Теорема 5. *Пусть $f: X \to Y$ — сюръективное отображение топологических пространств и пусть f непрерывно и открыто (или замкнуто). Тогда топология на Y является фактортопологией, индуцированной f.*

Доказательство. Рассмотрим случай открытого f. Пусть $\{V\} = \sigma$ — топология на Y, индуцированная отображением f, а $\tau = \{U\}$ — первоначальная топология на Y. Покажем, что они совпадают. В самом деле, пусть $V \in \sigma$, $V \neq \varnothing$. Тогда в силу сюръективности $f^{-1}(V) \neq \varnothing$ и $f^{-1}(V)$ открыто в X (по построению σ). В силу открытости f множество $f(f^{-1}(V)) = V$ открыто в Y, т. е. $V \in \tau$. Обратно: пусть $U \in \tau$; тогда из непрерывности f следует, что $f^{-1}(U)$ открыто в X, поэтому $U \in \sigma$ по определению топологии σ.

Случай замкнутого f аналогичен. ■

Остается рассмотреть задачу 3. Пусть $f: X \to Y$ — отображение множества X в топологическое пространство Y. Пусть $\tau = \{V\}$ — топология на Y. Положим $\sigma = \{f^{-1}(V)\}_{V \in \tau}$. Система σ удовлетворяет аксиомам топологии (проверьте!). Очевидно, что f непрерывно как отображение топологических пространств (X, σ), (Y, τ). Ясно, что σ — самая слабая из топологий, обладающих этим свойством.

Полезно обратить внимание на то, что если $X = A$ — подмножество топологического пространства Y, то для инъективного отображения вложения $i: X \to Y$ топология σ, определенная выше, совпадает с топологией подпространства $A \subset Y$ (наследуемой из пространства Y).

§ 9. Произведение топологических пространств

1. Топология в прямом произведении пространств. Операция прямого произведения топологических пространств позволяет конструировать новые топологические пространства.

Напомним, что *прямым произведением* $X \times Y$ множеств X, Y называется совокупность упорядоченных пар (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Можно рассматривать прямые произведения любого числа сомножителей. Элементом такого произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ является множество $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$, $x_\alpha \in X_\alpha$, или, другими словами, элементы $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ — это такие функции $x: A \to \bigcup\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, что $x(\alpha) \in X_\alpha$. Если $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ — конечное множество, то произведение $X_1, X_2, \ldots, X_n$ часто обозначают $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$, а его элементы суть упорядоченные наборы $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть X, Y — топологические пространства. Введем топологию на прямом произведении $X \times Y$. Зададим базу топологии системой

$\{U_\alpha \times V_\beta\}$, где $\{U_\alpha\}$, $\{V_\beta\}$ — базы топологий соответственно на X и на Y.

Упражнение 1°. Убедитесь, что покрытие $\{U_\alpha \times V_\beta\}$ множества $X \times Y$ удовлетворяет критерию базы (см. § 1).

Топология на $X \times Y$, определяемая базой $\{U_\alpha \times V_\beta\}$, называется *топологией произведения.*

Пример. Плоскость $\mathbb{R}^2$ есть прямое произведение прямых: $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Базой топологии $\mathbb{R}^2$ является система открытых прямоугольников вида $U_\alpha \times V_\beta$ — двумерных параллелепипедов (рис. 61), где U_α, V_β — интервалы.

Упражнения. 2°. Докажите, что двумерный тор T^2 гомеоморфен произведению $S^1 \times S^1$.

3°. Докажите, что пространство $S^1 \times \mathbb{R}^1$ гомеоморфно круговому цилиндру.

Рассмотрим проекции

$$p_1\colon X \times Y \to X, \quad (x, y) \mapsto x;$$
$$p_2\colon X \times Y \to Y, \quad (x, y) \mapsto y.$$

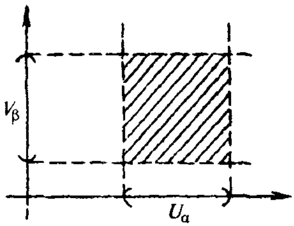

Рис. 61

Теорема 1. *Если X, Y — топологические пространства и $X \times Y$ наделено топологией произведения, то отображения p_1, p_2 непрерывны. Топология произведения — слабейшая из всех топологий на $X \times Y$, в которых p_1, p_2 непрерывны.*

Доказательство. Покажем непрерывность p_1. Пусть U_α — множество из базы топологии на X. Достаточно показать, что $p_1^{-1}(U_\alpha)$ открыто. Так как пространство Y представимо в виде объединения $\bigcup\limits_\beta V_\beta$ всех множеств базы, то

$$p_1^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times Y = U_\alpha \times \bigcup_\beta V_\beta = \bigcup_\beta (U_\alpha \times V_\beta),$$

и, следовательно, $p_1^{-1}(U_\alpha)$ открыто в $X \times Y$. Аналогично проверяется непрерывность p_2.

Проверим второе утверждение теоремы. Для непрерывности p_1 необходимо, чтобы множества $p_1^{-1}(U_\alpha) = U_\alpha \times Y$ были открыты. Для непрерывности p_2 необходима открытость множеств $X \times V_\beta = p_2^{-1}(V_\beta)$. Тогда для непрерывности p_1 и p_2 одновременно необходимо, чтобы множества $U_\alpha \times Y$, $X \times V_\beta$, а следовательно, и множества $(U_\alpha \times Y) \cap (X \times V_\beta) = U_\alpha \times V_\beta$ были открыты.

Таким образом, любая топология на $X \times Y$, в которой p_1 и p_2 непрерывны, должна содержать множества $U_\alpha \times V_\beta$ (и порождаемую ими топологию), следовательно, она сильнее топологии произведения на $X \times Y$. ■

Рассмотрим прямое произведение $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ с произвольным (возможно, бесконечным) числом сомножителей. Пусть X_α, $\alpha \in A$, — топологические пространства. Введем слабейшую из всех топологий на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых все проекции $p_{\alpha'}$: $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_{\alpha'}$, сопоставляющие функции x значение $x(\alpha')$, непрерывны. Эта топология на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ называется *топологией произведения* или *тихоновской топологией* (предложена А. Н. Тихоновым).

Опишем эту топологию. Проще всего охарактеризовать предбазу тихоновской топологии так: это всевозможные множества в произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ вида $B_{\alpha_0} = \{x\colon x(\alpha_0) \subset U_{\alpha_0}\}$, где α_0 — произвольный элемент из A, U_{α_0} — произвольный элемент базы топологии пространства X_{α_0}. Легко видеть, что $B_{\alpha_0} = p_{\alpha_0}^{-1}(U_{\alpha_0})$. Таким образом, при фиксированном α_0 множества $\{B_{\alpha_0}\}$ образуют слабейшую из всех топологий на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых проекция p_{α_0} непрерывна. Следовательно, объявив систему $\{B_\alpha\}_{\alpha \in A}$ предбазой, мы получим слабейшую из всех топологий на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, в которых все проекции $p_{\alpha'}$ непрерывны.

Отсюда следует, что базу тихоновской топологии на $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ образуют множества вида

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}),$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — произвольный конечный набор элементов из A, а U_{α_i} — произвольный элемент базы топологии на X_{α_i}.

Упражнение 4°. Покажите, что

$$p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha,$$

где $U_\alpha = X_\alpha$, если $\alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Другими словами, открытое множество базы — это набор функций

$$\{x\colon x(\alpha_i) \in U_{\alpha_i},\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \\ = \{x\colon x(\alpha_1) \in U_{\alpha_1}\} \cap \ldots \cap \{x\colon x(\alpha_n) \in U_{\alpha_n}\}.$$

Отметим, что произведения рассматривают, как правило, с топологией произведения.

Теорема 2. *Для любого $\alpha_0 \in A$ проекция $p_{\alpha_0}\colon \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to X_{\alpha_0}$ есть непрерывное и открытое отображение.*

Доказательство. Утверждение о непрерывности p_{α_0} не требует доказательства. Открытость образа произвольного открытого множества из $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ при отображении p_α следует из открытости образа любого множества из базы топологии на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ при отображении p_{α_0}. ■

Упражнения. 5°. Убедитесь, что $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1}_{n}$. Опишите базу и предбазу тихоновской топологии в $\mathbb{R}^n$.

6°. Убедитесь, что n-мерный куб I^n в $\mathbb{R}^n$ представим в виде $I^n = \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n}$, где $I = [0, 1]$.

7°. Рассмотрите n-мерный тор $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$ и опишите предбазу и базу его топологии.

2. Непрерывные отображения в произведение пространств. Займемся изучением отображений $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ из некоторого топологического пространства X в произведение. Можно рассмотреть компоненты $f\colon X \to X_\alpha$, $f_\alpha = p_\alpha f$, отображения f. Каждому отображению f соответствует набор $\{f_\alpha = p_\alpha f\}_{\alpha\in A}$ отображений — его компонент. Обратно: всякий набор отображений $\{f_\alpha\colon X \to X_\alpha,$ $\alpha \in A\}$ единственным образом задает отображение $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$.

Таким образом, существует биекция между множеством отображений $f\colon X \to \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ и множеством наборов отображений $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$.

Теорема 3. *Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда отображение f_α непрерывно для каждого $\alpha \in A$.*

Доказательство. Пусть все f_α непрерывны. Покажем, что f непрерывно. Достаточно показать, что $f^{-1}(U)$ открыто в X для всякого U из базы топологии произведения на $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$. Пусть

$$U = p_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap p_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n});$$

тогда

$$f^{-1}(U) = \{x \in X\colon\ f_\alpha(x) \in X_\alpha,\quad \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n,$$
$$f_{\alpha_i}(x) \in U_{\alpha_i},\quad i = 1, 2, \ldots, n\} =$$
$$= \left[\bigcap_{\substack{\alpha \\ \alpha \neq \alpha_1, \ldots, \alpha_n}} f_\alpha^{-1}(X_\alpha)\right] \cap f_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \ldots \cap f_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n}) =$$
$$= X \cap V_1 \cap \ldots \cap V_n,$$

где $V_i = f_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ — открытое множество в X вследствие непрерывности f_{α_i}. Следовательно, $f^{-1}(U)$ открыто в X. Доказательство обратного утверждения предоставляем читателям. ■

Рассмотрим теперь отображение $f\colon\ \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to X$, сопоставляющее каждому набору $\{x(\alpha)\}_{\alpha \in A}$ соответствующий элемент из X.

Упражнение 8°. Убедитесь, что если $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ и $X_\alpha = X = \mathbb{R}^1$ для всякого $\alpha \in A$, то отображение f — числовая функция от n аргументов.

В общем случае отображение f можно рассматривать как обобщение числовой функции от n аргументов, считая, что оно зависит от переменных $x(\alpha) \in X_\alpha$. Если зафиксировать все значения $x(\alpha)$, кроме $x(\alpha_0)$, то получим функцию от одного аргумента, меняющегося в X_{α_0}. Уточним эти представления.

Рассмотрим подпространство X'_{α_0} произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, состоящее из всех функций x, принимающих значение $x(\alpha) = y_\alpha$, $\alpha \neq \alpha_0$, где $y_n \in X_\alpha$ — фиксированный элемент.

Упражнение 9°. Проверьте, что X'_{α_0} гомеоморфно X_{α_0}.

Пусть $\pi_{\alpha_0}\colon X_{\alpha_0} \to X'_{\alpha_0}$ — естественный гомеоморфизм (зависящий от фиксированных y_α, $\alpha \neq \alpha_0$), а $f\big|_{X'_{\alpha_0}}$ — сужение f на X'_{α_0}. Диаграмма

$$\begin{tikzcd}
X'_{\alpha_0} \arrow[rr, "f|_{X'_{\alpha_0}}"] & & X \\
& & \\
X_{\alpha_0} \arrow[uu, "\pi_{\alpha_0}"] \arrow[uurr, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

естественно замыкается до коммутативной произведением двух отображений (штриховая стрелка), которое мы обозначим через

$f^{\{y_\alpha\}}_{\alpha_0}$. Оно и характеризует зависимость f от аргумента $x(\alpha_0) \in X_{\alpha_0}$ при заданных значениях y_α остальных аргументов $x(\alpha)$.

Упражнение 10°. Убедитесь, что если f непрерывно, то отображение $f^{\{y_\alpha\}}_{\alpha_0}: X_{\alpha_0} \to X$ непрерывно для всех $\alpha_0 \in A$, $y_\alpha \in X_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Обратное утверждение неверно; приведите пример.

Рассмотрим еще один случай отображения произведений топологических пространств. Пусть $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — некоторая совокупность отображений топологических пространств. Естественно определяется отображение $\prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha: \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$, если каждой функции $x \in \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ сопоставим функцию $y \in \prod\limits_{\alpha \in A} Y_\alpha$ по правилу $y(\alpha) = f_\alpha(x(\alpha))$. Это отображение называется *произведением отображений* f_α. В случае $A = \{1, 2, \dots, n\}$ произведение отображений $f_1, f_2, \dots, f_n$ часто обозначается так:

$$f_1 \times f_2 \times \dots \times f_n: X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \dots \times Y_n.$$

Упражнения. 11°. Докажите, что $\prod\limits_{\alpha \in A} f_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда f_α непрерывно для каждого $x \in A$.

12°. *Графиком отображения* $f: X \to Y$ называется подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$ вида $\Gamma_f = \{(x, y): x \in X, y = f(x)\}$. Убедитесь, что:

1) Γ_f — образ отображения $\tilde{f}: X \to X \times Y$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$;

2) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{f}$ непрерывно);

3) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ (Γ_f замкнуто).

13°. Пусть R — некоторое отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Рассмотрим подмножество R произведения $X \times X$, состоящее из всех пар (x, y) эквивалентных точек $x, y \in X$. Покажите, что: 1) если X/R хаусдорфово, то множество R замкнуто; 2) если проектирование $\pi: X \to X/R$ открыто и множество R замкнуто, то X/R — хаусдорфово пространство.

14°. Покажите, что произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством.

15°. Покажите, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x)\}$ замкнута в $X \times X$.

§ 10. Связность топологических пространств

1. Понятие связности топологического пространства. Понятие связности обобщает интуитивное представление о целостности, неразделенности геометрической фигуры, а понятие несвязного пространства — отрицание целостности, разделенность. Эти понятия допускают строгое определение в рамках теории топологических пространств и подробно изучаются в настоящем параграфе.