проверьте с помощью метрики $\mathbb{R}^{n+1}$), а точки $y_n = \frac{1}{n} x_0$ также лежат в D^{n+1} и стремятся к нулю. Следовательно, $(D^{n+1})' \supset \bar{D}^{n+1}$. С другой стороны, $(\overline{D^{n+1}}) \subset \bar{D}^{n+1}$ (здесь $(\overline{D^{n+1}})$ — топологическое замыкание диска D^{n+1}). Действительно, если $x_n \to y$, $x_n \in D^{n+1}$, т. е. если $y \in (D^{n+1})'$, то

$$\rho(y, 0) \leqslant \rho(y, x_n) + \rho(x_n, 0) < \rho(y, x_n) + 1,$$

откуда, учитывая, что $\rho(y, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$, имеем $\rho(y, 0) \leqslant 1$, т. е. $y \in \bar{D}^{n+1}$.

Объединяя полученные включения с очевидным включением $(D^{n+1})' \subset (\overline{D^{n+1}})$, получаем

$$\bar{D}^{n+1} \subset (D^{n+1})' \subset (\overline{D^{n+1}}) \subset \bar{D}^{n+1},$$

откуда и следует утверждение теоремы. ■

Теорема 2. *Сфера есть граница диска:* $S^n = \partial(D^{n+1})$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in S^n$ ($S^n \neq \varnothing$!); тогда $x_n = \frac{n-1}{n} x_0 \in D^{n+1}$ и последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 при $n \to \infty$. Следовательно, $S^n \subset \partial(D^{n+1})$. Обратно: пусть $x_0 \in \partial(D^{n+1})$. Тогда $x_0 \notin D^{n+1}$, так как D^{n+1} состоит из внутренних точек, и существует последовательность $\{x_n\} \in D^{n+1}$, сходящаяся к x_0 (см. п. 1, д). Следовательно, $x_0 \in (D^{n+1})' = \overline{D}^{n+1}$, $x_0 \in S^n$. ■

Упражнения. 1°. Докажите, что $S^n = \partial(\overline{D}^{n+1})$.

2°. Пусть $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — непрерывная функция. Докажите, что множество $A = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) < \alpha\}$ открыто, а множества $B = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) \leqslant \alpha\}$, $C = \{x \in \mathbb{R}^n: \varphi(x) = \alpha\}$ замкнуты для каждого $\alpha \in \mathbb{R}^1$ (эти множества называются *лебеговыми множествами* функции φ).

3°. В условиях упражнения 2° покажите, что $\overline{A} \subset B$. Приведите пример, когда $\overline{A} = B$, $\partial A = C$, а также пример, когда $\overline{A} \neq B$ и $\partial A \neq C$.

3. Шар и сфера в произвольном метрическом пространстве. Рассмотрим метрическое пространство (X, ρ). Определим *замкнутый шар* $\overline{D}_r(x_0)$ *и сферу* $S_r(x_0)$ (радиуса $r > 0$ с центром в точке x_0) равенствами

$$\overline{D}_r(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) \leqslant r\},$$
$$S_r(x_0) = \{x \in X: \rho(x, x_0) = r\}.$$

Заметим, что $\overline{D}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ — замкнутые множества в X. Действительно, если $\{x_n\} \in \overline{D}_r(x_0)$ и $x_n \to y$, то

$$\rho(x_0, y) \leqslant \rho(x_0, x_n) + \rho(x_n, y) \leqslant r + \rho(x_n, y),$$

откуда следует, что $\rho(x_0, y) \leqslant r$, т. е. $y \in \overline{D}_r(x_0)$; $S_r(x_0)$ замкнуто как дополнение в замкнутом множестве $\overline{D}_r(x_0)$ до открытого множества $D_r(x_0)$.

Верны ли в метрическом пространстве теоремы п. 2? Следующий пример опровергает эту гипотезу.

Пример 1 (контрпример). Пусть X — конечное множество. Зададим метрику $\rho(x, x) = 0$, $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$. Тогда при $r < 1$

$$D_r(x_0) = \{x_0\}, \quad \overline{D}_r(x_0) = \{x_0\}, \quad S_r(x_0) = \varnothing$$

и

$$(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0) \neq (D_r(x_0))' = \varnothing,$$

но $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0) = \varnothing$. При $r = 1$ $D_1(x_0) = \{x_0\}$, $\overline{D}_1(x_0) = X$, $S_1(x_0) = X \setminus \{x_0\}$ и $(\overline{D_1(x_0)}) \subset \overline{D}_1(x_0)$, причем $(\overline{D_1(x_0)}) \neq \overline{D}_1(x_0)$, $S_1(x_0) \neq \partial D_1(x_0) = \varnothing$. Наконец, при $r > 1$

$$D_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0) = X, \quad S_r(x_0) = \varnothing,$$

причем $(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0) \neq (D_r(x_0))' = \varnothing$, $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0) = \varnothing$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие того, чтобы сфера в метрическом пространстве была границей шара.

Теорема 3. *В метрическом пространстве равенство* $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\overline{D}_r(x_0) = \overline{D_r(x_0)}$.

Доказательство. Из равенства $(\overline{D_r(x_0)}) = \overline{D}_r(x_0)$ следует, что

$$S_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0) \backslash D_r(x_0) = (\overline{D_r(x_0)}) \backslash D_r(x_0) = \partial D_r(x_0).$$

Обратно: если $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$, то

$$(\overline{D_r(x_0)}) = D_r(x_0) \cup \partial D_r(x_0) = D_r(x_0) \cup S_r(x_0) = \overline{D}_r(x_0). \quad \blacksquare$$

Упражнение 4°. Пусть $X = C_{[0,1]}$ — пространство непрерывных функций со стандартной метрикой (см. § 2 гл. I). Дайте интерпретацию $D_r(x_0)$, $\overline{D}_r(x_0)$, $S_r(x_0)$ и покажите, что $S_r(x_0) = \partial D_r(x_0)$.

4. Полнота метрических пространств. В анализе устанавливается критерий Коши сходимости числовой последовательности (в пространстве $\mathbb{R}^1$): последовательность $\{x_0\}$ сходится к некоторой точке x_0 $(x_n \to x_0)$ тогда и только тогда, когда она *фундаментальна*, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется целое число $N(\varepsilon)$ такое, что $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$, как только $n \geqslant N(\varepsilon)$, $m \geqslant 1$.

Если $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$ в (X, ρ), то, как и в случае $\mathbb{R}^1$, легко показать, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность, т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $N(\varepsilon)$ такое, что

$$\rho(x_{n+m}, x_n) < \varepsilon, \qquad n \geqslant N(\varepsilon), \qquad m \geqslant 1. \tag{1}$$

Однако обратное не всегда справедливо.

Определение 1. Метрическое пространство (X, ρ), в котором любая фундаментальная последовательность имеет предел, называется *полным* пространством.

Примеры. 2. Пусть $X = \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}^1$ — множество рациональных чисел в $\mathbb{R}^1$. Это метрическое пространство не полно, так как существуют последовательности рациональных чисел, сходящиеся к иррациональному числу (т. е. фундаментальные, но не имеющие предела в $\mathbb{Q}$).

3. Пространство $X = \mathbb{R}^1$ полно.

4. Пространство $X = \mathbb{R}^n$ полно. Это следует из того, что фундаментальность или сходимость для последовательности упорядоченных наборов $\{(\xi_1^k, \ldots, \xi_n^k)\}$ чисел эквивалентны фундаментальности или сходимости n числовых последовательностей $\{\xi_1^k\}, \ldots, \{\xi_n^k\}$.

Упражнение 5°. Докажите, что пространство $X = \mathbb{C}^n$ полно.

Пример 5. Пространство $X = \mathbb{C}_{[0,1]}$ полно в метрике

$$\rho_1(x(t), y(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

и не полно в метрике

$$\rho_2(x(t), y(t)) = \left\{ \int_0^1 (x(t) - y(t))^2 \, dt \right\}^{1/2}. \qquad (2)$$

Сформулированное утверждение доказывается в курсах анализа.

Примеры показывают, что свойство полноты не является топологическим, т. е., вообще говоря, не сохраняется при гомеоморфизмах метрических пространств. Так, интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1$ гомеоморфны, но пространство (a, b) не полно, в отличие от $\mathbb{R}^1$.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Теорема 4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $X_1 \subset X$ — подпространство. Тогда, если X_1 полно, то оно замкнуто в X; если X полно, а X_1 замкнуто в X, то X_1 полно.*

§ 8. Свойства непрерывных отображений

1. Эквивалентные определения непрерывного отображения. Выразим свойство непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств X и Y через другие топологические понятия — окрестности, замыкания множеств.

Теорема 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *f непрерывно;* 2) *для каждого $A \subset X$ имеем $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;* 3) *для каждого $B \subset Y$ имеем $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Доказательство. Докажем ряд импликаций. 1) $\Rightarrow$ 2): из определения непрерывности в терминах замкнутых множеств (упр. 6° § 1) заключаем, что множество $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто в X, причем оно содержит A, следовательно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, откуда $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

2) $\Rightarrow$ 1): из 2), очевидно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ для всякого A. Выбирая $A = f^{-1}(F)$, где F — произвольное замкнутое множество в Y, получаем $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) = f^{-1}(F)$, следовательно, $f^{-1}(F)$ замкнуто для всякого замкнутого $F \subset Y$, т. е. f непрерывно;

1) $\Rightarrow$ 3): непрерывность f влечет замкнутость $f^{-1}(\overline{B})$. Из включения $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ немедленно следует $\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{(f^{-1}(\overline{B}))} = f^{-1}(\overline{B})$, откуда получаем 3);