Пусть $x \in A$, тогда частичная сумма $S_n(x) = g_0(x) + \ldots + g_n(x)$ по построению функций $\varphi_{n+1}(x)$ равна $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$, а $\varphi_n(x) \to 0$. Следовательно, $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$ для каждого $x \in A$. ■

Теорема Титце—Урысона обобщается на случай отображения пространства X в n-мерный куб, а именно:

Следствие. *Всякое непрерывное отображение φ: $A \to I^n$ замкнутого подмножества A нормального пространства X в n-мерный куб I^n можно продолжить до непрерывного отображения* Φ: $X \to I^n$.

Упражнение. Докажите следствие.

Указание. Воспользуйтесь координатной системой в $\mathbb{R}^n$ и примените теорему Титце–Урысона к компонентам отображения φ.

§ 13. Компактные, локально компактные и паракомпактные пространства и их отображения

1. Понятие компактного пространства. Перейдем к изучению весьма важных классов топологических пространств, характеризующихся свойствами их открытых покрытий. Эти свойства являются абстрактным (и удобным) аналогом известного из анализа свойства компактности числового отрезка или n-мерного куба (шара). Компактные пространства и их отображения возникают во многих разделах математики.

Вначале обсудим некоторые понятия, связанные с покрытиями топологических пространств. Пусть $\sigma = \{A\}$ — некоторая система подмножеств A множества X. Объединение всех A из σ обозначим $\bar{\sigma}$ и назовем *телом системы* σ.

Расширим понятие покрытия, упоминавшееся в § 1 после определения базы топологии.

Определение 1. Система σ называется *покрытием подпространства* Y топологического пространства X, если $\bar{\sigma} \supset Y$.

В частности, σ — накрытие пространства X, если $\tilde{\sigma} = X$, что согласуется с ранее использовавшимся понятием покрытия § 1.

Определение 2. Говорят, что покрытие σ *вписано в покрытие* σ' $(\sigma \succ \sigma')$, если каждый элемент σ содержится в некотором элементе системы σ'.

Отношение вписанности вводит частичную упорядоченность в множестве всех покрытий пространства.

Покрытия, состоящие из конечного или счетного числа элементов, называются соответственно *конечными* или *счетными*.

Определение 3. Покрытие σ топологического пространства X называется *локально конечным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность, которая пересекается лишь с конечным числом элементов σ.

Особое значение имеют покрытия, состоящие из открытых множеств. Такие покрытия называются *открытыми*.

Со свойствами открытых покрытий связаны многие важные свойства пространства. В связи с этим выделяют следующие классы пространства.

Определение 4. Топологическое пространство X называется: A_1) *компактным*, A_2) *паракомпактным*, если во всякое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие, являющееся соответственно: a_1) конечным, a_2) локально конечным.

Упражнение 1°. Убедитесь, что получим эквивалентное определение A_1), если потребуем, чтобы из любого открытого покрытия пространства можно было выделить покрытие типа a_1), и получим неэквивалентное определение A_2), если потребуем, чтобы из любого открытого покрытия пространства можно было выделить покрытие типа a_2).

Пример 1. Пусть $X=[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ — пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^1$. Пространство X компактно, так как по теореме Гейне—Бореля из любого покрытия X интервалами можно выделить конечное подпокрытие.

Пример 2. Пусть $X=\mathbb{R}^1$; это пример некомпактного пространства. Так, из покрытия $\{(-n, n)\}_{n=1}^{\infty}$ нельзя выделить конечное.

Аналогичные рассуждения показывают, что некомпактным является пространство $\mathbb{R}^n$, а также всякое его неограниченное подмножество. Отсюда, в частности, следует необходимость условия ограниченности для компактного подмножества в $\mathbb{R}^n$.

Пример 3. Пространство $X=\mathbb{R}^1$ паракомпактно. Действительно, пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие $\mathbb{R}^1$. Имеем $\mathbb{R}^1 = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} [n, n+1]$. Каждый отрезок $[n, n+1]$ «немного» расширим в интервал $(n-\varepsilon, n+1+\varepsilon)$ и рассмотрим покрытие $\{U_\alpha \cap (n-\varepsilon, n+1+\varepsilon)\}$ отрезка $[n, n+1]$. Из него можно выбрать конечное покрытие $V_1^n, \ldots, V_{k_n}^n$. Объединение таких покрытий (по всем n) дает локально конечное покрытие $\mathbb{R}^1$, вписанное в $\{U_\alpha\}$. ◆

Если $Y \subset X$ — подпространство топологического пространства X, то, рассматривая покрытия пространства Y, открытые в наследственной топологии из X, получаем из определения 4 понятия компактного и паракомпактного подпространства (часто говорят также о компактном и паракомпактном множестве Y в пространстве X). Равносильным образом можно было бы рассматривать покрытия пространства Y, открытые в X. При этом полезно заметить, что замкнутое множество $Y \subset X$ наследует свойство A_i, $i=1, 2$, пространства X. В самом деле, всякому открытому покрытию $\sigma=\{V_\alpha\}$ пространства Y, где $V_\alpha = Y \cap U_\alpha$ и U_α открыто в X, соответствует открытое покрытие $\sigma_* = \{U_\alpha, U_* = X \setminus Y\}$ пространства X. Выберем теперь вписанное покрытие $\overline{\sigma} \succ \sigma_*$ (типа a_i) пространства X. От полученного покрытия $\tilde{\sigma}$ легко перейти к покрытию $\overline{\sigma}_Y$ подпространства Y путем пересечения элементов $\tilde{\sigma}$ с Y и отбрасывания содержащихся в U_*. Очевидно, что $\overline{\sigma}_Y \succ \sigma$.

Следующая теорема часто применяется в анализе.

Теорема 1. *Всякое бесконечное множество $Z \subset X$ компактного пространства X имеет в X предельную точку.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. что $Z' = \varnothing$. Тогда $\overline{Z} = Z$, значит, Z замкнуто, а следовательно, и компактно. С другой стороны, каждая точка $z \in Z$ изолирована в X. Это означает, что существует открытая окрестность $\Omega(z)$ в X с условием $\Omega(z) \cap Z = z$. Открытые в Z окрестности $U(z) = \Omega(z) \cap Z$ образуют бесконечное покрытие пространства Z, из которого нельзя выбрать конечное подпокрытие в противоречии с компактностью Z. ■

Понятие компактности тесно связано с понятием замкнутости, как показывает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть X — компактное подпространство хаусдорфова пространства Y. Тогда X замкнуто.*

Доказательство. Пусть $y \in Y \setminus X$. Для любой точки $x \in X$ в силу хаусдорфовости Y найдутся такие открытые окрестности $U_x(y)$, $U_y(x)$ точек y, x, что $U_x(y) \cap U_y(x) = \varnothing$.

Система $\{U_y(x)\}_{x \in X}$ образует покрытие X. В силу компактности X имеется конечное подпокрытие $\{U_y(x_i)\}_{i=1}^k$. Легко видеть, что множества $U(X) = \bigcup_{i=1}^k U_y(x_i)$ и $\bigcap_{i=1}^k U_{x_i}(y) = U(y)$ открыты и не пересекаются. Таким образом, показано, что в хаусдорфовом пространстве компактное множество X и точку, не лежащую в нем, можно разделить непересекающимися окрестностями $U(X)$ и $U(y)$. Отсюда следует, что дополнение $Y \setminus X$ открыто, поэтому X замкнуто. ■

Исследуем теперь связь понятий компактности и нормальности.

Теорема 3. *Компактное хаусдорфово пространство X нормально.*

Доказательство. Установим сначала аксиому T_3 для X. Пусть $A \subset X$ — замкнутое подмножество, $x \in X \setminus A$. В силу хаусдорфовости X для всякого $y \in A$ существуют такие окрестности $U_x(y)$, $U_y(x)$ точек x, y, что $U_x(y) \cap U_y(x) = \varnothing$. Система $\{U_x(y)\}_{y \in A}$ образует покрытие A; поскольку A компактно, то можно выделить конечное покрытие $\sigma = \{U_x(y_i)\}_{i=1}^m$. Так как $U_x(y_i)$ включено в замкнутое множество $X\setminus U_{y_i}(x)$, то $\overline{U}_x(y_i) \subset X\setminus U_{y_i}(x) \subset X\setminus\{x\}$, следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i) \subset X\setminus\{x\}$. Но $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i)$ замкнуто, поэтому $X\setminus \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U}_x(y_i) = U_A(x)$ — открытая окрестность точки x. Объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{m} U_x(y_i) = V_x(A)$ — открытая окрестность множества A в X. Очевидно, $V_x(A) \cap U_A(x) = \varnothing$, что означает справедливость аксиомы T_3 для X. Так как аксиома T_1 следует из аксиомы T_2, то X регулярно.

Докажем теперь нормальность X. Пусть множества A, B замкнуты в X и $A \cap B = \varnothing$. Тогда для всякой точки $x \in X$ в силу регулярности X существует открытая окрестность $U(x)$, для которой выполнено по крайней мере одно из условий $\overline{U}(x) \cap A = \varnothing$, $\overline{U}(x) \cap B = \varnothing$. Рассмотрим покрытие $\{U(x)\}_{x\in X}$ пространства X такими окрестностями. Выберем из него конечное покрытие $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^{m}$. Для каждого U_{α_i} выполнено по крайней мере одно из условий $\overline{U}_{\alpha_i} \cap A = \varnothing$, $\overline{U}_{\alpha_i} \cap B = \varnothing$. Пусть $P = \bigcup \overline{U}_{\alpha_i}$ — объединение тех множеств, для которых $\overline{U}_{\alpha_i} \cap A = \varnothing$ и, аналогично, $Q = \bigcup \overline{U}_{\alpha_i}$, $\overline{U}_{\alpha_i} \cap B = \varnothing$. Легко видеть, что открытые множества $X\setminus P$, $X\setminus Q$ содержат A, B соответственно и не пересекаются. Нормальность пространства X доказана. ■

Часто бывает полезно другое определение компактного пространства, использующее только язык замкнутых множеств. Сначала дадим определение.

Определение 5. Система $\{M_\alpha\}$ подмножеств пространства X называется *центрированной*, если всякая ее конечная подсистема имеет непустое пересечение.

Теорема 4. *Топологическое пространство X компактно тогда и только тогда, когда всякая центрированная система его замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение.*

Доказательство. Пусть $\sigma = \{M\}$ — произвольная центрированная система замкнутых подмножеств пространства и пусть X компактно. Покажем, что $\bigcap\limits_{M\in\sigma} M \neq \varnothing$. Предположим противное, т. е. $\bigcap\limits_{M\in\sigma} M = \varnothing$. Тогда $\bigcup\limits_{M\in\sigma} (X\setminus M) = X$, т. е. система $\{X\setminus M\}_{M\in\sigma}$ — открытое покрытие X. В силу компактности X существует конечное под-

5*

покрытие $\{X \backslash M_k\}_{k=1}^n$, поэтому $\bigcap\limits_{k=1}^{n} (X \backslash M_k) = X$, и, следовательно, $\bigcup\limits_{k=1}^{n} M_k = \varnothing$, что противоречит центрированности системы σ.

Пусть для всякой центрированной системы $\sigma = \{M\}$ замкнутых подмножеств пересечение $\bigcap\limits_{M \in \sigma} M$ непусто. Пусть $\{U_\alpha\}$ — произвольное открытое покрытие X. Тогда система $\{X \backslash U_\alpha\}$ имеет пустое пересечение и в силу предположения не является центрированной.

Таким образом, для некоторых $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ подсистема $\{X \backslash U_{\alpha_i}\}_{i=1}^s$ имеет пустое пересечение, откуда следует, что $\{U_{\alpha_i}\}_{i=1}^s$ — конечное подпокрытие покрытия $\{U_\alpha\}$. Следовательно, пространство X компактно. ∎

Рассмотрим теперь свойство паракомпактности. Интересен вопрос о том, как связано свойство паракомпактности с другими свойствами топологических пространств. Рассмотрим так называемые локально компактные множества.

Определение 6. Пространство X называется *локально компактным*, если у каждой точки $x \in X$ существует окрестность $U(x)$, замыкание которой компактно.

Примером локально компактного пространства может служить пространство $\mathbb{R}^n$; другой пример — двумерное многообразие (см. § 4 гл. II).

Теорема 5. *Если топологическое пространство X хаусдорфово и локально компактно, то оно регулярно.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ — произвольная точка и $F \subset X$ — замкнутое множество, не содержащее точку A. Тогда $X \backslash F$ открыто и $a \in X \backslash F$. В силу локальной компактности пространства X найдется такая открытая окрестность $V(a)$, что $\overline{V}(a)$ компактно. Пусть $F_1 = \overline{V}(a) \cap F$; F_1 — замкнутое множество хаусдорфова пространства X, лежащее в компактном множестве $\overline{V}(a)$, следовательно, оно компактно в X. Точку a и компактное множество F_1 можно разделить непересекающимися окрестностями $W(a)$, $U(F_1)$ (см. доказательство теоремы 2); пусть $W_1(a) = W(a) \cap V(a)$ — новая окрестность, для которой имеем $W_1(a) \cap U(F_1) = \varnothing$, $\overline{W}_1(a) \cap (F_1) = \varnothing$. В частности, из очевидного включения $\overline{W}_1(a) \subset \overline{V}$ получаем $\overline{W}_1(a) \cap (F \backslash F_1) = \varnothing$, что вместе с предыдущим означает $\overline{W}_1(a) \cap$ $\cap F = \varnothing$. Замкнутая окрестность $\overline{W}_1(a)$ компактна, так как $\overline{V}(a)$ — компактное пространство и $\overline{W}_1(a) \subset \overline{V}(a)$. Следовательно, для каждой точки $x \in F$ найдется открытая окрестность $U(x)$, не пересекающаяся с $\overline{W}_1(a)$ (см. доказательство теоремы 2, замечание о «разделении» компактного множества и точки в хаусдорфовом пространстве). Положив $U(F) = \bigcup\limits_{x\in F} (U(x))$, будем иметь $W_1(a) \cap U(F) = \varnothing$. ■

Паракомпактное пространство примера 3 является частным случаем пространств, описываемых следующей теоремой.

Теорема 6. *Пусть X — локально компактное пространство и $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, где C_n — компактное множество. Тогда X паракомпактно.*

Доказательство. Представим сначала X в виде счетного объединения открытых, вложенных друг в друга множеств, замыкания которых компактны. Будем строить эти множества по индукции. Положим прежде всего $U_0 = \varnothing$. В качестве U_1 возьмем окрестность множества C_1, замыкание которой компактно. Затем, если построено множество U_n, в качестве U_{n+1} выберем окрестность множества $\overline{U}_n \cup C_{n+1}$, замыкание которой компактно. Существование таких окрестностей обеспечивается локальной компактностью пространства X.

Пусть теперь $\{V_\alpha\}_{\alpha\in M}$ — произвольное открытое покрытие X. Обозначим через D_n компактное множество $\overline{U}_n \backslash U_{n-1}$. Открытое множество $U_{n+1}\backslash\overline{U}_{n-1}$ есть окрестность множества D_n. Тогда система множеств

$$\{V_\alpha \cap (U_{n+1}\backslash\overline{U}_{n-2})\}_{\alpha\in M} = \{W_\alpha^n\}_{\alpha\in M}$$

образует открытое покрытие множества D_n. Выберем из него конечное подпокрытие $\{W_\alpha^n\}_{m=1}^{p_n}$. Проделав описанную процедуру для всех n, получим счетное покрытие $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{W_m^n\}_{m=1}^{p_n}$ всего пространства X, вписанное в покрытие $\{V_\alpha\}_{\alpha\in M}$.

Покажем, что это покрытие локально конечно. Пусть x — произвольная точка из X и $n_0 = \min\{n\colon x \in U_n\}$. Так как $x \notin U_{n_0-1}$, то существует ее окрестность $O(x)$, лежащая в U_{n_0}, такая, что $O(x) \cap \overline{U}_{n_0-2} = \varnothing$. Значит, $O(x)$ может пересекаться только с множествами W_m^k, где $1 \leqslant m \leqslant p_k$, $n_0 - 2 \leqslant k \leqslant n_0 + 1$. Таких множеств по построению конечное число. ■

Следствие. *Если локально компактное пространство X имеет счетную базу, то оно паракомпактно.*

Действительно, если пространство локально компактно, то оно имеет базу $\{U^C\}$ открытых множеств такую, что $\overline{U}^C$ компактно. Выбирая из счетной базы те множества, из которых состоят множества U^C, мы получим счетную базу $\{V_i^C\}_{i=1}^{\infty}$ с тем свойством, что $\overline{V_i^C}$ компактно для каждого i. Тогда $X = \bigcup \overline{V_i^C}$ и его паракомпактность следует из теоремы 6. ■

Замечание. В некоторых разделах математики (например, функциональном анализе) систематически используется язык сходящихся последовательностей при исследовании свойств компактных множеств. Этот язык вводится (см. п. 3 § 11) в случае хаусдорфовых пространств, удовлетворяющих первой аксиоме счетности. Полезно сформулировать общее понятие компактности на языке сходящихся последовательностей.

Упражнение 2°. Докажите, что если хаусдорфово пространство X удовлетворяет второй аксиоме счетности, то условие компактности X эквивалентно условию: из каждой бесконечной последовательности $\{x_n\}$ элементов X можно выбрать сходящуюся последовательность.

2. Отображения компактных пространств. Изучим некоторые важные свойства непрерывных отображений компактных пространств.

Теорема 7. *Пусть X, Y — топологические пространства, X компактно, а $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда образ $f(X)$ — компактное пространство в Y.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное открытое покрытие $\{V_\alpha\}$ пространства $Z = f(X)$. Очевидно, что $f\colon X \to Z$ также непрерывно, поэтому $\{f^{-1}(V_\alpha)\}$ — открытое покрытие X. Выделим из него конечное покрытие $\{f^{-1}(V_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m}$, существующее в силу компактности X. Тогда $\{(V_{\alpha_i})\}_{i=1}^{m}$ — конечное открытое покрытие Z. ■

Упражнение 3°. Покажите, что замкнутая поверхность (см. § 4 гл. II) есть компактное топологическое пространство.

Теорема 8. *Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение, X компактно, Y хаусдорфово. Тогда f — замкнутое отображение.*

Доказательство. Напомним, что всякое замкнутое подмножество компактного пространства компактно. Пусть $M \subset X$ — произвольное замкнутое (и, значит, компактное) подмножество в X. В силу теоремы 7 множество $f(M)$ компактно в Y и, следовательно, замкнуто согласно теореме 2.

Выведем отсюда важный признак гомеоморфизма.

Теорема 9. *Пусть выполнены условия предыдущей теоремы и отображение f биективно; тогда f — гомеоморфизм.*

Доказательство. Рассмотрим обратное отображение $f^{-1}\colon Y \to X$. Покажем его непрерывность. Пусть $A \subset X$ — произвольное замкнутое подмножество. Так как f — замкнутое отображение, то

$f(A) = (f^{-1})^{-1}(A)$ замкнуто в Y, что и означает непрерывность отображения f^{-1}. ■

Многие примеры компактных пространств возникают при построении факторпространств.

Пример 4. Пусть X — факторпространство некоторого компактного пространства Y. Тогда X компактно. В самом деле: X есть непрерывный образ (относительно проекции) компактного пространства.

Рассмотрим числовые непрерывные функции $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ на компактном пространстве X. Для них верна следующая теорема Вейерштрасса, играющая важную роль в анализе.

Теорема 10. *Всякая непрерывная функция $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ на компактном пространстве X ограничена и достигает на X своей верхней (нижней) грани.*

Доказательство. В силу теоремы 7 множество $f(X)$ компактно. По теореме 2 всякое компактное подпространство в $\mathbb{R}^1$ замкнуто. Как уже отмечалось, всякое компактное подпространство в $\mathbb{R}^n$ ограничено. Следовательно, $f(X)$ ограничено и замкнуто. Ограниченность $f(X)$ и означает ограниченность функции f. Поскольку замкнутое множество содержит все свои предельные точки, то $\sup\limits_{x\in X} f(x) \in f(X)$ и $\inf\limits_{x\in X} f(x) \in f(X)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

3. Произведение компактных пространств. Здесь будет доказана следующая фундаментальная теорема.

Теорема 11 (А. Н. Тихонов). *Топологическое произведение $X = \prod\limits_{\alpha\in M} X_\alpha$ любой системы $\{X_\alpha\}_{\alpha\in M}$ компактных пространств компактно.*

Доказательство. Используем критерий компактности, состоящий в том, что всякая центрированная система замкнутых подмножеств имеет непустое пересечение. Пусть $\{N^\lambda\} = \sigma_0$ — произвольная центрированная система замкнутых подмножеств в X. Во множестве всех таких систем рассмотрим отношение частичной упорядоченности, заданное включением $\sigma'' \succ \sigma'$, если всякое множество из σ' входит в σ''. Пусть G — множество всех систем σ таких, что $\sigma \succ \sigma_0$. Ясно, что всякое вполне упорядоченное подмножество из G имеет максимальный элемент (объединение). Тогда по лемме Цорна в G имеется максимальная центрированная система $\bar{\sigma}$, т. е. такая система, что для всякой системы $\sigma \in G$ либо $\bar{\sigma} \succ \sigma$, либо $\bar{\sigma}$ и σ несравнимы.

Пусть $\bar{\sigma} = \{N^\gamma\}$. Легко показать, что всякое конечное пересечение элементов $\bar{\sigma}$ принадлежит $\bar{\sigma}$, а также, что всякое замкнутое множество M, пересекающееся с любым N^γ, принадлежит $\bar{\sigma}$. (Проверьте это свойство.) Ясно, что если будет показано, что $\bar{\sigma}$ имеет непустое пересечение, т. е. $\bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma \neq \varnothing$, то доказательство будет закончено. Обозначим через $\pi_\alpha\colon X \to X_\alpha$ проекцию на сомножитель X_α. Для каждого фиксированного α система $\{\pi_\alpha(N^\gamma)\}_{\bar{\sigma}} = \{N^\gamma_\alpha\} = \bar{\sigma}_\alpha$ есть центрированная система (не обязательно замкнутых множеств) в X_α, следовательно, система $\{\overline{N^\gamma_\alpha}\}$ также центрирована, и в силу компактности X_α существует элемент $x_\alpha \in X_\alpha$ такой, что для любой его окрестности $U_\alpha = U(x_\alpha)$ пересечение $U_\alpha \cap N^\gamma_\alpha \neq \varnothing$ для каждого $N^\gamma_\alpha \in \bar{\sigma}_\alpha$.

Рассмотрим теперь элемент $x = \{x_\alpha\} \in X$. Каждая окрестность его $U = U(x)$ содержит замыкание некоторой элементарной окрестности вида

$$p^{-1}_{\alpha_1}(U_{\alpha_1}) \cap p^{-1}_{\alpha_2}(U_{\alpha_2}) \cap \ldots \cap p^{-1}_{\alpha_s}(U_{\alpha_s}) = U_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s},$$

которая, в свою очередь, есть пересечение конечного числа окрестностей вида $p^{-1}_{\alpha_i}(U_{\alpha_i}) = V_{\alpha_i} \subset X$. Ясно, что V_{α_i} пересекается со всеми множествами $N^\gamma \in \bar{\sigma}$, так как $U_{\alpha_i} \cap N^\gamma_{\alpha_i} \neq \varnothing$ при всех γ. Значит, $\bar{V}_{\alpha_i} \in \bar{\sigma}$ и, следовательно,

$$\bar{U}_{\alpha_1, \ldots, \alpha_s} = \bigcap_{i=1}^{s} \bar{V}_{\alpha_i} \in \bar{\sigma}.$$

Отсюда получаем, что окрестность $U = U(x)$ пересекается со всеми $N^\gamma \in \bar{\sigma}$. Из произвольности U заключаем, что $x \in \bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma$ (и, следовательно, $x \in \bigcap_{N^\gamma \in \bar{\sigma}} N^\gamma$). ■

Приведем примеры, в которых использование теоремы Тихонова позволяет быстро установить компактность пространства.

Пример 5. Куб $I^n = \underbrace{[0, 1] \times [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]}_{n}$ — компактное пространство, так как является произведением отрезков.

Пример 6. Ограниченность и замкнутость множества в $\mathbb{R}^n$ эквивалентна компактности. В самом деле, такое множество в $\mathbb{R}^n$ можно заключить в замкнутый параллелепипед $[a_1, b_1] \times \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$, компактность которого устанавливается так же, как в примере 5.

Этим доказана достаточность. Необходимость условия замкнутости была доказана в одной из теорем этого параграфа, а необходимость условия ограниченности отмечена в примере 2.

Упражнения. 4°. Докажите, что сфера S^n компактна.

5°. Убедитесь в компактности n-мерного тора $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}$.

Пример 7. Проективное пространство $\mathbb{R}P^n$ компактно как факторпространство сферы S^n.

Пример 8. Линзовое пространство S^n/Z_p компактно по той же причине. ◆

4. Компактность в метрическом пространстве. Компактные метрические пространства часто называют *компактами*, а компактные подпространства — *компактными множествами* метрического пространства.

Свойство компактности в метрическом пространстве можно выразить на языке сходящихся последовательностей.

Определение 7. Множество Y метрического пространства (X, ρ) называется *секвенциально компактным*, если всякая последовательность его элементов содержит сходящуюся в X подпоследовательность.

Теорема 12. *Множество Y метрического пространства X компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и секвенциально компактно.*

Доказательство. Пусть Y секвенциально компактно и замкнуто. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное множество точек $A_\varepsilon = \{x_k\}$, что шары $D_\varepsilon(x_k)$ с центрами в x_k радиуса ε покрывают Y *. В самом деле, если это не так, то для некоторого ε_0 найдутся точки $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ в Y такие, что $\rho(x_n, x_{n+p}) \geqslant \varepsilon_0$ для всех n, p. Наличие такой последовательности противоречит секвенциальной компактности Y. Таким образом, конечные ε-сети существуют для каждого $\varepsilon > 0$.

Пусть теперь $\{U\}$ — произвольное покрытие Y. Предположим, что из него нельзя выделить конечное подпокрытие. Тогда в любой конечной ε_1-сети A_{ε_1} найдется элемент x_k такой, что замкнутое множество $Y \cap \overline{D}_{\varepsilon_1}(x_k) = Y_1$ не покрывается никакой конечной подсистемой из $\{U\}$. Легко видеть, что множество Y_1 замкнуто и секвенциально компактно и его диаметр не больше $2\varepsilon_1$. Применив аналогичное рассуждение к Y_1, построим множество $Y_2 \subset X_1$ с теми же свойствами, диаметром не больше $2\varepsilon_2 < 2\varepsilon_1$.

* Множество A_ε называют конечной ε-сетью X.

Таким образом, взяв последовательность $\varepsilon_n \to 0$, построим систему $\{Y_n\}$ замкнутых секвенциально компактных множеств $Y_{n+1} \subset \subset Y_n$, диаметры которых стремятся к нулю.

Упражнение 6°. Покажите, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k \neq \varnothing$.

Из последнего факта вытекает, что существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$. Так как $\{U\}$ — покрытие, то $x_0 \in U_\alpha$ для некоторого его элемента U_α. В силу открытости U_α существует $\varepsilon > 0$ такое, что $D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$. Взяв n настолько большим, чтобы диаметр Y_n был меньше ε, получим включения $Y_n \subset D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$ — противоречие с тем, что Y_n не покрывается конечным числом элементов $\{U\}$.

Замкнутость и секвенциальная компактность следуют из замкнутости компактного множества (см. теорему 2) и существования предельной точки у каждой бесконечной последовательности (см. теорему 1). ■

Предлагаем самостоятельно доказать еще следующее полезное утверждение.

Теорема 13 (о лебеговом числе). *Пусть X компактно, $\{U\}$ — произвольное открытое покрытие X. Тогда существует вещественное число $\delta > 0$ такое, что любое множество в X с диаметром, меньшим δ, лежит целиком в некотором элементе покрытия $\{U\}$.*

Упражнение 7°. Пусть метрическое пространство X компактно, $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение в метрическое пространство Y. Докажите, что для всякого покрытия $U = \{U_\alpha\}$ пространства Y существует лебегово число $\delta = \delta(U)$ такое, что для всякого подмножества A в X с диаметром, меньшим δ, образ $f(A)$ целиком содержится в некотором элементе покрытия U.

В анализе одним из важных является вопрос о компактности множеств в функциональных пространствах. Существует целый ряд специальных критериев компактности в конкретных пространствах. В частности, для широко используемого в анализе пространства $C_{[0,1]}$ такой критерий дает теорема Арцела [33].

§ 14. Компактные расширения топологических пространств. Метризация

1. Компактные расширения. Свойство компактности оказывается весьма полезным и удобным во многих вопросах. В связи с этим естественно поставить вопрос о конструкции, которая позволяла бы по данному некомпактному пространству построить компакт-