Теорема 7. *Всякое топологическое пространство можно представить в виде объединения своих связных компонент, замкнутых и не пересекающихся.*

Замечание. Вообще говоря, нельзя утверждать, что связные компоненты в то же время и открыты (приведите примеры!).

Упражнения. 11°. Проверьте, что если пространство имеет конечное число связных компонент, то они открыты.

12°. Проверьте, что число связных компонент пространства X (понимаемое в общем случае как мощность множества) является топологической характеристикой пространства.

§ 11. Аксиомы счетности и отделимости

Встречающиеся в различных математических проблемах топологические пространства обладают дополнительными свойствами. Ряд свойств выражается системой так называемых аксиом счетности и отделимости.

1. Аксиомы счетности. В § 1 вводилось понятие базы топологии. При изучении топологических пространств выясняется, что пространства, обладающие счетной базой топологии, т. е. базой, состоящей не более чем из счетного числа множеств, имеют ряд полезных свойств. В связи с этим вводится следующее определение.

Определение 1. Говорят, что топологическое пространство (X, τ) удовлетворяет *второй аксиоме счетности*, если его топология τ обладает счетной базой.

Пример 1. Пространство $\mathbb{R}^n$ удовлетворяет второй аксиоме счетности. ◆

Интересно сопоставить пространства, удовлетворяющие второй аксиоме счетности, и сепарабельные пространства.

Теорема 1. *Топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, сепарабельно.*

Доказательство. Пусть X — топологическое пространство и $B = \{V_n\}$ — счетная база его топологии. Выберем в каждом из множеств $V_n \in B$ по элементу $a_n \in V_n$ и рассмотрим множество $A = \{a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$. Покажем, что $X = \overline{A}$. Так как $\overline{A} = A \cup A'$, то достаточно показать, что любая точка множества $X \setminus A$ является предельной точкой множества A. Пусть x — произвольная точка из $X \setminus A$ и $U(x)$ — некоторая ее окрестность. Тогда существует множество $V_k \in B$ такое, что $x \in V_k$ и $V_k \subset U(x)$, поэтому $a_k \in U(x)$, при этом $a_k \neq x$. Следовательно, $x \in A'$. ■

Обратное утверждение, вообще говоря, неверно — сепарабельное пространство не обязательно удовлетворяет второй аксиоме счетности.

Пример 2. Рассмотрим несчетное множество X, топология которого состоит из дополнений до всевозможных конечных подмножеств множества X, всего X и пустого множества. (Проверьте, что такая система подмножеств действительно образует топологию!) В этом пространстве всякое бесконечное подмножество плотно, так как оно пересекается с каждым открытым множеством. Это означает сепарабельность X. С другой стороны, предположим, что X имеет счетную базу.

Тогда, если $x \in X$ — фиксированная точка, то пересечение всех открытых множеств, содержащих x, равно $\{x\}$. Следовательно, и счетное пересечение элементов базы, содержащих x, равно $\{x\}$. Но тогда дополнение $X \setminus \{x\}$ есть объединение не более чем счетного множества конечных множеств, а значит, не более чем счетно. Это противоречит несчетности X. ◆

Важно отметить, что для метрических пространств, утверждение, обратное утверждению теоремы 1, оказывается верным, а именно верна следующая теорема.

Теорема 2. *Всякое сепарабельное метрическое пространство* (X, ρ) *удовлетворяет второй аксиоме счетности.*

Доказательство. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$ — не более чем счетное всюду плотное множество в X. Возьмем в качестве базы топологии пространства X совокупность открытых множеств

$$B = \{V_{n,k} = D_{1/k}(a_n); \quad n, k = 1, 2, \ldots\}.$$

Легко убедиться, что это база.

В самом деле, в силу сепарабельности X для любого $x \in X$ и достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется элемент $a_n \in A$ такой, что $a_n \in D_{\varepsilon/3}(x)$; кроме того, найдется такой номер k, что $x \in V_{n,k} \subset D_\varepsilon(x)$ (достаточно взять k так, чтобы $\varepsilon/3 \leqslant 1/k \leqslant 2\varepsilon/3$). Так как любое открытое множество в X представимо в виде объединения шаров, то оно представимо и как объединение множеств $V_{n,k}$ из B. ■

Для формулировки следующего утверждения нам потребуется понятие покрытия, упоминавшееся в § 1, и понятие подпокрытия — подсемейства покрытия, которое само является покрытием.

Теорема 3 (Линделёф). *Если топологическое пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то в произвольном его открытом покрытии $\{U_\alpha\}$ содержится не более чем счетное подпокрытие.*

Доказательство. Пусть B — счетная база топологии на X. Так как всякий элемент покрытия $\{U_\alpha\}$ есть объединение множеств из B, то в B можно выделить подсемейство C, тоже покрывающее X и такое, что каждый элемент из C содержится в некотором элементе семейства $\{U_\alpha\}$. Тогда, выбрав для каждого элемента из покрытия C какое-нибудь одно содержащее его множество из $\{U_\alpha\}$, получим не более чем счетное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$. ■

Кроме базы топологии, введенной в § 1, существует важное понятие базы системы окрестностей точки x топологического пространства X.

Определение 2. Семейство $B(x) = \{V(x)\}$ окрестностей точки x называется *базой системы окрестностей* точки x, если в каждой окрестности точки x содержится некоторая окрестность их этого семейства.

Семейство всех открытых окрестностей точки, очевидно, является базой системы окрестностей этой точки.

Пример 3. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Тогда

$$B(x) = \{V_k(x) = D_{1/k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$$

— база системы окрестностей точки x. Действительно, в любую окрестность точки x можно вписать некоторую шаровую окрестность. Для любой шаровой окрестности $D_\varepsilon(x)$ можно подобрать число k так, чтобы $1/k < \varepsilon$; тогда $V_k(x) \subset D_\varepsilon(x)$.

Определение 3. Говорят, что топологическое пространство X удовлетворяет *первой аксиоме счетности*, если система окрестностей всякой его точки обладает счетной базой, т. е. базой, состоящей не более чем из счетного числа окрестностей.

Пример 4. Метрическое пространство удовлетворяет первой аксиоме счетности.

Пример 5. Пространство непрерывных функций $C_{[0,1]}$ удовлетворяет первой аксиоме счетности. ◆

Удовлетворяет ли пространство $C_{[0,1]}$ второй аксиоме счетности? Положительный ответ на этот вопрос следует из того, что $C_{[0,1]}$ сепарабельно, и из теоремы 2 настоящего параграфа.

Сепарабельность пространства $C_{[0,1]}$ следует из теоремы Вейерштрасса о том, что всякую непрерывную функцию на отрезке $[0, 1]$ можно равномерно сколь угодно точно приблизить полиномом. Таким образом, счетное всюду плотное множество A в $C_{[0,1]}$ состоит из множества всех полиномов $\{P_n(t)\}$ с рациональными коэффициентами.

Упражнение 1°. Убедитесь, что топологическое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, удовлетворяет и первой аксиоме счетности.

Обратное неверно, как показывает следующий пример.

Пример 6. Всякое несчетное пространство X с дискретной топологией удовлетворяет первой аксиоме счетности. В самом деле, у всякой точки $x \in X$ есть база системы окрестностей, состоящая из одной окрестности $V = \{x\}$. Но такое пространство не удовлетворяет второй аксиоме счетности, иначе покрытие пространства одноточечными множествами $\{x\}$, согласно теореме 3, содержало бы не более чем счетное покрытие, что невозможно.

Таким образом, выполнение второй аксиомы счетности является более сильным условием на топологическое пространство, чем выполнение первой аксиомы счетности.

2. Свойства отделимости пространства. Важные топологические свойства пространств характеризуются аксиомами отделимости. Эти аксиомы позволяют сужать класс изучаемых пространств для рассмотрения их более глубоких свойств.

Для формулировки аксиом нам потребуется понятие открытой окрестности множества.

Определение 4. *Открытой окрестностью* множества A в топологическом пространстве X называется всякое открытое множество U, содержащее A.

Приведем основные *аксиомы отделимости* $T_0 - T_4$.

Аксиома T_0 (аксиома Колмогорова). Из каждых двух различных точек топологического пространства по крайней мере одна имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Аксиома T_1. Каждая точка всякой пары различных точек топологического пространства имеет окрестность, не содержащую другую точку.

Аксиома T_2 (аксиома Хаусдорфа). Любые две различные точки x, y топологического пространства имеют окрестности $U(x)$, $U(y)$ такие, что $U(x) \cap U(y) = \varnothing$.

Аксиома T_3. Для всякой точки x топологического пространства и всякого замкнутого множества F, не содержащего x, существует окрестность $U(x)$ точки x и открытая окрестность $U(F)$ множества F такие, что $U(x) \cap U(F) = \varnothing$.

Аксиома T_4. Любые два замкнутых непересекающихся множества F_1, F_2 топологического пространства имеют открытые окрестности $U(F_1)$, $U(F_2)$ такие, что $U(F_1) \cap U(F_2) = \varnothing$.

Подчеркнем, что среди аксиом $T_0 - T_2$ каждая следующая является более сильным условием на пространство, чем предыдущая. Для аксиом $T_2 - T_4$ то же верно лишь при условии, что выполнена аксиома T_1, поскольку T_1 не следует из T_3 или T_4.

Топологическое пространство X называют T_i-*пространством* ($i = 0, 1, 2, 3, 4$), если оно удовлетворяет аксиоме T_i.

При одновременном выполнении аксиом T_1 и T_3 топологическое пространство X называют *регулярным пространством.*

Если выполнены одновременно аксиомы T_1 и T_4, то топологическое пространство X называют *нормальным пространством.*

T_0-пространства называют также *колмогоровскими*, а T_2-пространства — *хаусдорфовыми* (см. также § 1).

Примером топологического пространства, не являющегося T_0-пространством, может служить пространство с тривиальной топологией. Все другие рассмотренные нами топологические пространства являются T_0-пространствами. Отметим, что топологические пространства, не являющиеся T_0-пространствами, не представляют интереса для исследования. Приведем несколько примеров.

Пример 7. Пусть $\mathbb{R}^1$ — вещественная прямая с топологией, базу которой образуют лучи вида $a < x < +\infty$. Несложно показать, что пространство $\mathbb{R}^1$ с такой топологией удовлетворяет аксиоме T_0, но не удовлетворяет аксиоме T_1.

Пример 8. Рассмотрим отрезок $[0, 1]$ с топологией, в которой открытыми считаются пустое множество и все множества, получающиеся из $[0, 1]$ выбрасыванием не более чем счетного числа точек. Полученное топологическое пространство удовлетворяет аксиоме T_1, но не удовлетворяет аксиоме T_2.

Пример 9. На отрезке $[0, 1]$ окрестностями произвольной точки, кроме нуля, назовем обычные окрестности, а окрестностями нуля назовем всевозможные полуинтервалы $[0, \alpha)$ с выброшенными точками $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$ Легко видеть, что полученное топологическое пространство хаусдорфово, но не регулярно, так как не пересекающиеся между собой замкнутое множество $F = \{1/n\colon n = 1, 2, \ldots\}$ и точка нуль неотделимы в смысле аксиомы T_3.

Примеры регулярных, но не нормальных пространств мы не приводим — они нетривиальны; это связано с тем, что различие между регулярными и нормальными пространствами достаточно тонко, как показывает следующая теорема.

Теорема 4 (Тихонов). *Всякое регулярное пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, является нормальным.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Топологические пространства, не удовлетворяющие аксиоме T_1, плохо устроены с точки зрения классического анализа. Одноточечное множество в них может быть не замкнуто, а конечное множество может иметь предельные точки (приведите примеры!). В T_1-пространствах такие ситуации уже не имеют места.

Упражнение 2°. Покажите, что топологическое пространство тогда и только тогда является T_1-пространством, когда любое его одноточечное множество замкнуто.

Теорема 5. *В каждой окрестности любой предельной точки множества A в T_1-пространстве X содержится бесконечно много точек из A.*

Доказательство. Пусть x — предельная точка множества A и $U(x)$ — некоторая ее окрестность. Предположим, что множество $U(x) \cap A$ конечно. Тогда множество $B = (U(x) \cap A)\setminus\{x\}$ замкнуто как объединение конечного числа замкнутых одноточечных множеств, и, следовательно, множество $U_1 = U(x)\setminus B$ открыто. Таким образом, U_1 — окрестность точки x и $U_1 \cap A = \{x\}$, что противоречит тому, что x — предельная точка A. ■

Следствие. *Всякое конечное подмножество T_1-пространства не имеет предельных точек.*

Отметим, что класс нормальных пространств достаточно широк, он включает, например, все метрические пространства.

Теорема 6. *Всякое метрическое пространство нормально.*

Доказательство. Каждое метрическое пространство (X, ρ), очевидно, удовлетворяет аксиоме T_2, а следовательно, и T_1 (в качестве непересекающихся окрестностей различных точек $x, y \in X$ можно взять шары $D_{r/2}(x)$, $D_{r/2}(y)$, где $r = \rho(x, y)$). Покажем, что в метрическом пространстве выполнена аксиома T_4. Пусть A, B — произвольные замкнутые подмножества X. Для всякого подмножества $C \subset X$ обозначим $\rho(x, C) = \inf\limits_{y \in C} \{\rho(x, y)\}$ ($\rho(x, C)$ называют расстоянием от точки x до множества C). Положим $U_1 = \{x \in X: \rho(x, A) < \rho(x, B)\}$, $U_2 = \{x \in X: \rho(x, A) > \rho(x, B)\}$. Множества U_1, U_2, очевидно, содержат A, B соответственно и не пересекаются. Отображения $f(x) = \rho(x, A)\colon X \to \mathbb{R}^1$, $g(x) = \rho(x, B)\colon X \to \mathbb{R}^1$ непрерывны (покажите!), и, следовательно, непрерывно отображение $f - g\colon X \to \mathbb{R}^1$. Поэтому множества U_1, U_2 открыты (как прообразы открытых множеств $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ при непрерывном отображении $f - g$). Таким образом, U_1, U_2 — непересекающиеся открытые окрестности множеств A, B. ■

Упражнения. 3°. Покажите, что подпространство T_i-пространства ($i = 0, 1, 2, 3$) также является T_i-пространством.

4°. Покажите, что в T_1-пространстве для всякого подмножества A выполнено включение $(A')' \subset A'$.

5°. Проверьте, что замкнутая поверхность (см. § 4 гл. II) — хаусдорфово пространство.

3. Хаусдорфовы пространства с первой аксиомой счетности. В таких пространствах естественно определяется понятие сходящейся последовательности и ее предела, после чего определение операций над множествами и понятия непрерывного отображения копируют определения для метрических пространств.

Для всякой точки x хаусдорфова топологического пространства (X, τ) со счетной базой обозначим $\{W_n(x)\}$ счетную базу ее открытых окрестностей.

Определение 5. Последовательность $\{x_n\}$ точек $x_n \in X$, $n = 1, 2, \ldots$, называется *сходящейся к точке* $x_0 \in X$, если для всякой окрестности $W_p(x_0)$ существует натуральное $N = N(x_0, p)$ такое, что при всех $n > N$ имеем $x_n \in W_p(x_0)$.

Полезно заметить, что выбор N зависит и от p и от x_0.

Упражнение 6°. Докажите, что в хаусдорфовом пространстве последовательность может сходиться к единственной точке.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке x_0, то x_0 называют пределом последовательности $\{x_n\}$ и пишут $\lim x_n = x_0$ или $x_n \to x_0$.

Упражнение 7°. Пусть $f\colon X \to y$ — отображение хаусдорфовых пространств с первой аксиомой счетности. Докажите, что условие

$\lim f(x_n) = f(x_0)$ для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, эквивалентно непрерывности отображения f в точке x_0.

Используя понятие сходящейся последовательности, можно дать определение предельной точки множества $A \subset X$, производного множества A', границы множества ∂A, замыкания $\bar{A}$ аналогично тому, как это делается в метрическом пространстве (см. п. 1 § 7).

Упражнения. 8°. Убедитесь, что указанные выше определения множеств A', ∂A, $\bar{A}$ в хаусдорфовом пространстве с первой аксиомой счетности эквивалентны общим определениям § 6.

9°. Отображение $f: X \to Y$ называется собственным, если прообраз любого компактного множества из Y компактен в X. Покажите, что если f непрерывно, а X, Y хаусдорфовы с первой аксиомой счетности, то из собственности отображения f следует его замкнутость.

§ 12. Нормальные пространства и функциональная отделимость

1. Эквивалентное определение нормального пространства. Часто бывает полезно формулируемое в следующей лемме свойство нормальных пространств, которое можно принять за эквивалентное определение нормального пространства.

Малая лемма Урысона. *T_1-пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой его открытой окрестности U существует открытая окрестность V множества F такая, что $\bar{V} \subset U$.*

Доказательство. Пусть X нормально. Рассмотрим два замкнутых множества: F и $F_1 = X \setminus U$. Так как пространство нормально, существуют непересекающиеся открытые окрестности V и V_1 множеств F и F_1. Тогда $V \subset X \setminus V_1$ и, следовательно, $\bar{V} \subset \overline{X \setminus V_1}$. Но $X \setminus V_1$ замкнуто, поэтому $\overline{X \setminus V_1} = X \setminus V_1$. Таким образом, $\bar{V} \subset X \setminus V_1 \subset U$. Обратно: пусть выполнено условие леммы и F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. Рассмотрим множество $U_1 = X \setminus F_2$. Тогда $F_1 \subset U_1$ и условию существует открытая окрестность V_1 множества F_1 такая, что $\bar{V}_1 \subset U_1$. Положив $U_2 = X \setminus \bar{V}_1$, получим открытое множество U_2, $F_2 \subset U_2$, причем $V_1 \cap U_2 = \varnothing$. ■

Следствие. *В нормальном пространстве X два непересекающихся замкнутых множества, F_1, F_2, имеют такие открытые окрестности U_1, U_2, что $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \varnothing$.*

Из нормального пространства, вообще говоря, не следует нормальность его подпространств. Если же в нормальном пространстве X всякое подпространство нормально, то X называют *наследственно нормальным пространством.*

Упражнение 1°. Покажите, что метрическое пространство наследственно нормально.