существует (иначе нарушалась бы коммутативность диаграммы). В этом случае не существует продолжения $\overline{\varphi}$ отображения φ.

§ 3. Функторы гомотопических групп

В этом параграфе мы вернемся к изучению вопросов, касающихся пространств отображений. Оказывается, что в некоторых случаях множество $\pi(X, Y)$ является группой, иногда абелевой, и с его помощью можно строить различные алгебраические функторы на категории топологических пространств и их непрерывных отображений. Построение и использование этих функторов составляет основу гомотопической топологии.

1. Гомотопическая группа пространства. Отметим вначале, что каждому топологическому пространству Y и непрерывному отображению $f\colon X_1 \to X_2$ топологических пространств X_1, X_2 соответствует естественное отображение

$$\pi^Y(f)\colon \pi(X_2, Y) \to \pi(X_1, Y).$$

Точнее, если $[\varphi] \in \pi(X_2, Y)$, то в $\pi(X_1, Y)$ ему однозначно соответствует элемент $[\varphi f]$. Аналогично, всякому топологическому пространству X и непрерывному отображению $g\colon Y_1 \to Y_2$ соответствует отображение

$$\pi_X(g)\colon \pi(X, Y_1) \to \pi(X, Y_2).$$

Упражнения. 1°. Опишите конструкцию $\pi_X(g)$ и докажите корректность определений $\pi^Y(f)$ и $\pi_X(g)$.

2°. Пользуясь приведенными замечаниями, покажите, что при фиксированном Y соответствие $X \to \pi(X, Y)$ есть контрвариантный функтор в категорию множеств, а соответствие $Y \to \pi(X, Y)$ (при фиксированном X) есть ковариантный функтор.

Говорят, что соответствие $(X, Y) \to \pi(X, Y)$ определяет *двухместный функтор* из категории топологических пространств в категорию множеств, ковариантный по второму аргументу и контрвариантный по первому аргументу.

Аналогичным образом можно рассмотреть двухместный функтор π на категории пар топологических пространств, определяемый соответствием $(X, A; Y, B) \to \pi(X, A; Y, B)$. Отметим, что гомотопия $F(x, t)$ между отображениями f и $g\colon (X, A) \to (Y, B)$ пар пространств понимается как отображение пар $F\colon (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ такое, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$.

Упражнение 3°. Опишите конструкцию отображения

$$\pi_{(X,A)}(f)\colon \pi(X, A; Y_1, B_1) \to \pi(X, A; Y_2, B_2),$$

естественно индуцированного непрерывным отображением пар $f\colon (Y_1, B_1) \to (Y_2, B_2)$, и проверьте, что соответствие $(Y, B) \to \pi(X, A; Y, B)$ есть ковариантный функтор.

Определение 1. Пара (X, x_0) называется *пространством с отмеченной точкой* $x_0 \in X$.

Зафиксируем теперь пару $(I^n, \partial I^n)$, где I^n — n-мерный куб, $n \geqslant 1$, а ∂I^n — его граница, и поставим в соответствие паре (X, x_0) множество $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Напомним, что элементы $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ — это классы гомотопных между собой отображений пар φ: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, часто называемых *сфероидами*; каждое из этих отображений переводит I^n в X, а ∂I^n — в точку x_0, причем это свойство должно сохраняться при изменении отображения φ в процессе гомотопии. Множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ и $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ совпадают (находятся в биективном соответствии). Здесь p_0 — отмеченная точка сферы S^n. В самом деле, ранее мы отмечали, что факторпространство $I^n/\partial I^n$ гомеоморфно сфере S^n, причем при этом гомеоморфизме θ внутренность $\operatorname{Int} I^n$ куба I^n находится в биективном соответствии с множеством $S^n \backslash p_0$, а граница ∂I^n переходит в точку p_0 сферы S^n. В таких случаях говорят, что задан *относительный гомеоморфизм*

$$\theta\colon (I^n, \partial I^n) \to (S^n, p_0).$$

Тогда всякому отображению f: $(S^n, p_0) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $f\theta$: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, и обратно: отображению g: $(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ соответствует отображение $\bar{g}$: $(S^n, p_0) \to (X, x_0)$, которое на $S^n \backslash p_0$ совпадает с $g\theta^{-1}$, а точку p_0 переводит в x_0.

Упражнение 4°. Покажите, что описанное соответствие отображений обеспечивает биекцию между $\pi(S^n, p_0; X, x_0)$ и $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$.

Таким образом, дана другая интерпретация множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, которая позволяет рассматривать случай $n = 0$.

Упражнение 5°. Покажите, что множество $\pi(S^0, p_0; X, x_0)$ есть множество компонент линейной связности пространства X.

Итак, мы определили ковариантный функтор $(X, x_0) \to \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ из категории пространств с отмеченной точкой в категорию множеств.

Структура множества $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$ представляет большой интерес для гомотопической топологии. Вначале рассмотрим случай $n > 1$.

Теорема 1. *Множество* $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, $n > 1$, *является абелевой группой.*

Доказательство. Пусть $[\varphi], [\psi] \in \pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$. Определим сумму $[\varphi] + [\psi]$ следующим образом: $[\varphi] + [\psi] = [\varphi + \psi]$, где отображение $\varphi + \psi$ определим так: пусть $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in I^n$, $t_i \in I = [0, 1]$, $i = 1, \ldots, n$; тогда

$$(\varphi + \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Наглядно это определение можно пояснить следующей схемой, где квадрат изображает грань (t_1, t_2) куба I^n (рис. 65).

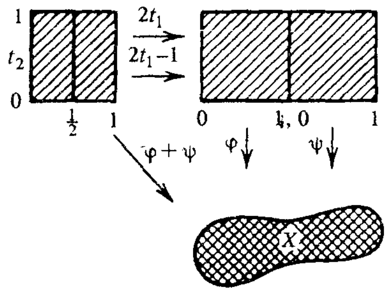

Рис. 65

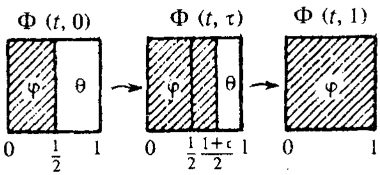

Рис. 66

Нулевой элемент определим как класс постоянного отображения $\theta: (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$, для которого $\theta(I^n) = x_0$. Покажем, что $[\varphi] + [\theta] = [\varphi]$ для всякого $[\varphi]$, т. е. $\varphi + \theta$ гомотопно φ. В самом деле, нужную гомотопию определяет отображение

$$\Phi: (I^n \times I, \partial I^n \times I) \to (X, x_0),$$

где

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \varphi\left(\dfrac{2t_1}{\tau + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{\tau + 1}{2}, \\ x_0, \quad \text{если } \dfrac{\tau + 1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, & \tau \in I. \end{cases}$$

Гомотопия $\Phi(t, \tau)$ схематически представлена на рис. 66.

Упражнения. 6°. Убедитесь, что и $[\theta] + [\varphi] = [\varphi]$.

7°. Поясните, почему конструкция доказательства равенства $[\varphi]+[\theta]=[\varphi]$ не позволяет установить равенство $[\varphi]+[\psi]= =[\varphi]$, когда $[\psi]\neq[\theta]$.

Для всякого $[\varphi]$ противоположным элементом $(-[\varphi])$ в $\pi_n(X, x_0)$ служит класс $[\varphi\eta]$, где $\eta\colon I^n\to I^n$ определяется по формуле $\eta(t)=(1-t_1, t_2, \ldots, t_n)$; таким образом, $(\varphi\eta)(t)=\varphi(1-t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

Проверим, что $[\varphi]+[\varphi\eta]=[\theta]$. В самом деле, гомотопия между отображениями $\varphi+\varphi\eta$ и θ задается отображением

$$\Phi(t, \tau)=\begin{cases} x_0, & 0\leqslant t_1\leqslant \tau/2,\\ \varphi(2t_1-\tau, t_2, \ldots, t_n), & \tau/2\leqslant t_1\leqslant 1/2,\\ \varphi(-2t_1+2-\tau, t_2, \ldots, t_n), & 1/2\leqslant t_1\leqslant 1-\tau/2,\\ x_0, & 1-\tau/2\geqslant t_1\leqslant 1.\end{cases}$$

На рис. 67 эта гомотопия представлена в виде диаграммы.

Упражнение 8°. Убедитесь, что указанное отображение $\Phi(t, \tau)$ является гомотопией отображений пар пространства $(I^n, \partial I^n)$, (X, x_0).

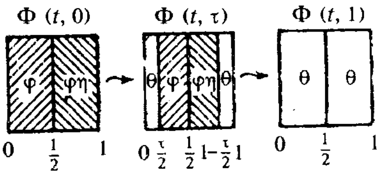

Рис. 67

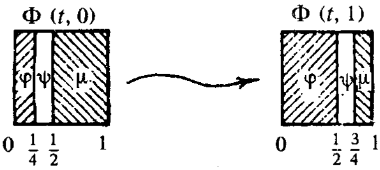

Рис. 68

Осталось проверить ассоциативность и коммутативность сложения в $\pi_n(X, x_0)$, $n>1$. Докажем ассоциативность. Пусть $[\varphi]$, $[\psi]$, $[\mu]\in \in\pi_n(X, x_0)$. Покажем, что $([\varphi]+[\psi])+[\mu]=[\varphi]+([\psi]+[\mu])$. Легко проверить, что нужную гомотопию задает отображение

$$\Phi(t, \tau)=\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{4t_1}{\tau+1}, t_2, \ldots, t_n\right), & 0\leqslant t_1\leqslant \dfrac{\tau+1}{4},\\ \psi(4t_1-\tau-1, t_2, \ldots, t_n), & \dfrac{\tau+1}{4}\leqslant t_1\leqslant\dfrac{\tau+2}{4},\\ \mu\left(\dfrac{4t_1-2-\tau}{2-\tau}, t_2, \ldots, t_n\right), & \dfrac{\tau+2}{4}\leqslant t_1\leqslant 1.\end{cases}$$

С точки зрения диаграмм эта гомотопия объясняется совсем просто (рис. 68).

Покажем теперь, что $[\varphi] + [\psi] = [\psi] + [\varphi]$. Напомним, что

$$(\varphi+\psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \psi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$(\psi+\varphi)(t) = \begin{cases} \psi(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \varphi(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \text{если } 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Убедимся теперь, что отображения $\varphi + \psi$ и $\psi + \varphi$ гомотопны одному и тому же отображению. (Отсюда будет следовать, что они гомотопны между собой.) Рассмотрим гомотопию $\Phi_1(t, \tau)$:

$$\Phi_1(t,\tau) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi\left(2t_1, \frac{2t_2-\tau}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} \psi\left(2t_1 - 1, \frac{2t_2}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1-\tau/2 \\ x_0, & 1-\tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\Phi_1(t, 0) = \varphi + \psi$, а

$$\Phi_1(t,1) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ \varphi(2t_1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n), & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} \psi(2t_1 - 1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ x_0, & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим еще одну гомотопию, $\Phi_2(t, s)$:

$$\Phi_2(t,s) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \varphi\left(\frac{2t_1}{1+s}, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1+s}{2} \\ x_0, & \frac{1+s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1-s}{2} \\ \psi\left(\frac{2t_1 - 1 + s}{1+s}, 2t_2, t_3, \ldots, t_n\right), & \frac{1-s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Нетрудно проверить, что $\Phi_2(t, 0) = \Phi_1(t, 1)$, а

$$\Phi_2(t,1) = \begin{cases} \varphi(t_1, 2t_2 - 1, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1,\ 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \psi(t_1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2. \end{cases}$$

Гомотопии Φ_1, Φ_2 изображены на рис. 69 в виде диаграмм.

Таким образом, имеем

$$\varphi + \psi \sim \Phi_1(t, 1) = \Phi_2(t, 0) \sim \Phi_2(t, 1). \quad (1)$$

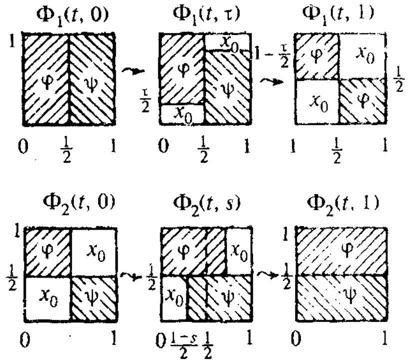

Рис. 69

Проведем аналогичную конструкцию для суммы $\psi + \varphi$. С этой целью запишем гомотопии:

$$\Psi_1(t,\tau)=$$

$$=\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \psi\left(2t_1, \dfrac{2t_2}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1-\tau/2 \\ x_0, & 1-\tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi\left(2t_1-1, \dfrac{2t_2-\tau}{2-\tau}, t_3, \ldots, t_n\right), & \tau/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\Psi_1(t, 0) = \psi + \varphi$, а

$$\Psi_1(t,1)=\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \psi(2t_1, 2t_2, t_3, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \\ x_0, & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & 0 \leqslant t_2 \leqslant \tau/2 \\ \varphi(2t_1-1, 2t_2-1, t_3, \ldots, t_n), & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1 \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Строим еще одну гомотопию:

$$\Psi_2(t,s)=$$

$$=\begin{cases} \left.\begin{array}{ll} \varphi\left(\dfrac{2t_1-1+s}{1+s}, 2t_2-1, t_3, \ldots, t_n\right), & \dfrac{1-s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \\ x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1-s}{2} \end{array}\right\} & 1/2 \leqslant t_2 \leqslant 1, \\ \left.\begin{array}{ll} x_0, & \dfrac{1+s}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \\ \psi\left(\dfrac{2t_1}{1+s}, 2t_2, t_3, \ldots, t_n\right) & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1+s}{2} \end{array}\right\} & 0 \leqslant t_2 \leqslant 1/2 \end{cases}$$

Таким образом, $\Psi_2(t, 0) = \Psi_1(t, 1)$, а $\Psi_2(t, 1) = \Phi_2(t, 1)$

На рис. 70 в виде диаграмм изображены гомотопии $\Psi_1(T, \tau)$, $\Psi_2(t, \tau)$. Получаем, что

$$\psi + \varphi \sim \Psi_1(t, 1) = \Psi_2(t, 0) \sim \Psi_2(t, 1) = \Phi_2(t, 1).$$

Из последней цепочки гомотопий и цепочки (1) получаем, что $\varphi + \psi \sim \Phi_2(t, 1)$, $\psi + \varphi \sim \Phi_2(t, 1)$, поэтому $\varphi + \psi \sim \psi + \varphi$. ■

Замечание. Внимательный читатель заметил, что именно при доказательстве коммутативности алгебраической операции в $\pi_n(X, x_0)$ существенно использовалось условие $n > 1$.

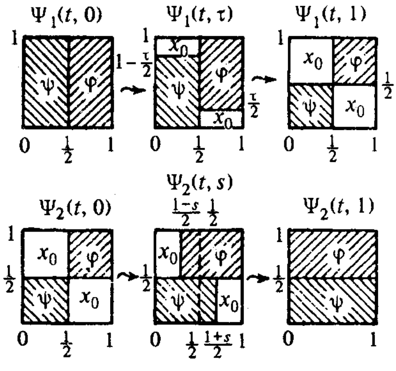

Рис. 70

Группа $\pi(I^n, \partial I^n; X, x_0)$, $n > 1$, называется *n-мерной гомотопической группой* пространства X с отмеченной точкой x_0 и обозначается $\pi_n(X, x_0)$.

Теорема 2. *Всякое непрерывное отображение* $f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ *индуцирует гомоморфизм групп* $\pi_{(I^n, \partial I^n)}(f)\colon \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$.

Доказательство предоставляем провести читателю.

Указание. Покажите, что отображение гомотопических классов, указанное в упражнении 3°, является гомоморфизмом. Используйте определение суммы $(\varphi + \psi)(t)$ (см. рис. 65).

Гомоморфизм $\pi_{(I^n, \partial I^n)}(f)$ обозначается f_n и называется *гомоморфизмом n-мерных гомотопических групп, индуцированным непрерывным отображением f.*

Таким образом, функтор π_n, $n > 1$, действует из категории пространств с отмеченной точкой и их непрерывных отображений в категорию абелевых групп и их гомоморфизмов. Следовательно, если

$$f\colon (X, x_0) \to (Y, y_0), \quad g\colon (Y, y_0) \to (Z, z_0)$$

— непрерывные отображения, то $(gf)_n = g_n f_n$, где f_n, g_n, $(gf)_n$ — соответствующие гомоморфизмы n-мерных гомотопических групп.

2. Фундаментальная группа. Самостоятельный интерес в решении многих задач имеет множество $\pi_1(X, x_0)$, определяемое равенством

$$\pi_1(X, x_0) = \pi(I, \partial I; X, x_0) = \pi(S^1, p_0; X, x_0),$$

которое снабжается групповой структурой тем же способом, что и π_n, $n > 1$. По общему определению каждый элемент $\pi_1(X, x_0)$ есть гомотопический класс $[\varphi]$ некоторого отображения $\varphi\colon (I, \partial I) \to (X, x_0)$, где образ $\varphi(I)$ — это петля в пространстве X, начинающаяся и кончающаяся в точке x_0 (рис. 71).

Рис. 71

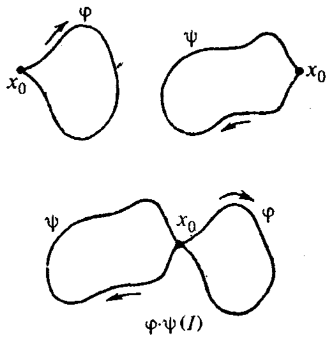

Рис. 72

Направление обхода петли задает параметр $t \in I$. Произведение $\varphi \cdot \psi$ двух петель, φ и ψ, определяется как петля в X такая, что когда t изменяется от 0 до 1/2, образ $(\varphi \cdot \psi)(t)$ пробегает петлю φ, а когда t меняется от 1/2 до 1, образ $(\varphi \cdot \psi)(t)$ пробегает петлю ψ (рис. 72); точнее,

$$(\varphi \cdot \psi)(t) = \begin{cases} \varphi(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \psi(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Как видно, произведение петель определяется совершенно аналогично сумме сфероидов. В множестве $\pi_1(X, x_0)$ определяется произведение $[\varphi] \cdot [\psi] = [\varphi \cdot \psi]$, которое, вообще говоря, не коммутативно (но ассоциативно).

Предложение. *Множество $\pi_1(X, x_0)$ является группой относительно описанной операции произведения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в доказательстве теоремы 1 условие $n > 1$ было использовано только при доказательстве коммутативности группы π_n, где в необходимых гомотопиях участвует вторая координата сфероида. Поэтому все предыдущие пункты доказательства теоремы 1 переносятся на случай $\pi_1(X, x_0)$ (и значительно упрощаются). Единичный и обратный элементы в $\pi_1(X, x_0)$ определяются аналогично θ и $(-[\varphi])$ в $\pi_n(X, x_0)$ при $n > 1$: $e = [\varphi_0]$, где

$\varphi_0(I) = x_0$ — постоянная петля; для каждого $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ $[\varphi]^{-1} = [\varphi^{-1}]$, где $\varphi^{-1}(t) = \varphi(1-t)$ — петля, проходимая в обратном направлении. Таким образом, требуемое утверждение прямо следует из доказательства теоремы 1. ■

Определение 2. Группа $\pi_1(X, x_0)$ называется *фундаментальной группой* пространства X с отмеченной точкой x_0.

Упражнение 9°. Докажите, что фундаментальная группа диска $D_r^n(x_0)$ с отмеченной точкой x_0 тривиальна.

Выясним, как различаются группы $\pi_1(X, x_0)$ и $\pi_1(X, x_1)$ одного и того же пространства с различными отмеченными точками $x_0 \in X$, $x_1 \in X$. Для этого нам понадобится несколько понятий.

Произведение $\omega_1 \cdot \omega_2$ путей * ω_1 и ω_2 таких, что $\omega_2(0) = \omega_1(1)$, определим аналогично произведению петель:

$$(\omega_1 \cdot \omega_2)(t) = \begin{cases} \omega_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega_2(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Очевидно, что $\omega_1 \cdot \omega_2$ — путь в пространстве X. Постоянным путем в X называется путь $C_x\colon I \to X$ такой, что $C_{x_0}(t) \equiv x_0$ для $t \in [0, 1]$. Обратным путем к пути ω называется такой путь $\omega^{-1}\colon I \to X$, что $\omega^{-1}(t) = \omega(1-t)$. Так как $(\omega \cdot \omega^{-1}) \cdot (0) = (\omega \cdot \omega^{-1})(1)$, то путь $(\omega \cdot \omega^{-1})(t)$ представляет собой петлю в точке $\omega(0)$.

Упражнение 10°. Начертите путь $(\omega \cdot \omega^{-1})(t)$. Покажите, что $[\omega \cdot \omega^{-1}] = e$ в $\pi_1(X, x_0)$, $x_0 = \omega(0)$.

Отметим, что произведение путей так же, как и произведение петель, ассоциативно: $(\omega \cdot \omega^{-1}) \cdot \omega_3 = \omega_1 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_3)$.

Теорема 3. *Всякий путь $\omega\colon I \to X$, соединяющий точки x_0 и x_1, т. е. $\omega(0) = x_0$, $\omega(1) = x_1$, индуцирует изоморфизм групп*

$$S_1^{\omega}\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1),$$

зависящий лишь от гомотопического класса пути ω.

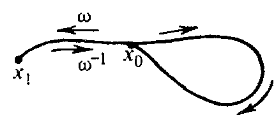

Рис. 73

Доказательство. Пусть $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$. Рассмотрим отображение $\psi\colon (I, \partial I) \to (X, x_1)$, заданное формулой $\psi = \omega^{-1} \cdot \varphi \cdot \omega$. Наглядно путь $\psi(t)$ представляется как петля на рис. 73. Рассмотрим класс $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$.

Сопоставив таким образом каждому элементу $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ элемент $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$, получим некоторое отображение S_1^{ω}:

---

* Напомним, что путь в пространстве X — это непрерывное отображение отрезка $\omega\colon I \to X$.

$\pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$. Действительно, если φ_τ — гомотопия петли φ в классе $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, то $\psi_\tau = \omega^{-1} \cdot \varphi_\tau \cdot \omega$ — гомотопия петли ψ в классе $[\psi] \in \pi_1(X, x_0)$, что и означает корректность определения. Оказывается, что S_1^ω — гомоморфизм групп. Докажем это. Пусть $[\varphi]$, $[\varphi_2] \in \pi_1(X, x_0)$ и пусть $S_1^\omega[\varphi_i] = [\psi_i] \in \pi_1(X, x_1)$, $i = 1, 2$. Произведение петель $\varphi_1 \cdot \varphi_2$ определяет класс $[\varphi_1] \cdot [\varphi_2]$ — произведение (по определению). Используя ассоциативность произведения путей, а также результат упражнения 10°, получим $S_1^\omega([\varphi_1] \cdot [\varphi_2]) = S_1^\omega[\varphi_1 \cdot \varphi_2] = [\omega^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \omega] = [\omega^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \omega \cdot \omega^{-1} \cdot \varphi_2 \cdot \omega] =$ $= [\omega^{-1} \cdot \varphi_1 \cdot \omega][\omega^{-1} \cdot \varphi_2 \cdot \omega] = (S_1^\omega[\varphi_1]) \cdot (S_1^\omega[\varphi_2])$; для единичного класса $e_{x_0} = [\varphi_0]$, φ_0 — постоянная петля, имеем $S_1^\omega e_{x_0} = [\omega^{-1} \cdot \varphi_0 \cdot \omega] =$ $= [\omega^{-1} \cdot \omega] = e_{x_0}$ — единичный класс в $\pi_1(X, x_1)$. Итак, S_1^ω — гомоморфизм.

Аналогично, всякого элементу $[\psi] \in \pi_1(X, x_1)$ сопоставим элемент $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$, где $\varphi = \omega \cdot \psi \cdot \omega^{-1}$. Получим некоторое отображение

$$S_1^{\omega^{-1}}: \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0).$$

Упражнение 11°. Покажите, что $S_1^{\omega^{-1}}$ — гомоморфизм групп и что гомоморфизмы $S_1^{\omega^{-1}}$ и S_1^ω взаимно обратны, т. е.

$$(S_1^\omega)^{-1} = (S_1^{\omega^{-1}}).$$

Таким образом, S_1^ω — изоморфизм. Из определения ясно, что он не меняется при гомотопии пути ω (при постоянных концах). ■

Упражнение 12°. Докажите, что если $f: X \to Y$ — непрерывное отображение, то для всякого пути ω, соединяющего точки x_0 и x_1, коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X, x_0) & \xrightarrow{f_1} & \pi_1(Y, f(x_0)) \\ {\scriptstyle S_1^\omega}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle S_1^{\overline{\omega}}} \\ \pi_1(X, x_1) & \xrightarrow[f_1]{} & \pi_1(Y, f(x_1)) \end{array}$$

где $\overline{\omega} = f\omega$ — путь, соединяющий точки $f(x_0)$ и $f(x_1)$.

Из теоремы 3 сразу следует, что если пространство X линейно связно, то группы $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках $x_0 \in X$ изоморфны между собой и могут рассматриваться как одна абстрактная группа $\pi_1(X)$. Эта группа $\pi_1(X)$ называется фундаментальной группой линейно связного пространства X.

Приведем еще один факт, вытекающий из теоремы 3.

Следствие. *Всякий элемент* $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ *определяет автоморфизм* $S_1^{[\alpha]}$ *группы* $\pi_1(X, x_0)$, *при котором* $[\beta] \mapsto [\alpha]^{-1}[\beta][\alpha]$.

Доказательство. В силу теоремы 3 имеем изоморфизм $S_1^{[\alpha]}: \pi_1(X, x_0) \to (X, x_0)$, так как α — петля в точке x_0. Кроме того, изоморфизм S_1^{α} зависит только от гомотопического класса пути α. ■

Важный класс пространств выделяет следующее определение.

Определение 3. Линейно связное пространство X называется *односвязным*, если любые два пути, $\omega_1: I \to X$ и $\omega_2: I \to X$, такие, что $\omega_1(0) = \omega_2(0) = x_0$, $\omega_1(1) = \omega_2(1) = x_1$, принадлежат одному гомотопическому классу в $\pi(I, \partial I; X, x_0 \cup x_1)$, т. е. гомотопны в классе путей с началом в x_0 и концом в x_1.

Следующая теорема характеризует односвязные пространства через их фундаментальную группу.

Теорема 4. *Линейно связное пространство X тогда и только тогда односвязно, когда* $\pi_1(X) = 0$.

Доказательство. Пусть линейно связное пространство X односвязно. Рассмотрим произвольный класс $[\varphi] \in \pi_1(X, x_0)$ и единичный класс $e = [\varphi_0]$. Рассмотрим два пути, $\omega_1 = \varphi: (I, \partial I) \to (X, x_0)$, $\omega_2 = \varphi_0: (I, \partial I) \to (X, x_0)$, $\varphi_0(I) = x_0$, с совпадающими началом и концом: $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi_0(0) = \varphi_0(1) = x_0$. Условие односвязности предполагает гомотопность и таких путей-петель ω_1, ω_2; следовательно, петля φ гомотопна петле φ_0, откуда следует $[\varphi] = e$. Ввиду произвольности $[\varphi]$ заключаем, что $\pi_1(X, x_0) = 0$, а следовательно, и $\pi_1(X) = 0$.

Обратно: пусть $\pi_1(X, x_*) = 0$ в точке $x_* \in X$, которую можно считать произвольной в силу линейной связности X. Рассмотрим два пути, ω_1, ω_2, в X с общими началом x_0 и концом x_1: $\omega_1(0) = \omega_2(0) = x_0$, $\omega_1(1) = \omega_2(1) = x_1$. Покажем, что как отображения $\omega_1: (I, \partial I) \to (X, x_0 \cup x_1)$, $\omega_2: (I, \partial I) \to (X, x_0 \cup x_1)$ они гомотопны. Образуем петлю $\varphi = \omega_1 \cdot \omega_2^{-1}$ в точке x_0. Так как путь ω_2^{-1} задается равенством $\omega_2^{-1}(s) = \omega_2(1 - s)$, $0 \leqslant s \leqslant 1$, то по определению произведения двух путей получим

$$\varphi(t) = (\omega_1 \cdot \omega_2)^{-1}(t) = \begin{cases} \omega_1(2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \omega_2(2 - 2t), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Полагая $x_* = x_0$, имеем по условию $\pi_1(X, x_0) = 0$. Следовательно, петля φ гомотопна постоянной петле φ_0 в точке x_0: гомотопию полезно представлять в виде

$$\Phi(t, \tau) = \begin{cases} \Omega_1(2t, \tau), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \Omega_2(2 - 2t, \tau), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

где $\Omega_1(2t, \tau)$, $\Omega_2(2-2t, \tau)$ — гомотопии путей ω_1, ω_2 в постоянный путь в точке x_0, а τ — параметр гомотопии, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, и $\Phi(t, 1) = \varphi(t)$, $\Phi(t, 0) = \varphi_0$. Фиксируем точки $\omega_1(s)$, $\omega_2(s)$, где $0 \leqslant s \leqslant 1$. Этим точкам на петле φ отвечают значения параметра $t = s/2 \leqslant 1/2$ и $t = 1 - s/2 \geqslant 1/2$. Зададим путь $\psi(t)$ движения точки $\omega_1(s)$ в точку $\omega_2(s)$ следующим образом:

$$\psi_s(\tau) = \begin{cases} \Phi(s/2, 1-2\tau), & 0 \leqslant \tau \leqslant 1/2, \\ \Phi(1-s/2, 2\tau-1), & 1/2 \leqslant \tau \leqslant 1. \end{cases}$$

Геометрически это означает, что точка $\omega_1(s)$ движется по траектории, задаваемой гомотопией $\Phi(t, \tau)$, в точку x_0 и далее таким же образом — в точку $\omega_2(s)$. Так как выбор s произволен (из интервала $0 \leqslant s \leqslant 1$), то предыдущая формула фактически задает гомотопию пути ω_1 в ω_2 (функция $\psi_s(\tau)$ зависит и от s: $\psi_s(\tau) = \psi(s, \tau)$). Очевидно, эта зависимость $\psi(s, \tau)$ непрерывна по совокупности (s, τ), следовательно, ω_1, ω_2 принадлежат одному гомотопическому классу в

$$\pi_1(I, \partial I; X, x_0 \cup x_1). \blacksquare$$

Упражнения. 13°. Убедитесь, что евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ односвязно, а S^1 и тор $S^1 \times S^1$ не являются односвязными.

14°. Постройте пример связного пространства с неизоморфными группами $\pi_1(X, x_0)$ в различных точках x_0.

Указание. Используйте пример связного, но не линейно связного пространства из § 10 гл. II.

Исследуем теперь зависимость высших гомотопических групп от изменения базисной точки. Оказывается, что гомотопическая группа $\pi_n(X, x_0)$ меняется аналогично фундаментальной группе $\pi_1(X, x_0)$ при изменении отмеченной точки.

Теорема 5. *Всякий путь $\omega\colon I \to X$, соединяющий точки x_0 и x_1, определяет изоморфизм*

$$S_n^\omega\colon \pi_n(X, x_1) \to \pi_n(X, x_0),$$

зависящий от гомотопического класса $[\omega] \in \pi(I, \partial I; X, x_0 \cup x_1)$. Кроме того, для всякого отображения $f\colon X \to Y$ коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_1) & \xrightarrow{f_n} & \pi_n(Y, y_1) \\ S_n^\omega \downarrow & & \downarrow S_n^{\bar\omega} \\ \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow[f_n]{} & \pi_n(Y, y_0) \end{array}$$

в которой $S_n^{\bar\omega}$ — изоморфизм, определяемый путем $\bar\omega = f\omega$ между точками $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$.

Наметим лишь идею доказательства этой теоремы. Пусть $[\varphi] \in \pi_n(X, x_1)$. Аналогично тому, как это делалось в случае фундаментальной группы, элементу $[\varphi]$ ставится в соответствие элемент $[\psi] \in \pi_n(X, x_0)$. Наглядно эту процедуру можно изобразить как вытягивание из сфероида φ в точке x_1 «уса» в точку $\omega(t)$ и его растяжение вдоль пути ω до точки x_0 (рис. 74).

Таким образом получаем отображение $S_n^{\omega}\colon \pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$, являющееся изоморфизмом с требуемыми свойствами. Подробности опускаем. ■

В качестве следствия из теоремы 5 получаем, что всякий элемент $[\alpha]\in\pi_1(X, x_1)$ определяет автоморфизм группы $\pi_n(X, x_0)$.

Таким образом, группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на группе $\pi_n(X, x_0)$ как группа автоморфизмов (точнее, как подгруппа группы всех автоморфизмов).

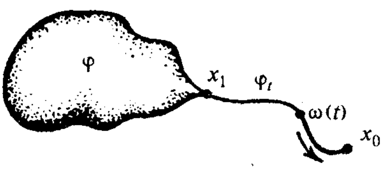

Рис. 74

Естественно теперь следующее обобщение односвязных пространств.

Определение 4. Если для пространства X и любых точек x_0, $x_1\in X$, лежащих в одной компоненте линейной связности, изоморфизм $S_n^{\omega}\colon \pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$ не зависит от выбора пути ω, соединяющего x_0 с x_1, то пространство X называется *n-простым* (или *гомотопически простым в размерности n*).

Предлагаем доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Пространство X тогда и только тогда n-просто, когда для любой точки $x_0\in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиально действует на $\pi_n(X, x_0)$, т. е. не меняет элементов $\pi_n(X, x_0)$.*

Из теоремы 4 сразу следует, что односвязное пространство n-просто для всех $n\geqslant 1$.

§ 4. Вычисление фундаментальных и гомотопических групп некоторых пространств

В этом параграфе будет вычислена фундаментальная группа окружности, а также произвольной замкнутой поверхности типа M_p или N_q. Необходимая для этого комбинаторная техника основана на результатах § 4 гл. II и изложена в начале параграфа (см. п. 1, 2). Попутно устанавливается топологическая инвариантность эйлеровой характеристики замкнутой поверхности (см. п. 5). Далее обсуждается задача вычисления высших гомотопических групп и дается приложение к задаче о неподвижных точках непрерывного отображения (теорема Брауэра, основная теорема алгебры).

1. Линейчатые пути на поверхности и их комбинаторные гомотопии. Рассмотрим замкнутую поверхность X, как и в § 4 гл. II заданную своим разбиением. Это означает, что задана некоторая развертка Π и поверхность X гомеоморфна факторпространству Π/R, где R — эквивалентность, определяемая склеивающими гомеоморфизмами развертки.

Обозначим произведение факторотображения $\alpha\colon \Pi\to\Pi/R$ и гомеоморфизма $\beta\colon \Pi/R\to X$ через $\varkappa$. Тогда отображение $\varkappa\colon \Pi\to X$ и задает разбиение X на образы многоугольников, ребер и вершин развертки ($\varkappa$-образы ребер называем *ребрами*, а $\varkappa$-образы вершин — *вершинами разбиения*). Ребро разбиения является $\varkappa$-образом двух ребер: a и a^{-1} или a и a, условимся обозначать его буквой a; $\varkappa$-образ вершины A обозначаем той же буквой A; точки ребра, отличные от вершин, будем называть *внутренними точками ребра*.

Нам потребуются следующие две элементарные операции над разбиениями: