Глава III

Теория гомотопий

Один из основных методов топологии состоит в изучении геометрических свойств топологических пространств алгебраическими средствами. Для этой цели в топологии разработан ряд приемов, позволяющих поставить в соответствие топологическому пространству алгебраические объекты, например, группы, кольца и др. В основе алгебраической топологии лежит как раз идея такого соответствия (или функтора), сопоставляющего совокупности топологических пространств совокупность некоторых алгебраических объектов, а непрерывным отображением пространств — соответствующие гомоморфизмы. Такой функториальный подход позволяет превратить топологическую задачу в соответствующую ей алгебраическую. Разрешимость этой «производной» алгебраической задачи во многих случаях позволяет судить о разрешимости исходной топологической задачи.

Одно из первых понятий, возникших на этом пути, — понятие фундаментальной группы топологического пространства; позднее возникло более общее понятие гомотопических групп. Их изучению и посвящена настоящая глава.

§ 1. Пространство отображений. Гомотопия, ретракция, деформация

В этом параграфе изучается множество всех непрерывных отображений одного топологического пространства в другое. В этом множестве можно ввести различные топологии и превратить его тем самым в различные топологические пространства. Особенно важен вопрос о связности этого пространства, что естественно приводит к понятию гомотопных отображений. Рассмотрение специальных классов отображений и их гомотопий приводит к понятиям деформации одного пространства в другое, ретракции и др. Все эти понятия играют важную роль в гомотопической топологии.

1. Пространство непрерывных отображений. Рассмотрим множество $C(X, Y)$ всех непрерывных отображений из топологического пространства X в топологическое пространство Y. Свойства этого множества и многие свойства пространств X, Y взаимосвязаны. Простой пример: если X одноточечно, то $C(X, Y) \simeq Y$, где знак $\simeq$ означает биекцию.

В множестве $C(X, Y)$, как и во всяком множестве, можно вводить топологию различными способами. Возникает вопрос: как ввести топологию в $C(X, Y)$ наиболее естественным образом? В этом вопросе помогает интуитивное представление о близости отображений; отображения f_1, f_2 близки, если близки в Y образы $f_1(x)$ и $f_2(x)$ для всякой точки $x \in X$. Если Y — метрическое пространство, то эти понятия реализуются в терминах метрики Y. На этой основе в множестве $C(X, Y)$ вводятся различные топологии: топология поточечной сходимости, топология равномерной сходимости и др.

Если (Y, ρ) — метрическое пространство, а X компактно, то множество $C(X, Y)$ снабжается метрикой μ следующим образом:

$$\mu(f_1, f_2) = \sup_{x \in X} \rho(f_1(x), f_2(x)), \qquad f_1, f_2 \in C(X, Y).$$

Определение 1. Топология τ_μ в $C(X, Y)$, определяемая метрикой μ, называется *топологией равномерной сходимости.*

Упражнения. 1°. Проверьте аксиомы метрики для μ.

2°. Рассмотрите сходящуюся последовательность $f_n^\mu \to f$ в $C(X, Y)$ и дайте эквивалентное определение сходимости в терминах топологии в Y. В случае $X = [0, 1]$ сравните эту сходимость с равномерной сходимостью в $C_{[0,1]}$.

Определение 2. Рассмотрим в $C(X, Y)$ множества

$$\{x_i, U_i\}_{i=1}^k = \{f \in C(X, Y): f(x_i) \in U_i, \quad i = 1, \ldots, k\},$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$, $U_1, \ldots, U_k$ — открытые множества в Y. Топология τ_ρ, порожденная такими множествами как предбазой, называется *топологией поточечной сходимости в* $C(X, Y)$.

Упражнения. 3°. Проверьте, что множества вида $\{x_i, U_i\}_{i=1}^k$ и их конечные пересечения удовлетворяют критерию базы.

4°. Рассмотрите сходящуюся последовательность $\{f_n\}$ к f в данной топологии и докажите, что ее сходимость эквивалентна сходимости последовательностей $f_n(x) \to f(x)$ для каждой точки $x \in X$.

5°. Даны множество $\{Y_x\}_{x \in X}$ экземпляров пространства Y, занумерованных элементами $x \in X$, и тихоновское произведение $\prod_{x \in X} Y_x$.

Покажите, что множество $C(X, Y)$ можно отождествить с подмножеством из этого произведения и что топология произведения индуцирует на $C(X, Y)$ топологию τ_2 поточечной сходимости.

Следующее определение дает другой вариант топологии в множестве $C(X, Y)$.

Определение 3. Рассмотрим всевозможные множества отображений вида

$$[K, U] = \{f \in C(X, Y)\colon f(K) \subset U\},$$

где K — компактное множество в X, а U — открытое множество в Y. Топология τ_c, порожденная такими множествами $[K, U]$ как предбазой, называется *компактно открытой* топологией в $C(X, Y)$.

Упражнения. 6°. Проверьте, что система множеств $[K, U]$ и их конечных пересечений удовлетворяет критерию базы.

7° Покажите, что $\tau_\rho \prec \tau_c$, а в случае метрического пространства $\tau_c \prec \tau_\mu$.

8°. Докажите, что если Y — метрическое пространство, а X компактно, то компактно открытая топология совпадает с топологией равномерной сходимости.

9°. Если X — некомпактное пространство, а Y — метрическое пространство, то часто рассматривают последовательности отображений, сходящиеся равномерно на каждом компактном подмножестве X. Покажите, что эта сходимость эквивалентна сходимости в компактно открытой топологии.

10°. Докажите, что если (Y, ρ) — полное метрическое пространство, то пространство $C(X, Y)$ есть полное метрическое пространство в метрике μ.

11°. Покажите, что если X локально компактно, а Z — хаусдорфово, то пространства $C(X \times Z, Y)$ и $C(Z, C(X, Y))$ гомеоморфны в компактно открытой топологии.

Пространство $C(X, Y)$ обозначают часто Y^X. Тогда утверждение упражнения 11° можно записать в виде $Y^{X \times Z} \simeq (Y^X)^Z$ (*экспоненциальный закон*).

В качестве примера рассмотрим пространство ω-периодических непрерывных функций, заданных на числовой оси $\mathbb{R}^1$. В силу периодичности каждая такая функция f полностью определяется своими значениями на отрезке $[0, \omega]$, причем $f(0) = f(\omega)$. Поэтому фактически мы рассматриваем множество функций на отрезке $[0, \omega]$ со «склеенными» концами, или, что то же, на окружности S^1. Это множество $C(S^1, \mathbb{R}^1)$, в котором можно ввести каждую из топологий τ_μ, τ_ρ, τ_c.

Аналогично можно рассмотреть пространство функций на торе

$$T^n\colon C(T^n, \mathbb{R}^1) = C(\underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n}, \mathbb{R}^1),$$

которое можно использовать как пространство периодических функций n переменных.

В теории гомотопий, как правило, рассматривают $C(X, Y)$ с компактно открытой топологией.

2. Гомотопия. Во многих задачах оказывается возможным не различать отображения, одно из которых можно «плавно» изменить, продеформировать в другое. Непрерывную деформацию одного отображения в другое естественно мыслить как путь в пространстве $C(X, Y)$, начинающийся и кончающийся в заданных точках f_1 и f_2. Брауэр уточнил понятие непрерывной деформации с помощью следующего понятия гомотопии.

Определение 4. Два непрерывных отображения, f_0, $f_1 \in C(X, Y)$, называтюся *гомотопными* ($f_0 \sim f_1$), если существует такое непрерывное отображение $f: X \times [0, 1] \to Y$, что $f(x, 0) = f_0(x)$, $f(x, 1) = f_1(x)$ для всех $x \in X$.

Отображение f часто называют *гомотопией*, соединяющей отображения f_0 и f_1.

Таким образом, если $f_0 \sim f_1$, то найдется такое семейство отображений $f_t: X \to Y$, зависящее от числового параметра $t \in [0, 1]$ и соединяющее отображения f_0 и f_1, что индуцированное этим семейством по правилу $(x, t) \to f_t(x)$ отображение $X \times [0, 1] \to Y$ непрерывно. Очевидно и обратное.

Упражнение 12°. Покажите, что задание гомотопии f: $X \times [0, 1] \to Y$ эквивалентно заданию пути s в $C(X, Y)$ (топология τ_c, X локально компактно).

Пример 1. Пусть $X = Y = \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$ для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Определим $F: \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$ по формуле $F(x, t) = (1 - t)x$, $t \in I$. Легко видеть, что F — гомотопия между f_0 и f_1.

Пример 2. Пусть X — произвольное пространство, Y — выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $f_0, f_1 \in C(X, Y)$ — произвольные непрерывные отображения. Тогда отображение $F: X \times I \to Y$, заданное по формуле $F(x, t) = tf_1(x) + (1 - t)f_0(x)$, является гомотопией между f_0 и f_1. ◆

Заметим, что понятие гомотопии связано с задачей о продолжении отображений. В самом деле, пусть $f, g: X \to Y$ — непрерывные отображения. Зададим отображение $\varphi: X \times \{0\} \cup X \times \{1\} \to Y$ формулами $\varphi(x, 0) = f(x)$; $\varphi(x, 1) = g(x)$. Легко видеть, что $f \sim g$ тогда и только тогда, когда существует продолжение φ на $X \times [0, 1]$.

Теорема 1. *Гомотопия является отношением эквивалентности на множестве $C(X, Y)$.*

Доказательство. Рефлексивность ($f \sim f$) устанавливается при помощь гомотопии: $F(x, t) \equiv f(x)$.

Симметричность: пусть $f_0 \sim f_1$ с гомотопией $F(x, t)$. Тогда $\tilde{F}(x, t) = F(x, 1 - t)$ определяет гомотопию от f_1 до f_0, т. е. $f_1 \sim f_0$.

Транзитивность: пусть $f_0 \sim f_1$, $f_1 \sim f_2$ с гомотопиями $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ соответственно. Тогда отображение

$$H(x, t) = \begin{cases} F_1(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ F_2(x, 2t - 1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

непрерывно, так как его ограничение на каждое из замкнутых множеств $X \times [0, 1/2]$, $X \times [1/2, 1]$ непрерывно. Легко видеть, что $H(x, t)$ — гомотопия между f_0 и f_1. ■

Классы эквивалентности гомотопных отображений называются *гомотопическими классами*. Фактормножество $C(X, Y)/R$ обозначается через $\pi(X, Y)$. Легко видеть, что $\pi(X, Y)$ есть множество компонент линейной связности пространства $C(X, Y)$. Гомотопический класс отображения $f \in C(X, Y)$ обозначается через $[f]$.

Определение 5. Отображение $f \in C(X, Y)$ называется *гомотопической эквивалентностью*, если существует отображение $g \in C(X, Y)$ такое, что $gf \sim 1_X$, $fg \sim 1_Y$.

Определение 6. Говорят, что пространство X *гомотопически эквивалентно* пространству Y или что X и Y имеют *одинаковый гомотопический тип*, если в $C(X, Y)$ существует гомотопическая эквивалентность.

Понятие гомотопической эквивалентности является полезным «огрублением» понятия гомеоморфизма двух пространств. Действительно, если $f\colon X \to Y$ — гомеоморфизм, то, положив $g = f^{-1}\colon y \to X$, будем иметь $gf = 1_X$, $fg = 1_Y$ — получаем гомотопическую эквивалентность X и Y. В связи с этим отображение g в определении гомотопической эквивалентности называют *гомотопически обратным к f*.

Пример самого простого (не пустого) топологического пространства — одна точка. Возникает вопрос: какие пространства имеют гомотопический тип точки?

Определение 7. Пространство X называется *стягиваемым*, если тождественное отображение $1_X\colon X \to X$ гомотопно постоянному отображению (отображению X в точку $x_0 \in X$). Гомотопия между ними называется *стягиванием* пространства X (в точку x_0).

Упражнение 13°. Докажите, что любые два отображения пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопны между собой.

Теорема 2. *Пространство стягиваемо тогда и только тогда, когда оно имеет тип одноточечного пространства.*

Доказательство. Пусть X стягиваемо и $\Phi\colon X \times I \to X$ — стягивание X к точке $x_0 \in X$. Обозначим через Q одноточечное пространство, состоящее из точки x_0. Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — отображение в точку x_0, $j\colon Q \to X$ — вложение. Тогда $\varphi j = 1_Q$, а Φ — гомотопия, связывающая 1_X и $j\varphi$. Таким образом, φ — гомотопическая эквивалентность между X и Q. Обратное утверждение предоставляем доказать читателю. ■

Упражнения. 14°. Докажите, что всякое выпуклое подмножество в $\mathbb{R}^n$ (в частности, само $\mathbb{R}^n$) стягиваемо.

15°. Докажите, что пространство $X \times Y$ стягиваемо, если X и Y — стягиваемые пространства.

3. Продолжение отображений. Рассмотрим теперь задачу распространения (продолжения) отображений. Ее можно сформулировать так: можно ли данное отображение $f\colon A \to Y$, определенное на подпространстве A пространства X, распространить на все пространство X, т. е. существует ли такое отображение $\Phi\colon X \to Y$, что его сужение $\varphi\big|_A\colon A \to Y$ совпадает с отображением f? Такое отображение φ называют *продолжением отображения* f.

Решение этой задачи получено лишь в некоторых частных случаях. Полной теории продолжения до сих пор не существует. Одним из примеров частного решения этой задачи является теорема Титце—Урысона для нормальных пространств, приведенная в § 12 гл. II.

Следующая теорема устанавливает связь между задачей продолжения и понятием гомотопии.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi\colon S^n \to Y$ *— некоторое непрерывное отображение единичной сферы. Тогда следующие два условия эквивалентны:*

(i) *отображение* φ *гомотопно постоянному отображению;*

(ii) *отображение* φ *можно продолжить на весь шар* $\overline{D}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Доказательство. (i) $\Rightarrow$ (ii). Пусть $f \sim c$, где c — постоянное отображение S^n в точку $p \in Y$. Пусть $F\colon S^n \times I \to Y$ — гомотопия между f и c. Зададим продолжение f' отображения f на шар $\overline{D}^{n+1}$ следующим образом:

$$f'(x) = \begin{cases} p, & 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2; \\ F\big(x/\|x\|, 2 - 2\|x\|\big), & 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $f'\big|_{S^n} = f$; f' непрерывно, так как непрерывны его сужения на каждое из замкнутых множеств

$$\{x \in \overline{D}^{n+1}\colon 0 \leqslant \|x\| \leqslant 1/2\}, \quad \{x \in \overline{D}^{n+1}\colon 1/2 \leqslant \|x\| \leqslant 1\}.$$

(ii) $\Rightarrow$ (i). Пусть задано f' — продолжение f на весь шар $\overline{D}^{n+1}$. Пусть $y_0 \in S^n$. Зададим отображение $\Phi\colon S^n \times I \to Y$ следующим образом:

$$\Phi(x, t) = f'[(1 - t)x + ty_0].$$

Ясно, что $\Phi(x, 0) = f'(x) = f(x)$, $\Phi(x, 1) = f'(y_0) = p \in Y$, поэтому $\Phi(x, t)$ — нужная гомотопия. ∎

Упражнения. 16°. Покажите, что всякое отображение f пространства X в стягиваемое пространство Y гомотопно постоянному отображению (ср. с упр. 13°).

17°. Воспользовавшись результатом предыдущего упражнения, выясните из теоремы 3, что всякое отображение сферы S^n в стягиваемое пространство продолжается на весь шар $\overline{D}^{n+1}$.

4. Ретракция. Частным случаем задачи о продолжении является задача о ретракции, формулируемая следующим образом.

Определение 8. Пусть A — подпространство X, $1_A\colon A \to A$ — тождественное отображение. Если существует отображение $r\colon X \to A$ такое, что $r\big|_A = 1_A$, то его называют *ретракцией* X на A, а пространство A — *ретрактом* X.

Упражнения. 18°. Убедитесь, что всякая точка топологического пространства X является ретрактом X.

19°. Убедитесь, что всякое линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$ является ретрактом $\mathbb{R}^n$.

20°. Если $Z = X \times Y$ — тихоновское произведение пространств и $p \in X$, $q \in Y$ — фиксированные точки, то $A = X \times q$, $B = p \times Y$ — ретракты пространства $X \times Y$, а отображения r_X: $(x, y) \to (x, q)$; r_X: $(x, y) \to (p, y)$ — соответствующие ретракции.

21°. Покажите, что нульмерная сфера $S^0 = \{-1, 1\}$ не является ретрактом одномерного диска $\overline{D}^1 = [-1, 1]$.

Указание. Воспользуйтесь свойствами связных пространств.

Определение 9. Если существует отображение $r: X \to A$ такое, что $r\big|_A \sim 1_A$, то A называется *слабым ретрактом* X, а r — *слабой ретракцией* X на A.

Легко видеть, что ретракт всегда является слабым ретрактом. Обратное же, вообще говоря, неверно, как показывает следующее упражнение.

Упражнение 22°. Дан квадрат $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$ и его подмножество A — «гребенка», состоящая из вертикальных отрезков с основаниями в точках $(1/n, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$; $(0, 0)$ и основания квадрата (рис. 63). Покажите, что: 1) множество A не является ретрактом квадрата I^2; 2) A — слабый ретракт I^2; 3) если в «гребенке» A оставить конечное число зубьев, то полученное множество A' — ретракт I^2.

Определение 10. *Деформацией* пространства X в подпространство A, $A \subset X$, называется гомотопия $D: X \times I \to X$ такая, что $D(x, 0) = x$, $D(x, 1) \in A$ для всех $x \in X$.

Определение 11. Если существует такая деформация X в A $D: X \times I \to X$, что $D(x, t) = x$ для $x \in A$, $t \in I$, то A называется *сильным деформационным ретрактом* X, а D — *сильной деформационной ретракцией*.

Пример 3. Точка является сильным деформационным ретрактом всякого содержащего ее выпуклого подмножества $\mathbb{R}^n$.

Другие примеры сильных деформационных ретрактов приведены в следующих упражнениях.

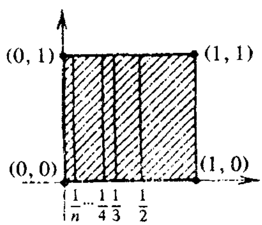

Рис. 63

Упражнения. 23°. Пусть пространство X стягиваемо в точку $x_0 \in X$. Покажите, что $x_0 \times Y$ — сильный деформационный ретракт произведения $X \times Y$. В частности, рассмотрите двумерный цилиндр и покажите, что его основание есть сильный деформационный ретракт.

24°. Убедитесь, что вершина конуса в трехмерном пространстве — сильный деформационный ретракт конуса.

25°. Покажите, что сильный деформационный ретракт A пространства X гомотопически эквивалентен X.

Указание. Вложение $i\colon A \to X$ и ретракция $D(x, 1)$ пространства X на A гомотопически обратны.

5. Цилиндр отображения. Рассмотрим сначала некоторые операции над топологическими пространствами.

Топологическая (*несвязная,* или *дизъюнктивная*) *сумма* $X \sqcup Y$ *пространств* X, Y определяется как объединение непересекающихся экземпляров в X и Y.

Топология в $X \sqcup Y$ определяется так: V открыто в $X \sqcup Y$ тогда и только тогда, когда $V \cap X$ и $V \cap Y$ открыты в X и Y соответственно.

Если $f\colon A \to Y$ — непрерывное отображение, где $A \subset X$, то можно склеить X и Y по отображению f. С этой целью в $X \sqcup Y$ введем отношение эквивалентности R: $x \sim y$, если $x \in A$, $y \in Y$ и $f(x) = y$; $x_1 \sim x_2$, если $x_1, x_2 \in A$ и $f(x_1) = f(x_2)$.

Факторпространство пространства $X \sqcup Y$ по эквивалентности R обозначается $X \underset{f}{\cup} Y$ и называется *склейкой пространств* X *и* Y *по отображению* f. Если, в частности, A есть точка $x_0 \in X$, а отображение $f\colon X \to Y$ переводит x_0 в $y_0 = f(x_0)$, то склейка $X \underset{f}{\cup} Y$ называется *букетом пространств* X, Y и обозначается $X_{x_0} \vee_{y_0} Y$. Легко видеть, что это факторпространство несвязной суммы $X \sqcup Y$ по отношению эквивалентности, склеивающему точки $x_0 \in X$ и $y_0 \in Y$.

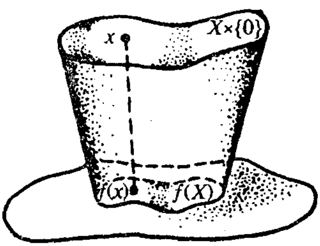

Рис. 64

Упражнения. 26°. Покажите, что гомотопический тип букета $X_{x_0} \vee_{y_0} Y$ совпадает с гомотопическим типом пространства Y, если X стягиваемо к точке $x_0 \in X$.

27°. Докажите, что отрезок $I = [0, 1]$ и букет $I_0 \vee_{p_0} S^1$, где $p_0 \in S^1$, $0 \in I$, имеют разный гомотопический тип.

Определение 12. Пусть $f\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Тогда можно считать, что задано отображение $\varphi\colon X \times \{1\} \to Y$, $\varphi(x, 1) = f(x)$, где $X \times \{1\}$ — подпространство $X \times I$. *Цилиндром* Z_f *отображения* $f\colon X \to Y$ называется склейка $(X \times I) \underset{\varphi}{\cup} Y$ пространств $X \times I$ и Y по отображению φ.

Цилиндр отображения можно представить в виде, изображенном на рис. 64.

Понятие цилиндра отображения важно ввиду того, что X, Y можно считать подпространством Z_f. Таким образом, отображение f как бы заменяется вложением X в Z_f. Отметим также, что Y — сильный деформационный ретракт Z_f, а вложение Y в Z_f является гомотопической эквивалентностью (проверьте!).

Определение 13. Цилиндр постоянного отображения $c: X \to p$ называется *конусом над пространством* X и обозначается CX.

Теорема 4. *Отображение $f: X \to Y$ тогда и только тогда гомотопно постоянному, когда существует продолжение $\tilde{f}: CX \to Y$ отображения f.*

Доказательство. Если f гомотопно постоянному отображению $c_0: X \to (*)$, то

$$F: X \times I \to Y, \quad F(x, 0) = x, \quad F(x, 1) = (*).$$

Таким образом, на верхнем основании цилиндра $X \times I$ F постоянно, следовательно, оно индуцирует отображение F факторпространства $(X \times I)/R$, где R означает склейку верхнего основания в точку. Но пространство $(X \times I)/R$ гомеоморфно CX (проверьте!).

Обратное утверждение предоставим доказать читателю. ∎

Упражнения. 28°. Пусть отображение $f: A \to Y$ непрерывно, $A \subset X$ замкнуто в X; X, Y — нормальные пространства. Докажите, что $X \underset{f}{\cup} Y$ нормально.

29°. Докажите, что $f: A \to Y$ тогда и только тогда можно продолжить на все $X (A \subset X)$, когда Y — ретракт $X \underset{f}{\cup} Y$.

§ 2. Категория, функтор и алгебраизация топологических задач

Категорное описание воплощает такой подход к математическому объекту, при котором этот объект, например, группа или пространство, рассматривается не изолированно, а как член совокупности подобных себе объектов. Интуитивно категорию можно представить себе как совокупность множеств (возможно, с дополнительной структурой) и отображений, согласованных с этой структурой. Соответствия между элементами разных категорий, подчиненные специальным правилам, называют *функторами*.

1. Категория.

Определение 1. Говорят, что задана *категория* $\mathcal{A}$, если заданы: 1) некоторая совокупность объектов; 2) для каждой упорядоченной пары объектов X, Y — множество $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ морфизмов* из X в Y; 3) отображение, ставящее в соответствие всякой упорядоченной тройке X, Y, Z объектов и всякой паре морфизмов

* При этом подразумевают, что $\mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cap \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X', Y') = \varnothing$, когда $X \neq X'$ или $Y \neq Y'$.