Таким образом, взяв последовательность $\varepsilon_n \to 0$, построим систему $\{Y_n\}$ замкнутых секвенциально компактных множеств $Y_{n+1} \subset \subset Y_n$, диаметры которых стремятся к нулю.

Упражнение 6°. Покажите, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k \neq \varnothing$.

Из последнего факта вытекает, что существует точка $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} Y_k$. Так как $\{U\}$ — покрытие, то $x_0 \in U_\alpha$ для некоторого его элемента U_α. В силу открытости U_α существует $\varepsilon > 0$ такое, что $D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$. Взяв n настолько большим, чтобы диаметр Y_n был меньше ε, получим включения $Y_n \subset D_\varepsilon(x_0) \subset U_\alpha$ — противоречие с тем, что Y_n не покрывается конечным числом элементов $\{U\}$.

Замкнутость и секвенциальная компактность следуют из замкнутости компактного множества (см. теорему 2) и существования предельной точки у каждой бесконечной последовательности (см. теорему 1). ■

Предлагаем самостоятельно доказать еще следующее полезное утверждение.

Теорема 13 (о лебеговом числе). *Пусть X компактно, $\{U\}$ — произвольное открытое покрытие X. Тогда существует вещественное число $\delta > 0$ такое, что любое множество в X с диаметром, меньшим δ, лежит целиком в некотором элементе покрытия $\{U\}$.*

Упражнение 7°. Пусть метрическое пространство X компактно, $f: X \to Y$ — непрерывное отображение в метрическое пространство Y. Докажите, что для всякого покрытия $U = \{U_\alpha\}$ пространства Y существует лебегово число $\delta = \delta(U)$ такое, что для всякого подмножества A в X с диаметром, меньшим δ, образ $f(A)$ целиком содержится в некотором элементе покрытия U.

В анализе одним из важных является вопрос о компактности множеств в функциональных пространствах. Существует целый ряд специальных критериев компактности в конкретных пространствах. В частности, для широко используемого в анализе пространства $C_{[0,1]}$ такой критерий дает теорема Арцела [33].

§ 14. Компактные расширения топологических пространств. Метризация

1. Компактные расширения. Свойство компактности оказывается весьма полезным и удобным во многих вопросах. В связи с этим естественно поставить вопрос о конструкции, которая позволяла бы по данному некомпактному пространству построить компактное пространство, содержащее данное, и исследовать взаимосвязи топологий, свойства функций на этих пространствах и др.

Определение 1. *Компактным расширением* топологического пространства X называется такое компактное пространство CX, что $X \subset CX$ и топология пространства X индуцирована топологией пространства CX.

Классическим примером компактного расширения служит расширенная плоскость комплексного переменного $\tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, гомеоморфная S^2 (см. п. 2 § 3 гл. I); аналогичным образом (с помощью стереографической проекции) получаем компактные расширения $C\mathbb{R}^1$, $C\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, гомеоморфные соответственно S^1 и S^n.

На весьма широкое понятие компактного расширения топологического пространства X часто накладывают дополнительные требования типа хаусдорфовости CX, всюду плотности X в CX, «максимальности» или «минимальности» CX и другие. Ниже мы рассмотрим наиболее простой способ «одноточечной компактификации», впервые исследованный П. С. Александровым. Компактное расширение строится присоединением к пространству X дополнительного элемента ξ (обозначаемого часто ∞) так, что $CX = X \cup \xi$.

Определение 2. Пространство $CX = X \cup \xi$ с топологией $\sigma = \{U\}$, состоящей из всех открытых множеств $U = W$ пространства X и всех множеств вида $U = V \cup \xi$, где V — открытое множество в X, дополнительное к замкнутому компактному подмножеству пространства X, называется *одноточечным компактным расширением* пространства X.

Упражнение 1°. Проверьте, что система множеств $\sigma = \{U\}$ удовлетворяет аксиомам топологии.

Следующее предложение оправдывает название компактного расширения $CX = X \cup \xi$.

Теорема 1. *Одноточечное компактное расширение $CX = X \cup \xi$ является компактным пространством.*

Доказательство. Пусть $\{U_\alpha\}$ — открытое покрытие пространства CX, где $U_\alpha = W_\alpha$ или $U_\alpha = V_\alpha \cup \xi$; W_α, V_α — открытые множества в X, $V_\alpha = X \backslash K_\alpha$, K_α — компактное и замкнутое множество в X. Пусть $U_{\alpha_0} = V_{\alpha_0} \cup \xi$ — некоторое множество покрытия, тогда $V_{\alpha_0} \cap K_{\alpha_0} = \varnothing$ и, следовательно, $\{U_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ — открытое в CX покрытие K_{α_0} и $\{V_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ — открытое в X покрытие K_{α_0}. В силу компактности K_{α_0} из покрытия $\{V_\alpha\}_{\alpha \neq \alpha_0}$ можно выделить конечное покрытие $\{V_{\alpha_1}, \ldots, V_{\alpha_s}\}$, $\alpha_i \neq \alpha_0$, $i = 1, \ldots, s$, множества K_{α_0}. Тогда система множеств $\{U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_s}, U_{\alpha_0}\}$, очевидно, образует открытое покрытие пространства CX, что и доказывает компактность пространства CX. ■

Замечание. Если X компактно, то одноточечное компактное расширение $CX = X \cup \xi$ имеет изолированную точку ξ. Действительно, полагая $K = X$, $V = X \setminus K = \varnothing$, получаем открытую окрестность точки ξ: $U(\xi) = \xi$, состоящую из одной точки. Верно и обратное утверждение: если точка ξ в CX изолированная, то X компактно (докажите!).

Приведенные в начале пункта примеры компактных расширений $\bar{\mathbb{C}}$, $C\mathbb{R}^1$, $C\mathbb{R}^n$ являются примерами одноточечных компактных расширений.

Теорема 2. *Одноточечное компактное расширение CX является хаусдорфовым пространством тогда и только тогда, когда X хаусдорфово и локально компактно.*

Доказательство. Пусть X хаусдорфово и локально компактно. Если $x, y \in CX$ — различные точки из подпространства X, то они отделимы друг от друга открытыми множествами $W_1(x)$, $W_2(y)$ в X, а следовательно, и в CX. Если же $x = \xi$, а $y \in X$, то, выбрав окрестность $W(y)$ с компактным замыканием $\overline{W}$ в X, построим множество $U(\xi) = (CX) \setminus \overline{W}(y)$, которое является открытой окрестностью в CX точки ξ, так как $U(\xi) = (X \setminus \overline{W}(y)) \cup \xi$. Очевидно, имеем $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$, что завершает доказательство хаусдорфовости CX.

Обратно: пусть CX — хаусдорфово пространство; тогда для точек $x = \xi$, $y \in X$ существуют в CX открытые окрестности $U(\xi)$, $W(y)$ такие, что $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$. При этом $U(\xi) = V \cup \xi$, где $V = X \setminus K$, K — компактное и замкнутое множество в X, $W(y)$ — открытое множество в X. Из условия $U(\xi) \cap W(y) = \varnothing$ следует $W(y) \subset K$, откуда имеем $\overline{W}(y) \subset K$, где $\overline{W}(y)$ — замыкание $W(y)$ в X. Так как замкнутое подмножество компактного пространства компактно, то $\overline{W}(y)$ компактно в X, что завершает доказательство локальной компактности X. Так как свойство хаусдорфовости пространства наследуется подпространством, то подпространство X хаусдорфова пространства CX хаусдорфово. ■

Нетрудно убедиться, что для некомпактного пространства X и его хаусдорфова одноточечного компактного расширения CX подпространство X всюду плотно в CX (т. е. $\overline{X} = CX$, где $\overline{X}$ — замыкание множества X в пространстве CX).

Заметим в заключение, что для некомпактного X хаусдорфово одноточечное компактное расширение $CX = X \cup \xi$ является наименьшим по упорядоченности $\geqslant$ в классе хаусдорфовых компактных расширений, и в то же время для X существует максимальное хаусдорфово компактное расширение (расширение Стоуна—Чеха).

2. Метризуемость топологических пространств. Обсудим вопрос о введении метрики в топологическом пространстве, которая бы индуцировала ту же самую топологию. Топологические пространства, в которых возможно ввести такую метрику, называются *метризуемыми*. В частности, для метрического пространства может идти речь о введении другой метрики, порождающей первоначальную топологию, но более удобной, например, такой, в которой пространство будет полным. Такие метрические пространства называют *топологически полными*.

Примером топологически полного метрического пространства является интервал $(a, b) \subset \mathbb{R}^1$, в частности, $X = (-1, 1)$. Кроме стандартной метрики $\rho(x, y) = |x - y|$, в которой (X, ρ) не полно, введем топологически полную эквивалентную метрику

$$\rho_*(x, y) = \left| \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \right|,$$

индуцированную гомеоморфизмом интервала и прямой (расстояние между точками интервала в метрике ρ_* вычисляется как расстояние в обычной метрике между их образами на прямой). Легко проверить, что ρ_* — метрика, что (X, ρ) и (X, ρ_*) гомеоморфны и что (X, ρ_*) — полное метрическое пространство. Примером топологически неполного метрического пространства может служить множество рациональных чисел с метрикой из $\mathbb{R}^1$.

Тихоновское произведение счетного числа метрических пространств (X_n, ρ_n) метризуемо. Действительно, если $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ — элементы из $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$, то метрику можно задать формулой

$$\bar{\rho}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{\rho_n(x_n, y_n)}{1 + \rho_n(x_n, y_n)}.$$

Упражнение 2°. Убедитесь, что $\bar{\rho}$ — метрика и что индуцируемая ею топология эквивалентна тихоновской топологии. В частности, тихоновский куб I^∞ (счетное произведение отрезков I) — метризуемое топологическое пространство.

Приведем без доказательства следующие важные теоремы.

Теорема 3 (Урысон). *Регулярное пространство со счетной базой метризуемо.*

Теорема 4 (Стоун). *Метризуемое топологическое пространство паракомпактно.*

3. Топология пространств подмножеств и многозначные отображения. В современном анализе, теории оптимального управления, теории игр и математической экономике интенсивно изучаются и находят приложения многозначные отображения (кратко: м-отображения) топологических пространств $f: X \to Y$, отображения, значения $f(x)$ которых — непустые подмножества в Y.

Если введем совокупность $P(Y)$ всех непустых подмножеств из Y, то естественно возникает однозначное отображение $\tilde{f}$: $X \to P(Y)$, действующее по правилу $\tilde{f}(x) = f(x) \in P(Y)$; верно и обратное. При этом удобно рассматривать совокупность всех замкнутых подмножеств $C(Y)$ или компактных $K(Y)$ в качестве областей значений отображений $\tilde{f}: X \to C(Y)$ или $\tilde{f}: X \to K(Y)$. Чтобы применить методы топологии для изучения отображений $\tilde{f}$ (а следовательно, и f), необходимо в $C(Y)$, $K(Y)$ ввести топологию.

Это достигается различными способами.

1) Пространство $\varkappa(Y)$ — это $C(Y)$ с топологией, определяемой базой $\{C(U)\}$, где U — любое открытое множество в Y $(U \in \tau_Y)$.

2) Пространство $\lambda(Y)$ — это $C(Y)$ с топологией, определяемой предбазой $\{C(Y)\setminus C(Y\setminus U)\}$, где $U \in \tau_Y$.

3) Пространство Exp (Y) — это $C(Y)$, предбаза топологии которого состоит из объединения базы $\{C(U)\}$ и предбазы $\{C(Y)\setminus C(Y\setminus U)\}$.

Отметим, что топологии $\varkappa$, λ, Exp называются соответственно *полуконечной сверху, полуконечной снизу, экспоненциальной* топологией.

4) Пусть (Y, ρ) — метрическое пространство, $C_0(Y)$ — совокупность всех непустых ограниченных замкнутых подмножеств в Y.

Так как $C_0(Y) \subset C(Y)$, то в $C_0(Y)$ индуцируется каждая из топологий $\varkappa$, λ, Exp. Однако важным фактом является возможность ввести метрику в $C_0(Y)$. Именно, определяется так называемая метрика Хаусдорфа $h(A, B)$, задающая в $C(Y)$ метрическую топологию: $h(A, B) = \max\{\rho_*(A, B), \rho_*(B, A)\}$, где $\rho_*(A, B) = \sup \rho(a, B)$, $a \in A$, — отклонение множества A от B (здесь $A, B \in C_0(Y)$).

Заметим, что если Y — компактное метрическое пространство, то топология, индуцированная в $C_0(Y) = C(Y)$ метрикой Хаусдорфа, эквивалентна экспоненциальной топологии на $C(Y)$, что в терминах п. 2 означает метризуемость пространства Exp (Y).

Таким образом, можно рассматривать м-отображения как отображения $f: X \to C(Y)$, $f: X \to C_0(Y)$ (мы далее не различаем f и $\tilde{f}$) в топологические пространства $C(Y)$, $C_0(Y)$ с той или иной топологией.

Определение 3. м-отображение $f: X \to Y$ называется: 1) *полунепрерывным сверху*, 2) *полунепрерывным снизу*, 3) *непрерывным*, если отображение $f: X \to C(Y)$ непрерывно соответственно в топологии: 1) $\varkappa(Y)$; 2) $\lambda(Y)$; 3) Exp (Y).

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическими курсами по общей топологии являются [2, 5, 15, 31, 39, 64, 85].

Популярное изложение основных топологических понятий имеется в [14, 26, 69].

Очерк основных понятий и конструкций общей топологии дан в [13].

Задачники по материалу гл. II — [12, 48, 52].

Начальные сведения по метрическим пространствам — [33, 40].

Классификация замкнутых двумерных поверхностей — [27, 43].

Для изучения компактных пространств рекомендуем первоисточник [4].

Дальнейшие сведения о топологии м-отображений и некоторых приложениях можно найти, например, в учебном пособии [87].