$f_{\alpha_0}^{\{y_\alpha\}}$. Оно и характеризует зависимость f от аргумента $x(\alpha_0) \in X_{\alpha_0}$ при заданных значениях y_α остальных аргументов $x(\alpha)$.

Упражнение 10°. Убедитесь, что если f непрерывно, то отображение $f_{\alpha_0}^{\{y_\alpha\}}: X_{\alpha_0} \to X$ непрерывно для всех $\alpha_0 \in A$, $y_\alpha \in X_\alpha$ при $\alpha \neq \alpha_0$. Обратное утверждение неверно; приведите пример.

Рассмотрим еще один случай отображения произведений топологических пространств. Пусть $f_\alpha: X_\alpha \to Y_\alpha$, $\alpha \in A$, — некоторая совокупность отображений топологических пространств. Естественно определяется отображение $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$: $\prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha \to \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$, если каждой функции $x \in \prod\limits_{\alpha\in A} X_\alpha$ сопоставим функцию $y \in \prod\limits_{\alpha\in A} Y_\alpha$ по правилу $y(\alpha) = f_\alpha(x(\alpha))$. Это отображение называется *произведением отображений* f_α. В случае $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ произведение отображений $f_1, f_2, \ldots, f_n$ часто обозначается так:

$$f_1 \times f_2 \times \ldots \times f_n: X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times Y_2 \times \ldots \times Y_n.$$

Упражнения. 11°. Докажите, что $\prod\limits_{\alpha\in A} f_\alpha$ непрерывно тогда и только тогда, когда f_α непрерывно для каждого $x \in A$.

12°. *Графиком отображения* $f: X \to Y$ называется подмножество $\Gamma_f \subset X \times Y$ вида $\Gamma_f = \{(x, y): x \in X, y = f(x)\}$. Убедитесь, что:

1) Γ_f — образ отображения $\tilde{f}: X \to X \times Y$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$;
2) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ ($\tilde{f}$ непрерывно);
3) (f непрерывно) $\Leftrightarrow$ (Γ_f замкнуто).

13°. Пусть R — некоторое отношение эквивалентности на топологическом пространстве X. Рассмотрим подмножество R произведения $X \times X$, состоящее из всех пар (x, y) эквивалентных точек $x, y \in X$. Покажите, что: 1) если X/R хаусдорфово, то множество R замкнуто; 2) если проектирование $\pi: X \to X/R$ открыто и множество R замкнуто, то X/R — хаусдорфово пространство.

14°. Покажите, что произведение хаусдорфовых пространств является хаусдорфовым пространством.

15°. Покажите, что пространство X хаусдорфово тогда и только тогда, когда диагональ $\Delta = \{(x, x)\}$ замкнута в $X \times X$.

§ 10. Связность топологических пространств

1. Понятие связности топологического пространства. Понятие связности обобщает интуитивное представление о целостности, неразделенности геометрической фигуры, а понятие несвязного пространства — отрицание целостности, разделенность. Эти понятия допускают строгое определение в рамках теории топологических пространств и подробно изучаются в настоящем параграфе.

Рассмотрим топологическое пространство X и его подмножества A, B.

Определение 1. Множества A и B называются *отделенными* друг от друга, если $\overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \varnothing$.

Например, если $X = \mathbb{R}^1$, $A = (a, b)$, $B = (b, c)$ — интервалы, $a < b < c$, то A и B отделены, а если $A = (a, b]$, $B = (b, c)$, то A и B не отделены ($A \cap \overline{B} = \{b\}$).

Определение 2. Пространство X называется *несвязным*, если его можно представить как объединение двух непустых отделенных друг от друга множеств.

Пространство, не удовлетворяющее условию определения 2, называется *связным*. Таким образом, связное пространство невозможно представить как объединение двух непустых отделенных друг от друга множеств.

Можно говорить о связности (несвязности) подмножества A топологического пространства X, рассматривая A как топологическое пространство с топологией, индуцированной из X.

Простейшими примерами связных пространств служат: 1) одноточечное пространство $X = \{*\}$; 2) произвольное множество X с тривиальной топологией τ_0. Простейшим примером несвязного пространства служит двухточечное пространство X с дискретной топологией τ_1 (проверьте!).

Дадим еще одно часто употребляемое определение несвязного пространства.

Определение 3. Топологическое пространство X называется *несвязным*, если его можно представить как объединение двух непустых непересекающихся открытых множеств.

Заметим, что два взаимно дополнительных открытых (замкнутых) множества одновременно замкнуты (соответственно открыты).

Докажем эквивалентность определений 2 и 3.

1) Пусть X несвязно в смысле определения 2. Тогда имеем разложение $X = A \cup B$, где $\overline{A} \cap B = \varnothing$, $A \cap \overline{B} = \varnothing$, A, B непусты. Следовательно, $\overline{A} \subset X \setminus B$, $\overline{B} \subset X \setminus A$, т. е. $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$, что означает замкнутость A и B. Но $A = X \setminus B$, $B = X \setminus A$, поэтому A, B открыты и X несвязно в смысле определения 3.

2) Обратно: пусть X несвязно в смысле определения 3. Тогда $X = A \cup B$; A, B непусты, открыты, $A \cap B = \varnothing$. Очевидно, что A и B замкнуты. Отсюда $\overline{A} \cap B = \varnothing$, так как $A = \overline{A}$; $\overline{B} \cap A = \varnothing$, так как $\overline{B} = B$. ■

Следующая теорема дает важный пример связного пространства.

Теорема 1. *Отрезок* $[a, b]$ *числовой оси* $\mathbb{R}^1$ *связен.*

Доказательство. Рассмотрим топологическое пространство $X = [a, b]$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Предположим, что X несвязно: $X = U \cup V$, $U \cap V = \varnothing$, где U, V непусты и открыты.

Пусть для определенности $a \in U$. Будем рассматривать полуинтервалы $[a, x)$, где $x \in (a, b]$.

Когда x близко к a, то $[a, x) \subset U$, так как U открыто. Supremum таких x, что $[a, x) \subset U$, обозначим через a_* $(a_* \in X)$; ясно, что $a_* \neq b$.

Если $a_* \in U$, то в силу открытости U близкие к a_* точки (слева и справа) тоже лежат в U, что противоречит определению a_*. Следовательно, $a_* \notin U$. Если $a_* \in V$, то в силу открытости V близкие к a_* точки тоже лежат в V. Поэтому $[a, a_* - \varepsilon) \cap V \neq \varnothing$ для малых $\varepsilon > 0$, что противоречит определению a_*. Следовательно, $a_* \notin V$. Таким образом, $a_* \notin U \cup V$, получаем противоречие с предположением $X = U \cup V$. ■

Теперь можно установить связность более общих пространств.

Теорема 2. *Всякое выпуклое множество $T \subset \mathbb{R}^n$ связно.*

Доказательство. Пусть $T = U \cup V$, U, V — непустые непересекающиеся открытые множества. Пусть $[a, b] = X$ — отрезок, соединяющий некоторые точки $a \in U$ и $b \in V$. Тогда $U_X = X \cap U$, $V_X = X \cap V$ — непустые непересекающиеся открытые множества в X и $X = U_X \cup V_X$, что противоречит связности отрезка X. ■

Следствие. *Пространство $\mathbb{R}^n$ и диски $D_r^n(x_0)$, $\overline{D}_r^n(x_0)$ связны.*

В качестве примера несвязного пространства рассмотрим множество рациональных чисел $\mathbb{Q} = \{p/q\}$ с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^1$ — произвольное иррациональное число. Тогда множества

$$U_\alpha = \{x\colon x \in \mathbb{Q},\ x < \alpha\}, \quad V_\alpha = \{x\colon x \in \mathbb{Q},\ x > \alpha\}$$

непусты, открыты, не пересекаются и $\mathbb{Q} = U_\alpha \cup V_\alpha$, что означает несвязность $\mathbb{Q}$. ■

Упражнения. 1°. Докажите, что множество всех иррациональных чисел несвязно.

2°. а) Покажите, что множество $\overline{A}$ топологического пространства связно, если A связно; б) покажите, что в пространстве с дискретной топологией всякое множество, за исключением одноточечных множеств, несвязно.

2. Свойства связных пространств. Заметим сначала, что связность (несвязность) — топологическое свойство пространства, т. е. она сохраняется при гомеоморфизме. Действительно, это следует из сохранения при гомеоморфизме свойства отделенности множеств.

Более общим образом связность сохраняется при непрерывных отображениях.

Теорема 3. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение топологических пространств. Если X связно, то $f(X)$ связно в Y.*

Доказательство. Допустим противное: $f(X) = U_1 \cup V_1$, где $U_1 \cap V_1 = \varnothing$; U_1, V_1 открыты в $f(X)$, $U_1 \neq \varnothing$, $V_1 \neq \varnothing$. Открытость

U_1, V_1 в $f(X)$ означает, что существуют множества U, V, открытые в Y и такие, что $U \cap f(X) = U_1$, $V \cap f(X) = V_1$. Очевидно, что $X = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(V_1)$, $f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(V_1) = \varnothing$ и $f^{-1}(U_1) \neq \varnothing$, $f^{-1}(V_1) \neq \varnothing$. Кроме того, множества $f^{-1}(U_1)$, $f^{-1}(V_1)$ открыты, так как $f^{-1}(U_1) = f^{-1}(U)$, $f^{-1}(V_1) = f^{-1}(V)$ и f непрерывно. Таким образом, X несвязно, что противоречит предположению. ■

Упражнение 3°. а) Покажите, что график Γ_f непрерывного отображения f связного пространства связен.

б) Выведите из а) теорему о том, что числовая непрерывная функция f: $[a, b] \to \mathbb{R}^1$, принимающая на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, имеет в интервале (a, b) нуль ξ: $f(\xi) = 0$.

Утверждение б) упражнения 3 представляет собой классическую теорему Больцано—Коши, доказываемую в курсах анализа. С этой теоремой тесно связана более общая классическая теорема о промежуточном значении: если числовая функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, $f(a) \neq f(b)$ и число C заключено между числами $f(a)$ и $f(b)$, то существует такая точка $c \in [a, b]$, что $f(c) = C$.

Эта теорема также вытекает из теоремы 3. Действительно, утверждение теоремы о промежуточном значении эквивалентно утверждению о непустом пересечении графика Γ_f числовой функции $f(x)$ с прямой $y = C$ в плоскости $\mathbb{R}^2$, что следует из связности графика Γ_f и выбора числа C.

Можно было бы доказать теорему о промежуточном значении и не обращаясь к графику отображения f, а опираясь на связность (в пространстве $\mathbb{R}^1$) образа $f([a, b])$ и свойство связных множеств в $\mathbb{R}^1$ содержать вместе с любыми двумя точками все промежуточные точки (докажите!).

Упражнение 4°. Докажите, что окружность S^1 связна.

Указание. Рассмотрите отображение $[0, 1] \to S^1$, задаваемое формулами $x = \cos 2\pi t$, $y = \sin 2\pi t$.

Следующая теорема интуитивно очевидна.

Теорема 4. *Пространство X связно, если любые две его точки «соединяются» некоторым связным подмножеством (лежат в некотором связном подмножестве).*

Доказательство. Предположим противное. Представим X в виде объединения $X = U \cup V$ непустых непересекающихся открытых множеств U, V. Пусть $u_0 \in U$, $v_0 \in V$ — некоторые точки, а $L \subset X$ — связное множество, содержащее u_0 и v_0. Положим $U_1 = U \cap L$, $V_1 = V \cap L$. Множества U_1, V_1 непусты и открыты в L, причем $L = U_1 \cup V_1$, $U_1 \cap V_1 = \varnothing$, что противоречит связности L. ■

Упражнение 5°. Убедитесь, что: а) $A \cup B$ связно, если $A, B \subset X$ — связные множества в X, и $A \cap B \neq \varnothing$; б) $A \cup B \cup C$ связно, если $A, B, C \subset X$ связны и $A \cap B \neq \varnothing$, $B \cap C \neq \varnothing$.

Из упражнения 5° следует, например, связность сферы S^n, $n \geqslant 1$. Действительно, S^n состоит из двух замкнутых полусфер, $\overline{S^n_+}$, $\overline{S^n_-}$, пересекающихся по экваториальной сфере S^{n-1}, а каждая полусфера связна как непрерывный образ диска (см. § 2).

Установим следующий более общий критерий связности.

Теорема 5. *Пусть дано семейство связных в X множеств $\{A_\alpha\}$, любые два множества которого не отделены друг от друга. Тогда множество $C = \bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ связно в X.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $C = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, D_1, D_2 непусты и замкнуты в C. В силу связности множеств A_α каждое A_α содержится в D_1 или D_2, и так как D_1, D_2 непусты, то существуют множества A_{α_1}, $A_{\alpha_2} \in \{A_\alpha\}$ такие, что $A_{\alpha_1} \subset D_1$, $A_{\alpha_2} \subset D_2$. В силу замкнутости в C множеств D_1, D_2 замыкания в C множеств A_{α_1}, A_{α_2} содержатся в D_1, D_2 соответственно, что эквивалентно включениям $\overline{A}_{\alpha_1} \cap C \subset D_1$, $\overline{A}_{\alpha_2} \cap C \subset D_2$ (здесь $\overline{A}_{\alpha_1}$, $\overline{A}_{\alpha_2}$ — замыкания множеств A_{α_1}, A_{α_2} в X). Поэтому $(\overline{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$, $A_{\alpha_1} \cap (\overline{A}_{\alpha_2} \cap C) = \varnothing$. Но $(\overline{A}_{\alpha_1} \cap C) \cap A_{\alpha_2} = \overline{A}_{\alpha_1} \cap (C \cap A_{\alpha_2}) = \overline{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2}$, $A_{\alpha_1} \cap (\overline{A}_{\alpha_2} \cap C) = (A_{\alpha_1} \cap C) \cap \overline{A}_{\alpha_2} = A_{\alpha_1} \cap \overline{A}_{\alpha_2}$. Следовательно, $\overline{A}_{\alpha_1} \cap A_{\alpha_2} = \varnothing$, $A_{\alpha_1} \cap \overline{A}_{\alpha_2} = \varnothing$, что противоречит неотделенности множеств A_{α_1}, A_{α_2}. ■

Условию теоремы 4 удовлетворяет, в частности, специальный класс пространств, называемых линейно связными. Чтобы описать их, введем понятие пути в X.

Определение 4. *Путем*, соединяющим две точки, a, b, топологического пространства X, называется непрерывное отображение

$$S\colon [0, 1] \to X, \quad S(0) = a, \quad S(1) = b.$$

Упражнение 6°. Убедитесь, что образ $S(I)$ отрезка $I = [0, 1]$ является связным множеством, соединяющим точки a и b.

Определение 5. Топологическое пространство X называется *линейно связным*, если любые две точки в нем можно соединить путем.

Примером линейно связного пространства может служить замкнутая поверхность (см. § 4).

Из теоремы 4 следует, что линейно связное пространство обязательно связно. Обратное неверно, как показывает следующий пример. Рассмотрим подмножество в $\mathbb{R}^2$

$$X = [(0, 0), (1, 0)] \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{n}, 0\right), \left(\frac{1}{n}, 1\right)\right] \cup (0, 1),$$

где $[P, Q]$ означает отрезок, соединяющий в $\mathbb{R}^2$ точки P и Q; X связно, но не линейно связно (точку $(0, 1)$ нельзя соединить путем ни с какой другой точкой из X).

Упражнения. 7°. Проверьте, что выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ и сфера S^n, $n \geqslant 1$, линейно связны.

8°. Докажите, что если множество $A \subset X$ связно, то всякое множество B такое, что $A \subset B \subset \overline{A}$, также связно. Приведите примеры.

Наконец рассмотрим произведение связных пространств.

Теорема 6. *Произведение $X \times Y$ связных пространств связно.*

Доказательство. Допустим противное. Пусть $X \times Y = U \cup V$, где U, V — непустые непересекающиеся открытые множества. Пусть $(x_0, y_0) \in U$. Множество $x_0 \times Y$ гомеоморфно Y и, следовательно, связно, поэтому, пересекаясь с U в точке (x_0, y_0), оно целиком лежит в U. Множества $X \times y$, $y \in Y$, связны, пересекаются с множеством $x_0 \times Y$, а следовательно, с U, поэтому целиком лежат в U. Таким образом, $\bigcup\limits_{y \in Y} (X \times y) = X \times Y \subset U$, следовательно, $V = \varnothing$. Противоречие доказывает теорему. ■

Упражнения. 9°. Докажите теорему 6 для произведения n связных пространств $(n > 2)$.

10°. Докажите связность тихоновского произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha = Y$ связных пространств X_α.

Указание. Рассмотрите множество R точек произведения, соединимых с фиксированной точкой связными множествами, и убедитесь, что $\overline{R} = Y$.

3. Связные компоненты. Если пространство несвязно, то естественно попытаться разложить его на связные куски. Опишем это разложение. Пусть $x \in X$ — точка топологического пространства X. Рассмотрим наибольшее связное множество, содержащее точку x: $L_x = \bigcup A_x$, где все A_x являются связными множествами, содержащими точку x. Множество L_x замкнуто, так как замыкание $\overline{L}_x$ связного множества L_x связно (упражнение 2), и поэтому $\overline{L}_x \subset L_x$, т. е. $\overline{L}_x = L_x$.

Определение 6. Множество L_x называется *связной компонентой* точки x в топологическом пространстве X.

Пусть $x, y \in X$, $x \neq y$. Рассмотрим множества L_x, L_y. В силу их связности и максимальности имеем две возможности: 1) либо $L_x = L_y$; 2) либо $L_x \cap L_y = \varnothing$. Во втором случае L_x отделено от L_x, так как $L_x \cap \overline{L}_y = \varnothing$, $L_y \cap \overline{L}_x = \varnothing$. В очевидном равенстве $X = \bigcup L_x$, где объединение берется по всем $x \in X$, выбросим повторяющиеся компоненты.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения своих связных компонент, замкнутых и не пересекающихся.*

Замечание. Вообще говоря, нельзя утверждать, что связные компоненты в то же время и открыты (приведите примеры!).

Упражнения. 11°. Проверьте, что если пространство имеет конечное число связных компонент, то они открыты.

12°. Проверьте, что число связных компонент пространства X (понимаемое в общем случае как мощность множества) является топологической характеристикой пространства.

§ 11. Аксиомы счетности и отделимости

Встречающиеся в различных математических проблемах топологические пространства обладают дополнительными свойствами. Ряд свойств выражается системой так называемых аксиом счетности и отделимости.

1. Аксиомы счетности. В § 1 вводилось понятие базы топологии. При изучении топологических пространств выясняется, что пространства, обладающие счетной базой топологии, т. е. базой, состоящей не более чем из счетного числа множеств, имеют ряд полезных свойств. В связи с этим вводится следующее определение.

Определение 1. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если его топология τ обладает счетной базой.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. ◆

Интересно сопоставить пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, и сепарабельные пространства.

Теорема 1. *Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть X — топологическое пространство и $B = \{V_n\}$ — счетная база его топологии. Выберем в каждом из множеств $V_n \in B$ по элементу $a_n \in V_n$ и рассмотрим множество $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Покажем, что $X = \overline{A}$. Так как $\overline{A} = A \cup A'$, то достаточно показать, что любая точка множества $X \setminus A$ является предельной точкой множества A. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus A$ и $U(x)$ — некоторая ее окрестность. Тогда существует множество $V_k \in B$ такое, что $x \in V_k$ и $V_k \subset U(x)$, поэтому $a_k \in U(x)$, при этом $a_k \neq x$. Следовательно, $x \in A'$. ■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно — сепарабельное пространство не обязательно удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пример 2. Рассмотрим несчетное множество X, топология которого состоит из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X, всего X и пустого множества. (Проверьте, что такая система подмножеств действительно образует топологию!) В