Упражнение 5°. Докажите, что пространство $X = \mathbb{C}^n$ полно.

Пример 5. Пространство $X = \mathbb{C}_{[0,1]}$ полно в метрике

$$\rho_1(x(t), y(t)) = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t) - y(t)|$$

и не полно в метрике

$$\rho_2(x(t), y(t)) = \left\{ \int_0^1 (x(t) - y(t))^2 \, dt \right\}^{1/2}. \tag{2}$$

Сформулированное утверждение доказывается в курсах анализа.

Примеры показывают, что свойство полноты не является топологическим, т. е., вообще говоря, не сохраняется при гомеоморфизмах метрических пространств. Так, интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^1$ гомеоморфны, но пространство (a, b) не полно, в отличие от $\mathbb{R}^1$.

Имеет место следующее утверждение, доказательство которого мы оставляем читателям в качестве упражнения.

Теорема 4. *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $X_1 \subset X$ — подпространство. Тогда, если X_1 полно, то оно замкнуто в X; если X полно, а X_1 замкнуто в X, то X_1 полно.*

§ 8. Свойства непрерывных отображений

1. Эквивалентные определения непрерывного отображения. Выразим свойство непрерывности отображения $f\colon X \to Y$ топологических пространств X и Y через другие топологические понятия — окрестности, замыкания множеств.

Теорема 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение топологических пространств. Следующие утверждения эквивалентны:* 1) *f непрерывно;* 2) *для каждого $A \subset X$ имеем $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;* 3) *для каждого $B \subset Y$ имеем $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$.*

Доказательство. Докажем ряд импликаций. 1) $\Rightarrow$ 2): из определения непрерывности в терминах замкнутых множеств (упр. 6° § 1) заключаем, что множество $f^{-1}(\overline{f(A)})$ замкнуто в X, причем оно содержит A, следовательно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$, откуда $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$;

2) $\Rightarrow$ 1): из 2), очевидно, имеем $\overline{A} \subset f^{-1}(\overline{f(A)})$ для всякого A. Выбирая $A = f^{-1}(F)$, где F — произвольное замкнутое множество в Y, получаем $\overline{f^{-1}(F)} \subset f^{-1}(\overline{f(f^{-1}(F))}) = f^{-1}(F)$, следовательно, $f^{-1}(F)$ замкнуто для всякого замкнутого $F \subset Y$, т. е. f непрерывно;

1) $\Rightarrow$ 3): непрерывность f влечет замкнутость $f^{-1}(\overline{B})$. Из включения $f^{-1}(B) \subset f^{-1}(\overline{B})$ немедленно следует $\overline{f^{-1}(B)} \subset \overline{(f^{-1}(\overline{B}))} = f^{-1}(\overline{B})$, откуда получаем 3);

3) $\Rightarrow$ 1): для замкнутого B из 3) вытекает цепочка включений $f^{-1}(B) \supset \overline{f^{-1}(B)} \supset f^{-1}(B)$, откуда следует, что $f^{-1}(B)$ замкнуто, следовательно, отображение f непрерывно. ■

По аналогии с определением непрерывности отображения в метрическом пространстве можно, введя понятие непрерывности отображения в точке топологического пространства, определить непрерывное отображение топологических пространств как непрерывное в каждой точке.

Определение. Отображение $f: X \to Y$ топологических пространств *непрерывно в точке* $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $\Omega(f(x_0))$ точки $f(x_0)$ существует окрестность $\Omega(x_0)$ точки x_0 такая, что $f(\Omega(x_0)) \subset \Omega(f(x_0))$.

Упражнение 1°. Следующее свойство отображения $f: X \to Y$ эквивалентно непрерывности в точке: полный прообраз $f^{-1}(\Omega(f(x_0)))$ любой окрестности точки $f(x_0)$ является окрестностью точки x_0.

Теорема 2. *Отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда оно непрерывно в каждой точке $x \in X$.*

Доказательство. Пусть $f: X \to Y$ непрерывно, $x_0 \subset X$ — произвольная точка и $\Omega(f(x_0))$ — произвольная окрестность точки $f(x_0)$. Тогда найдется открытое множество $V \subset Y$ такое, что $V \subset \subset \Omega(f(x_0))$ и $f(x_0) \in V$. Положим $U = f^{-1}(V)$, U — открытое множество, $x_0 \in U$. Тогда $f(U) \subset \Omega(f(x_0))$, что и доказывает непрерывность f в точке x_0.

Обратно: пусть f непрерывно в каждой точке $x \in X$. Пусть $V \in Y$ — произвольное открытое множество и пусть $A = f^{-1}(V)$. Так как V — окрестность любой своей точки и f непрерывно в каждой точке, то для всякого $x \in A$ есть окрестность $\Omega(x)$ точки x такая, что $f(\Omega(x)) \subset V$. Следовательно, $\Omega(x) \subset A$, что и доказывает открытость A. Непрерывность f доказана. ■

Упражнение 2°. Пусть $X = A \cup B$ — объединение двух замкнутых множеств. Докажите, что отображение $f: X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда отображения $f\big|_A$ и $f\big|_B$ непрерывны. Приведите контрпримеры к этому утверждению при невыполнении условия замкнутости множеств A, B.

2. Три задачи о непрерывных отображениях. В топологии и ее приложениях часто приходится решать задачи следующих типов.

1. Даны топологические пространства X, Y и отображение $f: X \to Y$. Проверить, непрерывно ли f.

2. Даны топологическое пространство X, некоторое множество Y и отображение $f: X \to Y$. Ввести топологию на Y так, чтобы f стало непрерывным отображением.

3. Даны топологическое пространство Y, множество X и отображение $f: X \to Y$. Ввести на X топологию так, чтобы f стало непрерывным отображением.

Задачу 1 мы уже рассматривали ранее для некоторых пространств и отображений. Для решения ее всегда требуется дополнительная информация о X, Y и f.

Задачу 2 можно решить без дополнительных предположений. Пусть $\{U\} = \tau$ — топология на X. Введем на Y топологию следующим образом: назовем открытыми в Y те и только те множества $V \subset Y$, прообразы $f^{-1}(V) = U$ которых открыты в X (включая и случай пустого прообраза). Нетрудно проверить, что совокупность таких множеств $\{V\}$ образует топологию. В самом деле, пусть V_α — некоторые множества из $\{V\}$; тогда имеем

1) $\varnothing \in \{V\}$, так как $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in \tau$, и $Y \in \{V\}$, так как $f^{-1}(Y) = X \in \tau$;

2) $\bigcup\limits_\alpha V_\alpha \in \{V\}$, так как $f^{-1}\left(\bigcup\limits_\alpha V_\alpha\right) = \bigcup\limits_\alpha f^{-1}(V_\alpha) = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha \in \tau$,

где $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha) \in \tau$;

3) $\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i} \in \{V\}$, так как $f^{-1}\left(\bigcap\limits_{i=1}^{k} V_{\alpha_i}\right) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} f^{-1}(V_{\alpha_i}) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} U_{\alpha_i} \in \tau$.

Построенную топологию на Y будем называть *топологией, индуцированной отображением* f; это сильнейшая топология на Y, в которой f непрерывно*.

Рассмотрим теперь вопрос о непрерывности отображения $g\colon X/R \to Y$, где R — некоторая эквивалентность, X/R — факторпространство.

Теорема 3. *Пусть X, Y — топологические пространства, $f\colon X \to Y$, $g\colon X/R \to Y$ — некоторые отображения, $\pi\colon X \to X/R$ — проекция. Пусть диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & X/R \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $f(x) = (g\pi)(x)$, $x \in X$. Тогда g непрерывно в том и только том случае, когда непрерывно f.

Доказательство. Пусть f непрерывно. Тогда, если $V \subset Y$ открыто, то $f^{-1}(V)$ открыто в X. Множество $\pi(f^{-1}(V)) = U$ открыто в X/R, так как множество $\pi^{-1}(U) = f^{-1}(V)$ открыто в X (в X/R открыты множества W, прообраз которых $\pi^{-1}(W)$ открыт в X). Поскольку $f = g\pi$, то

$$\pi(f^{-1}(V)) = \pi(\pi^{-1}g^{-1})(V) = g^{-1}(V).$$

* Описанный способ введения топологии встречался ранее при введении фактортопологии (см. § 3).

Поэтому $g^{-1}(V)$ открыто и, следовательно, g непрерывно.

Пусть g непрерывно, т. е. $g^{-1}(V)$ открыто в X/R для открытого в Y множества V. Тогда $\pi^{-1}(g^{-1}(V))$ открыто в X в силу непрерывности π. Но $\pi^{-1}(g^{-1}(V)) = f^{-1}(V)$, поэтому $f^{-1}(V)$ открыто и, следовательно, f непрерывно. ■

Выясним, когда пространство Y с описанной выше топологией гомеоморфно факторпространству пространства X по следующему отношению эквивалентности (индуцированному отображением f: $X \to Y$):

$$R_f\colon x_1 \sim x_2 \iff f(x_1) = f(x_2).$$

Класс эквивалентных точек в X — это полный прообраз $f^{-1}(y)$ какого-нибудь значения $y \in Y$. Пусть $\pi\colon X \to X/R_f$ — проекция, а $\hat{f}\colon X/R_f \to Y$ — факторотображение, переводящее класс эквивалентных точек $[x]$ в $f(x)$. Имеем равенство $\hat{f}(\pi(x)) = f(x)$, $x \in X$, что означает коммутативность диаграммы:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "f"'] & & X/R_f \arrow[dl, "\hat{f}"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

Теорема 4. *Если топология на Y индуцирована отображением $f\colon X \to Y$ и f сюръективно, то $\hat{f}$ — гомеоморфизм пространств X/R_f и Y.*

Доказательство. Очевидно, $\hat{f}$ биективно. Так как топология на Y индуцирована отображением f, то f непрерывно, поэтому согласно теореме 3 $\hat{f}$ непрерывно. Остается доказать непрерывность $\hat{f}^{-1}$, что равносильно открытости $\hat{f}$. Покажем, что $\hat{f}$ открыто. Пусть U — открытое множество в X/R_f и $V = \hat{f}(U)$ — его образ в Y. Множество $\pi^{-1}(U)$ открыто в X, так как π непрерывно. Поскольку

$$f^{-1}(V) = (\hat{f}\pi)^{-1}(V) = \pi^{-1}(\hat{f}^{-1}(V)) = \pi^{-1}(U),$$

то $f^{-1}(V)$ открыто. Так как в Y открыты множества W, прообраз которых $f^{-1}(W)$ открыт в X, то V — открытое множество. ■

Упражнение 3°. Покажите, что если отображение f не сюръективно, то факторпространство X/R_f гомеоморфно подпространству $f(X) \subset Y$, где топология на Y индуцирована отображением f.

Рассматривая непрерывное отображение $f\colon X \to Y$ двух топологических пространств, можно поставить вопрос о том, при каких условиях топология на Y индуцирована отображением f.

Теорема 5. *Пусть $f\colon X \to Y$ — сюръективное отображение топологических пространств и пусть f непрерывно и открыто (или замкнуто). Тогда топология на Y является фактортопологией, индуцированной f.*

Доказательство. Рассмотрим случай открытого f. Пусть $\{V\} = \sigma$ — топология на Y, индуцированная отображением f, а $\tau = \{U\}$ — первоначальная топология на Y. Покажем, что они совпадают. В самом деле, пусть $V \in \sigma$, $V \neq \varnothing$. Тогда в силу сюръективности $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ и $f^{-1}(V)$ открыто в X (по построению σ). В силу открытости f множество $f(f^{-1}(V)) = V$ открыто в Y, т. е. $V \in \tau$. Обратно: пусть $U \in \tau$; тогда из непрерывности f следует, что $f^{-1}(U)$ открыто в X, поэтому $U \in \sigma$ по определению топологии σ.

Случай замкнутого f аналогичен. ■

Остается рассмотреть задачу 3. Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение множества X в топологическое пространство Y. Пусть $\tau = \{V\}$ — топология на Y. Положим $\sigma = \{f^{-1}(V)\}_{V \in \tau}$. Система σ удовлетворяет аксиомам топологии (проверьте!). Очевидно, что f непрерывно как отображение топологических пространств (X, σ), (Y, τ). Ясно, что σ — самая слабая из топологий, обладающих этим свойством.

Полезно обратить внимание на то, что если $X = A$ — подмножество топологического пространства Y, то для инъективного отображения вложения $i\colon X \to Y$ топология σ, определенная выше, совпадает с топологией подпространства $A \subset Y$ (наследуемой из пространства Y).

§ 9. Произведение топологических пространств

1. Топология в прямом произведении пространств. Операция прямого произведения топологических пространств позволяет конструировать новые топологические пространства.

Напомним, что *прямым произведением* $X \times Y$ множеств X, Y называется совокупность упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Можно рассматривать прямые произведения любого числа сомножителей. Элементом такого произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in X_\alpha$, или, другими словами, элементы $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ — это такие функции $x\colon A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ — конечное множество, то произведение $X_1, X_2, \ldots, X_n$ часто обозначают $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, а его элементы суть упорядоченные наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть X, Y — топологические пространства. Введем топологию на прямом произведении $X \times Y$. Зададим базу топологии системой