$\lim f(x_n) = f(x_0)$ для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$, эквивалентно непрерывности отображения f в точке x_0.

Используя понятие сходящейся последовательности, можно дать определение предельной точки множества $A \subset X$, производного множества A', границы множества ∂A, замыкания $\bar{A}$ аналогично тому, как это делается в метрическом пространстве (см. п. 1 § 7).

Упражнения. 8°. Убедитесь, что указанные выше определения множеств A', ∂A, $\bar{A}$ в хаусдорфовом пространстве с первой аксиомой счетности эквивалентны общим определениям § 6.

9°. Отображение $f: X \to Y$ называется собственным, если прообраз любого компактного множества из Y компактен в X. Покажите, что если f непрерывно, а X, Y хаусдорфовы с первой аксиомой счетности, то из собственности отображения f следует его замкнутость.

§ 12. Нормальные пространства и функциональная отделимость

1. Эквивалентное определение нормального пространства. Часто бывает полезно формулируемое в следующей лемме свойство нормальных пространств, которое можно принять за эквивалентное определение нормального пространства.

Малая лемма Урысона. *T_1-пространство X нормально тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $F \subset X$ и любой его открытой окрестности U существует открытая окрестность V множества F такая, что $\bar{V} \subset U$.*

Доказательство. Пусть X нормально. Рассмотрим два замкнутых множества: F и $F_1 = X \backslash U$. Так как пространство нормально, существуют непересекающиеся открытые окрестности V и V_1 множеств F и F_1. Тогда $V \subset X \backslash V_1$ и, следовательно, $\bar{V} \subset \overline{X \backslash V_1}$. Но $X \backslash V_1$ замкнуто, поэтому $\overline{X \backslash V_1} = X \backslash V_1$. Таким образом, $\bar{V} \subset X \backslash V_1 \subset U$. Обратно: пусть выполнено условие леммы и F_1, F_2 — непересекающиеся замкнутые множества. Рассмотрим множество $U_1 = X \backslash F_2$. Тогда $F_1 \subset U_1$ и условию существует открытая окрестность V_1 множества F_1 такая, что $\bar{V}_1 \subset U_1$. Положив $U_2 = X \backslash \bar{V}_1$, получим открытое множество U_2, $F_2 \subset U_2$, причем $V_1 \cap U_2 = \varnothing$. ∎

Следствие. *В нормальном пространстве X два непересекающихся замкнутых множества, F_1, F_2, имеют такие открытые окрестности U_1, U_2, что $\bar{U}_1 \cap \bar{U}_2 = \varnothing$.*

Из нормального пространства, вообще говоря, не следует нормальность его подпространств. Если же в нормальном пространстве X всякое подпространство нормально, то X называют *наследственно нормальным пространством.*

Упражнение 1°. Покажите, что метрическое пространство наследственно нормально.

Условие наследственной нормальности дает следующая теорема.

Теорема 1 (Урысон). *Пространство наследственно нормально тогда и только тогда, когда два любых его отдельных множества имеют непересекающиеся открытые окрестности.*

Доказательство этой теоремы мы не приводим.

Образ нормального пространства при непрерывном отображении не обязательно нормален. Простейшим примером может служить тождественное отображение прямой $\mathbb{R}^1$ с обычной топологией в ту же прямую, снабженную какой-либо нехаусдорфовой, например тривиальной, топологией. Однако существуют достаточные признаки того, чтобы образ нормального пространства был нормальным. Например, верно следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — нормальное пространство, $f: X \to Y$ — непрерывное замкнутое сюръективное отображение. Тогда пространство Y также нормально.*

Доказательство. Пусть $A \subset Y$ — замкнутое подмножество. Положим $A_1 = f^{-1}(A)$. Тогда множество A_1 замкнуто в силу непрерывности f. Пусть U — открытая окрестность множества A в Y. Тогда множество $U_1 = f^{-1}(U)$ открыто (в силу непрерывности f) и содержит A_1. Следовательно, U_1 — открытая окрестность A_1, и согласно малой лемме Урысона существует открытая окрестность V множества A_1 такая, что $\overline{V} \subset U_1$.

Имеем включения $A_1 \subset V \subset \overline{V} \subset U_1$. Замкнутое сюръективное отображение открыто, следовательно, $f(V)$ открыто, а $f(\overline{V})$ замкнуто, причем имеем включения

$$A = f(A_1) \subset f(V) \subset f(\overline{V}) \subset f(U_1) = U,$$

из которых легко усматривается нормальность Y. ■

2. Функциональная отделимость. Теорема Урысона о продолжении числовых функций. Выше отделимость множества определялась на языке «окрестностей». Урысон ввел еще и другое понятие отделимости — так называемую функциональную отделимость, которая весьма удобна при изучении нормальных пространств.

Определение. Два множества, A, B, в топологическом пространстве X называются *функционально отделимыми*, если существует непрерывная числовая функция $\varphi: X \to \mathbb{R}^1$ такая, что

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in A, \\ 1, & \text{если } x \in B, \end{cases}$$

и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ во всех точках X (рис. 62).

Родственная связь двух понятий отделимости хорошо проявляется в следующем простом факте.

Лемма. *Если множества A и B в топологическом пространстве функционально отделимы, то они имеют непересекающиеся открытые окрестности.*

Доказательство предоставляем провести читателям.

Таким образом, из функциональной отделимости любой пары замкнутых непересекающихся множеств T_1-пространства следует его нормальность. Интересно, что верно и обратное утверждение.

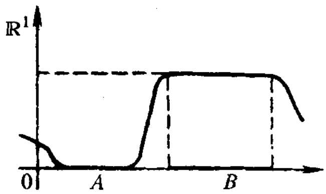

Рис. 62

Большая лемма Урысона. *Для любых двух замкнутых непересекающихся множеств, A, B, нормального пространства X существует непрерывная функция $\varphi\colon X \to \mathbb{R}^1$ такая, что $\varphi\big|_A \equiv 0$, $\varphi\big|_B \equiv 1$ и $0 \leqslant \varphi(x) \leqslant 1$ для всякого $x \in X$.*

Доказательство. Пусть A, B — произвольные замкнутые множества в X, $A \cap B = \varnothing$. Каждому рациональному числу вида $r = k/2^n$, где $k = 0, 1, \ldots, 2^n$, поставим в соответствие такое открытое множество $G(r)$, чтобы выполнялись следующие свойства:

1) $A \subset G(0)$, $X \setminus B = G(1)$;

2) $\overline{G(r)} \subset G(r')$, если $r < r'$.

Доказательство существования такой системы открытых множеств проведем индукцией по показателю n. Пусть $n = 0$. В силу нормальности X существуют непересекающиеся открытые окрестности $U(A), U(B)$ множества A и B. Положим $G(0) = U(A)$, $G(1) = X \setminus B$. Предположим теперь, что такая система множеств $G(r)$ построена для показателя $n - 1$. Построим ее для показателя n. Так как $2m/2^n = m/2^{n-1}$, то достаточно построить $G(r)$ для $r = k/2^n$ при k нечетном.

Пусть $k = 2m + 1$, тогда имеем $(k+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$, $(k-1)/2^n = m/2^{n-1}$, и, следовательно, по предположению индукции уже имеем включение $\overline{G((k-1)/2^n)} \subset G((k+1)/2^n)$. Очевидно, что множества $\overline{G((k-1)/2^n)}$, $X \setminus G((k+1)/2^n)$ замкнуты и не пересекаются. В силу нормальности X существует открытая окрестность V множества $\overline{G((k-1)/2^n)}$, не пересекающаяся с некоторой открытой окрестностью множества $X \setminus G((k+1)/2^n)$. Положим $V = G(k/2^n)$; ясно, что

$$\overline{G((k-1)/2^n)} \subset G(k/2^n),$$

$$\overline{G(k/2^n)} \subset \Gamma((\varkappa+1)/2^n).$$

Индукция закончена.

Расширим область определения множеств $G(r)$, положив

$$G(r)=\begin{cases}\varnothing, & \text{если } r<0,\\ X, & \text{если } r>1.\end{cases}$$

Зададим теперь функцию φ следующим образом: $\varphi(x)=0$, $x\in G(0)$ и $\varphi(x)=\sup\{r\colon x\in X\setminus G(r)\}$. Покажем непрерывность φ. С этой целью для каждого $x_0\in X$ и каждого $N>0$ построим такую окрестность $U_N(x_0)$ точки x_0, что $|\varphi(x_0)-\varphi(x)|<1/2^N$, $x\in\in U_N(x_0)$. Пусть r_0 (вида $k/2^n$) таково, что

$$\varphi(x_0)<r_0<\varphi(x_0)+1/2^{N+1}. \tag{1}$$

Положим $U_N(x_0)=G(r_0)\setminus\overline{G(r_0-1/2^N)}$. Тогда $x_0\in U_N(x_0)$, так как $r_0>\varphi(x_0)$ и $r_0-1/2^{N+1}<\varphi(x_0)$. Если $x\in U_N(x_0)$, то $x\in G(r_0)$, поэтому $\varphi(x)\leqslant r_0$. Кроме того,

$$x\in X\setminus\overline{G(r_0-1/2^N)}\subset X\setminus G(r_0-1/2^N),$$

поэтому $r_0-1/2^N\leqslant\varphi(x)$. Таким образом,

$$r_0-1/2^N\leqslant\varphi(x)\leqslant r_0. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем

$$|\varphi(x_0)-\varphi(x)|<1/2^N,\quad x\in U_N(x_0).$$

Последнее и означает непрерывность φ.

По построению ясно, что $\varphi\big|_A\equiv 0$, $\varphi\big|_B\equiv 1$ и $0\leqslant\varphi(x)\leqslant 1$. Построенную функцию называют также *функцией Урысона.* ■

В качестве приложения рассмотрим задачу о продолжении ограниченной функции с замкнутого подмножества нормального пространства на все пространство. Заметим вначале, что большая лемма Урысона эквивалентна утверждению о существовании непрерывной функции $\varphi_{a,b}(x)$, удовлетворяющей условиям

$$\varphi_{a,b}\big|_A\equiv a,\quad \varphi_{a,b}\big|_B\equiv b,\quad a\leqslant\varphi_{a,b}(x)\leqslant b,\quad x\in X,$$

где a, b $(a<b)$ — произвольные вещественные числа. Действительно, если $\varphi(x)$ — функция Урысона, то функция $\varphi_{a,b}(x)= =(b-a)\varphi(x)+a$ будет искомой.

Теорема 3 (Титце—Урысон). *Для всякой ограниченной непрерывной функции $\varphi\colon A\to\mathbb{R}^1$, заданной на замкнутом подмножестве A нормального пространства X, существует непрерывная функция $\Phi\colon X\to\mathbb{R}^1$ такая, что $\Phi\big|_A\equiv\varphi$ и $\sup\limits_{(X)}|\Phi(x)|=\sup\limits_{(A)}|\varphi(x)|$.*

Доказательство. Будем строить функцию Φ как предел некоторой последовательности функций. Положим $\varphi_0 = \varphi$ и

$$a_0 = \sup |\varphi(x)|, \quad A_0 = \{x: \varphi_0(x) \leqslant -a_0/3\},$$

$$B_0 = \{x: \varphi_0(x) \geqslant a_0/3\}.$$

Ясно, что множества A_0, B_0 замкнуты и не пересекаются. Согласно большой лемме Урысона существует непрерывная функция g_0: $X \to \mathbb{R}^1$ такая, что $|g_0(x)| \leqslant a_0/3$ и

$$g_0(x) = \begin{cases} -a_0/3, & \text{если } x \in A_0, \\ a_0/3, & \text{если } x \in B_0. \end{cases}$$

Зададим теперь на A функцию φ_1 равенством $\varphi_1 = \varphi_0 - g_0$. Тогда функция φ_1 непрерывна и $a_1 = \sup\limits_{(A)} |\varphi_1| \leqslant \frac{2}{3} a_0$. Аналогично, вводя обозначения

$$A_1 = \{x: \varphi_1(x) \leqslant -a_1/3\}, \qquad B_1 = \{x: \varphi_1(x) \geqslant a_1/3\}$$

и взяв функцию Урысона g_1 такую, что $|g_1(x)| \leqslant a_1/3$ и

$$g_1(x) = \begin{cases} -a_1/3, & \text{если } x \in A_1, \\ a_1/3, & \text{если } x \in B_1, \end{cases}$$

на множестве A положим $\varphi_2 = \varphi_1 - g_1$ и $a_2 = \sup\limits_{(A)} |\varphi_2| \leqslant \frac{2}{3} a_1$.

Таким образом, строим последовательность функций $\varphi_0 = \varphi$, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$, непрерывных на A, и функций $g_0, g_1, \ldots, g_n, \ldots$, непрерывных на X, таких, что

$$\varphi_{n+1} = \varphi_n - g_n, \qquad |g_n(x)| \leqslant \frac{a_n}{3}, \qquad a_{n+1} \leqslant \frac{2}{3} a_n,$$

где $a_n = \sup\limits_{(A)} |\varphi_n(x)|$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Отсюда получаем, что

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0, \qquad |g_n(x)| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3}.$$

В силу последнего неравенства ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно на X к непрерывной функции. Обозначив его сумму через $\Phi(x)$, получим оценку

$$|\Phi(x)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0.$$

Пусть $x \in A$, тогда частичная сумма $S_n(x) = g_0(x) + \ldots + g_n(x)$ по построению функций $\varphi_{n+1}(x)$ равна $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$, а $\varphi_n(x) \to 0$. Следовательно, $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in A$. ■

Теорема Титце—Урысона обобщается на случай отображения пространства X в n-мерный куб, а именно:

Следствие. *Всякое непрерывное отображение φ: $A \to I^n$ замкнутого подмножества A нормального пространства X в n-мерный куб I^n можно продолжить до непрерывного отображения Φ: $X \to I^n$.*

Упражнение. Докажите следствие.

Указание. Воспользуйтесь координатной системой в $\mathbb{R}^n$ и примените теорему Титце—Урысона к компонентам отображения φ.

§ 13. Компактные, локально компактные и паракомпактные пространства и их отображения

1. Понятие компактного пространства. Перейдем к изучению весьма важных классов топологических пространств, характеризующихся свойствами их открытых покрытий. Эти свойства являются абстрактным (и удобным) аналогом известного из анализа свойства компактности числового отрезка или n-мерного куба (шара). Компактные пространства и их отображения возникают во многих разделах математики.

Вначале обсудим некоторые понятия, связанные с покрытиями топологических пространств. Пусть $\sigma = \{A\}$ — некоторая система подмножеств A множества X. Объединение всех A из σ обозначим $\bar{\sigma}$ и назовем *телом системы* σ.

Расширим понятие покрытия, упоминавшееся в § 1 после определения базы топологии.

Определение 1. Система σ называется *покрытием подпространства* Y топологического пространства X, если $\bar{\sigma} \supset Y$.

В частности, σ — накрытие пространства X, если $\tilde{\sigma} = X$, что согласуется с ранее использовавшимся понятием покрытия § 1.

Определение 2. Говорят, что покрытие σ *вписано в покрытие* σ' ($\sigma \succ \sigma'$), если каждый элемент σ содержится в некотором элементе системы σ'.

Отношение вписанности вводит частичную упорядоченность в множестве всех покрытий пространства.

Покрытия, состоящие из конечного или счетного числа элементов, называются соответственно *конечными* или *счетными*.

Определение 3. Покрытие σ топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом элементов σ.

Особое значение имеют покрытия, состоящие из открытых множеств. Такие покрытия называются *открытыми*.