Таким образом получаем отображение S_n^ω: $\pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$, являющееся изоморфизмом с требуемыми свойствами. Подробности опускаем. ■

В качестве следствия из теоремы 5 получаем, что всякий элемент $[\alpha]\in\pi_1(X, x_1)$ определяет автоморфизм группы $\pi_n(X, x_0)$.

Таким образом, группа $\pi_1(X, x_0)$ действует на группе $\pi_n(X, x_0)$ как группа автоморфизмов (точнее, как подгруппа группы всех автоморфизмов).

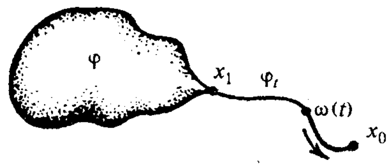

Рис. 74

Естественно теперь следующее обобщение односвязных пространств.

Определение 4. Если для пространства X и любых точек x_0, $x_1\in X$, лежащих в одной компоненте линейной связности, изоморфизм S_n^ω: $\pi_n(X, x_1)\to\pi_n(X, x_0)$ не зависит от выбора пути ω, соединяющего x_0 с x_1, то пространство X называется *n-простым* (или *гомотопически простым в размерности n*).

Предлагаем доказать следующее утверждение.

Теорема 6. *Пространство X тогда и только тогда n-просто, когда для любой точки $x_0\in X$ группа $\pi_1(X, x_0)$ тривиально действует на $\pi_n(X, x_0)$, т. е. не меняет элементов $\pi_n(X, x_0)$.*

Из теоремы 4 сразу следует, что односвязное пространство n-просто для всех $n\geq 1$.

§ 4. Вычисление фундаментальных и гомотопических групп некоторых пространств

В этом параграфе будет вычислена фундаментальная группа окружности, а также произвольной замкнутой поверхности типа M_p или N_q. Необходимая для этого комбинаторная техника основана на результатах § 4 гл. II и изложена в начале параграфа (см. п. 1, 2). Попутно устанавливается топологическая инвариантность эйлеровой характеристики замкнутой поверхности (см. п. 5). Далее обсуждается задача вычисления высших гомотопических групп и дается приложение к задаче о неподвижных точках непрерывного отображения (теорема Брауэра, основная теорема алгебры).

1. Линейчатые пути на поверхности и их комбинаторные гомотопии. Рассмотрим замкнутую поверхность X, как и в § 4 гл. II заданную своим разбиением. Это означает, что задана некоторая развертка Π и поверхность X гомеоморфна факторпространству Π/R, где R — эквивалентность, определяемая склеивающими гомеоморфизмами развертки.

Обозначим произведение факторотображения $\alpha\colon \Pi\to\Pi/R$ и гомеоморфизма $\beta\colon \Pi/R\to X$ через $\varkappa$. Тогда отображение $\varkappa\colon \Pi\to X$ задает разбиение X на образы многоугольников, ребер и вершин развертки ($\varkappa$-образы ребер называем *ребрами*, а $\varkappa$-образы вершин — *вершинами разбиения*). Ребро разбиения является $\varkappa$-образом двух ребер: a и a^{-1} или a и a, условимся обозначать его буквой a; $\varkappa$-образ вершины A обозначаем той же буквой A; точки ребра, отличные от вершин, будем называть *внутренними точками ребра.*

Нам потребуются следующие две элементарные операции над разбиениями:

а) добавление новой вершины — внутренняя точка ребра объявляется новой вершиной разбиения;

б) добавление нового ребра — один из многоугольников развертки разбивается на два своей диагональю, $\varkappa$-образ этой диагонали в X объявляется новым ребром разбиения.

Рассмотрим ребро a в развертке П, и пусть $\gamma\colon I \to a$ — афинное отображение (линейный путь), при котором точки 0 и 1 отображаются в вершины ребра. Тогда отображение $\tilde{\gamma} = \varkappa\gamma\colon I \to X$ определяет путь на поверхности X, который назовем *элементарным путем.* Очевидно, что образ элементарного пути либо совпадает с одной из вершин ребра a разбиения поверхности, либо полностью покрывает это ребро.

В первом случае элементарный путь постоянен и считается равным нулю ($\tilde{\gamma} = 0$). Во втором случае начало линейного пути γ либо совпадает с началом ориентированного ребра a, либо совпадает с его концом. В соответствии с этим будем обозначать элементарный путь через a или через a^{-1} ($\tilde{\gamma} = a$ или $\tilde{\gamma} = a^{-1}$ соответственно). По такому же правилу будем обозначать $\tilde{\gamma}$, если $\gamma\colon I \to a^{-1}$, считая $(a^{-1})^{-1} = a$.

Таким образом, каждому ориентированному ребру $a(a^{-1})$ развертки отвечает элементарный путь $a(a^{-1})$ в разбиении.

Определение 1. *Линейчатым путем* в разбиении П поверхности X называется конечное произведение элементарных путей. Замкнутый линейчатый путь называется *линейчатой петлей.*

Согласно определению 1 линейчатый путь λ можно записать в виде произведения элементарных путей $\lambda = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s$, где $\lambda_i = a_i^{\pm1}$ либо $\lambda_i = 0$. Опуская нули, сопоставим пути λ слово $\omega(\lambda) = a_{i_1}^{\pm1}\ldots a_{i_s}^{\pm1}$, указывающее порядок и направление обхода путем λ ребер разбиения поверхности X.

Рассмотрим границу Γ_i какого-нибудь многоугольника Q_i развертки П. Сопоставив каждому ребру границы элементарный путь как описано выше, мы поставим в соответствие всей границе линейчатый путь λ_i в X, определяемый словом $\omega(\lambda_i) = \omega(Q_i)$. Слово $\omega(Q_i)$ описывает в свою очередь схему приклеивания многоугольника Q_i (см. п. 2 § 4 гл. II).

Например, линейчатый путь λ, соответствующий ориентированной границе прямоугольника Q, представляющего развертку тора (см. рис. 50), определяется словом $\omega(\lambda) = aba^{-1}b^{-1}$.

Определение 2. *Комбинаторной деформацией* I (или II) тора линейчатой петли λ называется вычеркивание или добавление в слово $\omega(\lambda)$ сочетания вида aa^{-1} (или слова $\omega(Q_i)$), определяющего линейчатую петлю в X, соответствующую ориентированной границе многоугольника Q_i развертки П.

Определение 3. Линейчатые петли γ и γ' в П называются *комбинаторно гомотопными* в П, если одна получается из другой с помощью конечного числа комбинаторных деформаций I или II типа.

Заметим, что всякий линейчатый путь в разбиении П поверхности X можно рассматривать как линейчатый путь в некотором разбиении Π_1, полученном из П применением конечного числа операций типа а) или б).

Лемма 1. *Пусть разбиение* Π_1 *получено из разбиения* П *применением конечного числа операций вида а), б). Тогда для всякой линейчатой петли* λ *в* Π_1 *существует линейчатая петля* λ' *в* П, *комбинаторно гомотопная в* Π_1 *петле* λ.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть случай, когда Π_1 получено из П применением одной из операций а), б). Пусть Π_1 получено из П подразделением ребра a на два новых ребра, b и c (применена операция добавления новой вершины). Если петля λ содержит одно из сочетаний bb^{-1}, cc^{-1}, $b^{-1}b$, $c^{-1}c$, то его можно опустить, получив при этом петлю, гомотопную λ. Опустив все такие сочетания, мы получим петлю, либо вовсе не содержащую $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$, либо содержащую их в виде bc $(=a)$ или $c^{-1}b^{-1}$ $(=a^{-1})$; в любом случае это будет искомый линейчатый путь λ' из П.

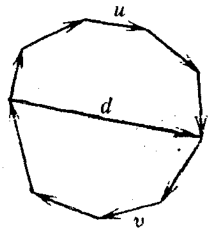

Рис. 75

Пусть теперь Π_1 получено из П добавлением нового ребра d, которое разбивает некоторый многоугольник из Π_1 на части E и F. Пусть граничные пути E и F есть ud^{-1} и dv соответственно (рис. 75). Если в линейчатую петлю λ входит ребро $d^{\pm 1}$, то заменим его путем $v^{\pm 1}$ (или $u^{\pm 1}$). Полученная петля λ' комбинаторно гомотопна λ и является линейчатой петлей П. ■

Лемма 2. *Пусть* Π_1 *получено из* П *одной из операций типа а), б). Тогда всякая линейчатая петля* λ *в* П, *комбинаторно гомотопная нулю в* Π_1, *комбинаторно гомотопна нулю и в* П.

Доказательство. Согласно условию леммы в Π_1 существует последовательность линейчатых петель $\lambda = v_0, v_1, \ldots, v_r = 0$, где v_{i+1} получена из v_i посредством одной комбинаторной деформации. При этом $v_1, \ldots, v_r$ не являются, вообще говоря, петлями в П. Для каждой петли v_i, $i = 1, \ldots, r$, будем строить гомотопную ей линейчатую петлю ω_i в П так, что в последовательности петель $\lambda, \omega_1, \ldots, \omega_r = 0$ каждая петля ω_{i+1} получается из ω_i одной или несколькими комбинаторными деформациями.

Предположим, что Π_1 получено из П подразделением ребра a на ребра b и c (операция типа а)). Поставим тогда в соответствие каждой петле v_i петлю ω_i, сопоставив ребру, отличному от $b^{\pm 1}$, $c^{\pm 1}$, то же самое ребро, ребру $b^{\pm 1}$ — ребро $a^{\pm 1}$, а ребру $c^{\pm 1}$ ничего не сопоставим. Легко проверить, что тогда переход от ω_i к ω_{i+1}, $i = 1, \ldots, r$, осуществляется комбинаторной деформацией I или II типа.

Если же Π_1 получено из Π операцией типа б), то ребру, отличному от разбивающего ребра d, соотнесем то же самое ребро, а $d(d^{-1})$ заменяем путем $u(u^{-1})$. Если теперь в v_i вставляем или вычеркиваем сочетание dd^{-1}, чтобы получить v_{i+1}, то в ω_i следует соответственно добавить или вычеркнуть сочетание uu^{-1}. Деформациям же II типа в Π_1 будут соответствовать деформации I или II типа в Π. ■

2. Комбинаторные аппроксимации путей и гомотопий. Здесь мы покажем, что любой непрерывный путь в триангуляции K гомотопен линейчатому, а также изучим взаимосвязь между комбинаторными и непрерывными гомотопиями.

Везде ниже имеются в виду гомотопии путей и петель с неподвижными концами.

Лемма 3. *Пусть задана некоторая триангуляция K поверхности X. Пусть $\lambda: I \to K$ — непрерывный путь в K, причем $\lambda(0)$, $\lambda(1)$ — вершины триангуляции. Тогда существует гомотопный ему линейчатый путь в K.*

Доказательство. Разобьем отрезок $I = [0, 1]$ конечным числом точек $\{t_k\}_{k=1}^{n}$ $(t_0 = 0,\ t_n = 1)$ на достаточно мелкие отрезки так, чтобы для каждого интервала (t_{k-1}, t_{k+1}), $k = 1, \ldots, n-1$, нашлась такая вершина $A_k \in K$, чтобы образ $\lambda(t_{k-1}, t_{k+1})$ этого интервала лежал целиком в звезде $S(A_k)$ — объединении открытых треугольников и ребер триангуляции K, примыкающих к некоторой вершине A_k, и самой вершины A_k. Так как $S(A_k)$ — открытое множество в X, а λ — непрерывное отображение, то этого всегда можно добиться (см. упр. 7° § 13 гл. II).

Поставим теперь в соответствие каждой точке $t_k \in I$ вершину $A_k \in K$. Заметим при этом, что для всякого $k = 1, \ldots, n-1$

$$\lambda((t_k, t_{k+1})) \subset S(A_k) \cap S(A_{k+1}),$$

где $S(A_k) \cap S(A_{k+1})$, очевидно, содержит треугольник, примыкающий одновременно к вершинам A_k и A_{k+1}. Следовательно, если $A_k \neq A_{k+1}$, то они соединены в K ребром, которое обозначим через l_k. Пусть λ_k': $[t_k, t_{k+1}] \to l_k$ — элементарный путь, являющийся продолжением указанного соответствия вершин и точек t_k, t_{k+1}. В случае $A_k = A_{k+1}$ считаем λ_k' нулевым. Произведение элементарных путей λ_k' определяет линейчатый путь λ': $I \to K$, который называется *линейчатой аппроксимацией пути* λ.

Пути λ и λ' гомотопны друг другу. В самом деле, в силу конструкции пути λ' для всякой точки $t \in I$ образы $\lambda(t)$ и $\lambda'(t)$ лежат в одном и том же замкнутом топологическом треугольнике из K, поэтому их можно соединить «отрезком» — гомеоморфным образом отрезка в треугольнике развертки. Следовательно, естественно задать линейную деформацию точки $\lambda(t)$ в точку $\lambda'(t)$, которая определяет требуемую гомотопию. Заметим при этом, что всякая точка $\lambda(t)$ в процессе этой гомотопии не выходит из того замкнутого треугольника ребра или вершины, в которых она находится в начальный момент гомотопии. ∎

Необходимо различать, гомотопна ли линейчатая петля постоянной в топологическом смысле или комбинаторно. Петлю, гомотопную или комбинаторно гомотопную постоянной, будем называть соответственно *стягиваемой* или *комбинаторно стягиваемой*.

Лемма 4. *Стягиваемая линейчатая петля λ в триангуляции K комбинаторно стягиваема в K.*

Доказательство. Пусть линейчатая петля λ задана отображением отрезка $\psi\colon I_1 \to K$. Пусть $F\colon I_1 \times I_2 \to K$ — стягивание петли в вершину $x_0 \in K$, т. е.

$$F\Big|_{I_1\times\{0\}} = \psi, \qquad F\Big|_{I_1\times\{1\}} = c_0\colon I_1 \to x_0 \in K.$$

Ясно, что $F\Big|_{\{0\}\times I_2}\colon I_2 \to x_0$ и $F\Big|_{\{1\}\times I_2}\colon I_2 \to x_0$.

Так как F — стягивание с сохранением концов петли, то ребра AC, CD и BD (рис. 76) отображаются в одну точку x_0. Отметим на AB точки, образами которых являются вершины K, и проведем через них вертикальные прямые. Затем, проводя дополнительные вертикальные и горизонтальные прямые и диагонали (рис. 76), по-

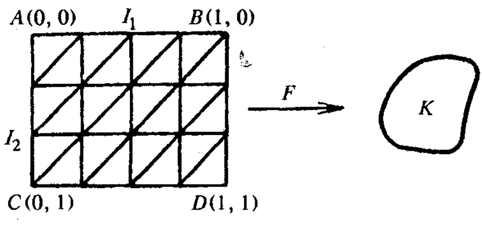

Рис. 76

лучим настолько мелкую триангуляцию Σ квадрата $ABCD$, что образ звезды $S(V)$ триангуляции Σ при отображении F лежит в звезде $S(W)$ некоторой вершины триангуляции K (это вытекает из упр. 7° § 13 гл. II).

Поставим в соответствие вершине V вершину W, аналогично поступим со всеми вершинами триангуляции Σ. Затем продолжим это отображение на ребра триангуляции Σ точно так, как это делалось в доказательстве леммы о линейчатой аппроксимации пути. Полученное отображение $F\colon \Sigma_1 \to K$, где Σ_1 — объединение ребер триангуляции Σ, переводит подразделенную сторону AB в некоторую линейчатую петлю $\bar{\lambda}$ в K.

Покажем, что $\bar{\lambda}$ комбинаторно деформируется в λ. В самом деле, при линейчатой аппроксимации пути никакая точка пути не покидает треугольника, ребра или вершины, в которых она находилась. Поэтому петля λ состоит из тех же элементарных путей, что и λ (если не обращать внимания на нулевые пути, которые могут быть опущены). Однако, вообще говоря, некоторые ребра могут пробегаться несколько раз в разных направлениях. Таким образом, от $\bar{\lambda}$ можно перейти к λ комбинаторными деформациями I типа.

Заметим теперь, что в триангуляции Σ подразделенную сторону AB можно перевести в подразделенную ломаную $ACDB$ комбинаторными деформациями I или II типов, «выдавливая» последовательно по одному треугольнику (рис. 77). Однако каждая такая комбинаторная деформация, примененная к AB, определяет в силу конструкции отображения F_1 некоторую комбинаторную деформацию I или II типов петли $\bar{\lambda}$ в K (проверьте это!).

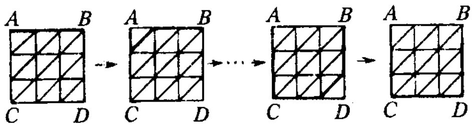

Рис. 77

Таким образом, мы показали, что с помощью комбинаторных деформаций I или II типов линейчатую петлю λ можно перевести в петлю $\bar{\lambda}$, а затем — в F_1-образ пути $ACDB$. Но этот образ есть точка x_0. Поэтому λ комбинаторно гомотопна постоянной. ■

Предлагаем читателям доказать еще два несложных утверждения, которые мы будем использовать в дальнейшем.

Упражнения. 1°. Докажите, что линейчатый путь λ разбиения П, определяемый словом $\omega(\lambda) = aa^{-1}$, гомотопен постоянному пути.

2°. Докажите, что линейчатый путь разбиения П, равный образу границы какого-нибудь многоугольника развертки П, гомотопен в X постоянному пути.

Из упражнений 1°, 2° следует, что всякая комбинаторная гомотопия определяет обычную непрерывную гомотопию между линейчатыми путями.

З а м е ч а н и е. В следующем пункте нам понадобится весьма частный случай развитой выше комбинаторной техники, а именно разбиения окружности S^1.

Зафиксируем на S^1 конечное число точек A', B', C', ... и зададим гомеоморфизм φ границы выпуклого многоугольника $ABC\ldots$ в S^1 так, что $\varphi(A) = A'$, $\varphi(B) = B'$, $\varphi(C) = C'$, ... Будем говорить, что гомеоморфизм φ определяет разбиение S^1 с ребрами $\overset{\frown}{A'B'} = \varphi(\overline{AB})$, $\overset{\frown}{B'C'} = \varphi(\overline{BC})$, $\overset{\frown}{C'A'} = \varphi(\overline{CA})$, ... и вершинами A', B',

C', ... Естественно определяются линейчатые пути и комбинаторные деформации I типа. Легко видеть, что леммы 1—4 остаются в силе для таких разбиений с тем изменением, что исчезают операции над разбиениями типа б) и комбинаторные деформации II типа.

3. Фундаментальная группа окружности. Теперь мы можем вычислить группу $\pi_1(S^1)$.

Теорема 1. *Группа* $\pi_1(S^1)$ *абелева и изоморфна группе* $\mathbb{Z}$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее вспомогательное утверждение, которое будет в дальнейшем усилено (см. теорему 4 § 4 этой главы).

Лемма 5. *Фундаментальные группы гомеоморфных пространств изоморфны.*

Доказательство. Пусть X, Y — топологические пространства с отмеченными точками x_0 и y_0 соответственно и $\varphi\colon (X, x_0) \to (Y, y_0)$ — гомеоморфизм. Тогда определены гомеоморфизмы фундаментальных групп

$$\pi(\varphi)\colon \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0),$$

$$\pi(\varphi^{-1})\colon \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

причем в силу функториальности имеем

$$\pi(\varphi^{-1})\pi(\varphi) = \pi(\varphi^{-1}\varphi) = 1_{\pi_1(X,x_0)},$$
$$\pi(\varphi)\pi(\varphi^{-1}) = \pi(\varphi\varphi^{-1}) = 1_{\pi_1(Y,y_0)};$$

следовательно, $\pi(\varphi) = [\pi(\varphi^{-1})]^{-1}$. ■

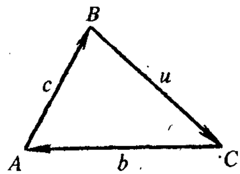

Рис. 78

Доказательство теоремы 1. На основании последней леммы достаточно вычислить фундаментальную группу плоского треугольника. Пусть Δ — треугольник с вершинами A, B, C, ориентированными ребрами a, b, c и отмеченной вершиной A (рис. 78).

Вычислим группу $\pi_1(\Delta, A)$. Пусть λ — произвольная петля в Δ с началом в точке A. Тогда в силу леммы 3 в гомотопическом классе петли λ существует линейчатая петля λ'. (Ясно, что треугольник Δ есть разбиение.) Поставим в соответствие каждому из ребер a, b, c петли $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ по следующему правилу: $\tilde{a} = cab$, $\tilde{b} = b^{-1}b$, $\tilde{c} = cc^{-1}$. Покажем, что классы петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$, не обязательно различные, являются образующими в группе $\pi_1(\Delta, A)$. В самом деле, всякая линейчатая петля λ' состоит из элементарных путей, соответствующих ребрам, т. е. $\lambda' = \varphi(a, b, c)$. Заменив в этом выражении каждое ребро на соответствующую ему петлю, получим новую петлю $\lambda'' = \varphi(\tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c})$. Легко видеть, что петли λ' и λ'' комбинаторно гомотопны. Действительно, указанная замена ребра петлей заставляет нас сначала «дойти» до начала этого ребра от фиксированной вершины A и, «пройдя» затем это ребро, «вернуться» в A кратчайшим путем (см. рис. 78). Поэтому при последовательной замене ребер петлями мы, вернувшись в A из конца P предыдущего ребра, должны тотчас «отправиться» в начало следующего ребра, т. е. в ту же точку P. Тем самым при этой замене между каждыми двумя соседними ребрами петли вставляется путь вида $\Delta\Delta^{-1}$, т. е. путь, комбинаторно гомотопный нулю. Итак, в гомотопическом классе петли λ' всегда можно найти линейчатую петлю λ, представляющую собой конечное произведение, составленное из петель $\tilde{a}$, $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ и обратных им петель.

Заметим теперь, что петли $\tilde{b}$, $\tilde{c}$ гомотопны постоянным. Поэтому петля $\tilde{a}$ (точнее, определяемый ею гомотопический класс в $\pi_1(\Delta, A)$) является единственной образующей в группе $\pi_1(\Delta, A)$. Элемент $\tilde{a}$ нетривиален. В самом деле, если бы петля $\tilde{a}$ была стягиваема, то по лемме 4 она была бы и комбинаторно стягиваема, т. е. сводилась бы к нулю конечным числом комбинаторных деформаций I типа, что, очевидно, невозможно. Следовательно, петля $\tilde{a}$ не является комбинаторно стягиваемой, а значит, определяет нетривиальный элемент $[\tilde{a}] \in \pi_1(\Delta, A)$. Аналогично, нетривиален любой элемент $[\tilde{a}^l] \in \pi_1(\Delta, A)$, где $l > 1$.

Таким образом, $\pi_1(\Delta, A)$ есть свободная циклическая группа, порожденная элементом $[\tilde{a}]$, т. е. абелева группа, изоморфная $\mathbb{Z}$. ■

Упражнение 3°. Обобщая конструкцию доказательства теоремы 1, докажите, что фундаментальная группа букета m окружностей — свободная группа с m образующими.

Полезным орудием для вычисления фундаментальных групп более сложных пространств является следующая теорема.

Теорема 2 (Зейферт–ван Кампен). *Пусть X — топологическое пространство, являющееся объединением $X = X_1 \bigcup X_2$ открытых подмножеств X_1 и X_2 таких, что пространства X_1, X_2 и $X_0 = X_1 \bigcap X_2$ линейно связны и непусты, и пусть $p \in X_0$. Рассмотрим коммутативную диаграмму, порожденную отображениями вложения:*

$$\begin{tikzcd}
& \pi_1(X_0, p) \arrow[dl, "\theta_1"'] \arrow[dr, "\theta_2"] \arrow[dd, "\omega_0"] & \\
\pi_1(X_1, p) \arrow[dr, "\omega_1"'] & & \pi_1(X_2, p) \arrow[dl, "\omega_2"] \\
& \pi_1(X, p) &
\end{tikzcd}$$

Тогда группа $\pi_1(X, p)$ является факторгруппой свободного произведения $\pi_1(X_1, p) * \pi_1(X_2, p)$ по нормальному делителю, порожденному множеством $\{\Theta_1 \alpha * \Theta_2 \alpha^{-1}\colon \alpha \in \pi_1(X_0, p)\}$. Другими словами, группа $\pi_1(X, p)$ — группа, образующими которой являются образы элементов $\pi_1(X_i, p)$, $i = 1, 2$, а все соотношения между образующими являются следствиями соотношений, полученных как ω_i-образы соотношений в каждой из групп $\pi_1(X_i, p)$, $i = 1, 2$, и соотношений $\omega_1 \Theta_1 \alpha = \omega_2 \Theta \alpha$, где $\alpha \in \pi_1(X_0, p)$.

Упражнения. 4°. Пользуясь теоремой Зейферта–ван Кампена, получите утверждение упражнения 3°.

5°. Вычислите фундаментальную группу пространства, состоящего из двух окружностей, соединенных отрезками (рис. 79).

4. Фундаментальная группа поверхности. Перейдем к вычислению фундаментальной группы поверхности. На основании леммы 5 можно считать, что замкнутая поверхность дана в разбиении, определяемом канонической разверткой.

Теорема 3. *Пусть X — замкнутая поверхность* I *или* II *типа, определяемая словом ω вида $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ или $a_1a_1a_2a_2\ldots a_qa_q$ соответственно, пусть $x_0 \in X$ — фиксированная точка поверхности (вершина триангуляции). Тогда $\pi_1(X, x_0)$ есть группа с образующими $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$ или $a_1, a_2, \ldots, a_q$ соответственно и одним соотношением $\omega = e$, где e — единичный элемент.*

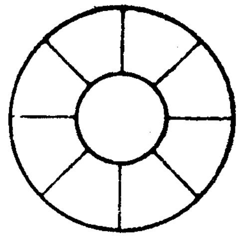

Рис. 79

Доказательство. Пусть X_1 — замкнутая поверхность, $\mathscr{P}$ — ее каноническая развертка, определяемая многоугольником Q и словом $\omega(Q)$. Пусть $X_1 = \varkappa(Q_1)$, где Q_1 — объединение всех ребер многоугольника Q. В силу эквивалентности всех вершин Q в развертке $\mathscr{P}$ их образы при отображении $\varkappa$ совпадают в X. Поэтому образ каждого ребра гомеоморфен окружности, и X_1 есть букет окружностей, склеенных в точке x_0, равный образу вершин многоугольника Q. При этом число окружностей в букете равно $2p$, если поверхность X имеет тип M_p, и ровно q, если X — типа N_q. Из результата о фундаментальной группе букета окружностей (см. упражнение 3°) получаем, что $\pi_1(X_1, x_0)$ — свободная группа, порожденная образующими $a_1, a_2, \ldots, a_p, b_1, b_2, \ldots, b_p$, если X — типа M_p, или образующими $a_1, a_2, \ldots, a_q$, если X — типа N_q. Обозначим эту группу через G.

Рассмотрим теперь отображение вложения $i\colon X_1 \to X$ и индуцированный им гомоморфизм фундаментальных групп

$$i_*\colon \pi_1(X_1, x_0) \to \pi_1(X, x_0).$$

Будем вычислять группу $\pi_1(X, x_0)$ следующим образом. Вначале докажем, что i_* — эпиморфизм. Тогда по теореме об эпиморфизме получим

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X_1, x_0)/\operatorname{Ker} i_* = G/\operatorname{Ker} i_*.$$

Вычисление ядра $\operatorname{Ker} i_*$ завершит доказательство теоремы.

Докажем, что i_* — эпиморфизм. Пусть $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ и K — какая-нибудь триангуляция поверхности X. Тогда по лемме 3 о линейчатой аппроксимации в гомотопическом классе α найдется линейчатая петля λ (в разбиении K). Можно считать, что K получено из канонического разбиения $\mathcal{P}$ поверхности X с помощью конечного числа операций вида а) или б).

Следовательно, в силу лемм 1, 2 и упражнений 1°, 2° в том же классе $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ существует линейчатая (т. е. составленная из ребер X_1) петля λ' в разбиении $\mathcal{P}$. Тем самым определен некоторый класс $\beta_\alpha \in \pi_1(X_1, x_0)$, для которого, очевидно, $i_*(\beta_\alpha) = \alpha$. Эпиморфность i_* доказана.

Перейдем к вычислению ядра $\operatorname{Ker} i_*$ эпиморфизма i_*. Пусть $\gamma \in \operatorname{Ker} i_*$ и λ — линейчатая петля разбиения $\mathcal{P}$ из класса γ. Тогда λ, очевидно, стягиваема в точку в X. В силу леммы 4 в $\mathcal{P}$ существует комбинаторное стягивание λ в вершину x_0. Иначе говоря, слово $\omega(\lambda)$, определяющее петлю λ, сводится к нулевому слову с помощью конечного числа комбинаторных деформаций I или II типа. Тогда ясно, что слово $\omega(\lambda)$ может состоять только из сочетаний вида:

1) aa^{-1};

2) (более сложный вид) $\omega_4 h_2 \omega_1 h \omega^l h^{-1} \omega_2 h_1 \omega^m h_1^{-1} \omega_3 h_2^{-1} \omega_5$, где $\omega_4 \cdot \omega_5 = \omega$, $\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot \omega_3 = \omega$; h_1, h_2, h — слова данного разбиения; l, m — целые показатели (положительные или отрицательные);

3) сочетаний, аналогичных 2), но с другими разбиениями слова ω на составные части. Это следует из того, что кроме ω, в данной развертке нет других ограничивающих слов.

Легко видеть, что комбинаторные деформации I типа (добавление или вычеркивание сочетания вида aa^{-1}) не выводят петлю λ из ее гомотопического класса, так как петля aa^{-1} гомотопна нулю в X_1. Вследствие этого можно считать, что сочетаний вида 1) в $\omega(\lambda)$ нет. Сочетания вида 2) упрощаются комбинаторными деформациями I типа следующим образом:

$$\omega_4 h_2 \omega_1 h \omega^l h^{-1} \omega_2 h_1 \omega^m h_1^{-1} \omega_3 h_2^{-1} \omega_5 \ \rightarrow$$

Вставив сочетания $\omega_1^{-1}\omega_1$, $\omega_3\omega_3^{-1}$, получаем

$$\rightarrow \ \omega_4 h_2 \omega_1 h \omega^l h^{-1} \omega_1^{-1} \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_3^{-1} h_1 \omega^m h_1^{-1} \omega_3 h_2^{-1} \omega_5 \ \rightarrow$$

Так как по условию $\omega_1\omega_2\omega_3 = \omega$, то, обозначив $\omega_1 h = g$, $\omega_3^{-1} h = a$, получаем

$$\rightarrow \ \omega_4 h_2 g \omega^l g^{-1} \omega a \omega^m a^{-1} h_2^{-1} \omega_5 \ \rightarrow$$

Вставим теперь сочетания $h_2^{-1}\omega_4^{-1}\omega_4 h_2$, $h_2^{-1}\omega_5\omega_5^{-1}h_2$, тогда имеем

$$\rightarrow \ \omega_4 h_2 g \omega^l g^{-1} h_2^{-1} \omega_4^{-1} \omega_4 h_2 \omega h_2^{-1} \omega_5 \omega_5^{-1} h_2 a \omega^m a^{-1} h_2^{-1} \omega_5 \ \rightarrow$$

Обозначив $\omega_4 h_2 g = f$, $\omega_5^{-1} h_2 a = \beta$, получаем

$$\rightarrow \ f \omega^l f^{-1} \omega_4 h_2 \omega h_2^{-1} \omega_5 \beta \omega^m \beta^{-1} \ \rightarrow$$

И, наконец, вставив сочетание $\omega_5\omega_5^{-1}$ и обозначив $\omega_5 h_2 = \gamma$, окончательно получим

$$\rightarrow \quad f\omega^l f^{-1}\omega\gamma\omega\gamma^{-1}\beta\omega^m\beta^{-1}.$$

Таким образом, мы показали, что всякая линейчатая петля, представляющая элемент ядра Ker i_*, приводится с помощью комбинаторных деформаций I типа к петле, слово которой состоит только из комбинаций вида $\alpha\omega^m\alpha^{-1}$, где m — любой целый показатель, а α — произвольное слово, составленное из символов ребер развертки или пустое.

Обратно, очевидно, что если линейчатая петля λ имеет слово $\omega(\lambda)$, состоящее только из сочетаний вида $\alpha\omega^m\alpha^{-1}$, то она определяет элемент из Ker i_*.

Упражнение 6°. Докажите, что множество слов описанного вида есть нормальный делитель N группы G, порожденный элементом $\omega = \omega(Q)$.

Таким образом, $\operatorname{Ker} i_* = N$ и, следовательно, $\pi_1(X, x_0) = G/N$. Последнее равенство эквивалентно тому, что на образующие группы G накладывается единственное соотношение $\omega = e$. ■

Укажем несколько следствий из теоремы 3.

Следствие 1. *Фундаментальная группа* $\pi_1(\mathbb{R}P^2, p)$ *проективной плоскости* $\mathbb{R}P^2$ *есть циклическая группа второго порядка.*

Доказательство. Поверхность $X = \mathbb{R}P^2$ имеет каноническую развертку со словом $a_1 a_1$, поэтому $\pi_1(X, x_0)$ — циклическая группа с одной образующей a_1 и соотношением $a_1^2 = e$. ■

Используя более сильные средства, в § 9 гл. IV покажем, что $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \simeq Z_2$, $n \geqslant 2$, в частности $\pi_1(\mathbb{R}P^3) \simeq Z_2$.

Следствие 2. *Фундаментальная группа тора* $\pi_1(T^2, x_0)$ *есть свободная абелева группа с двумя образующими.*

Доказательство. Тор T^2 имеет каноническую развертку со словом $aba^{-1}b^{-1}$, поэтому получаем, что группа $\pi_1(T^2, x_0)$ порождена образующими a, b. Соотношение $aba^{-1}b^{-1} = e$ дает условие ее коммутативности $ab = ba$. ■

Геометрически образующей a_1 фундаментальной группы проективной плоскости соответствует ее абсолют (см. модели $\mathbb{R}P^2$ в § 4 гл. II). Образующим a_1, b_1 фундаментальной группы тора T^2 соответствуют его параллель и меридиан — две основные нестягиваемые петли на торе.

Упражнение 7°. Выясните геометрический смысл образующих фундаментальной группы поверхностей M_p, N_q.

Фундаментальная группа дополнения узла играет важную роль в задаче классификации узлов.

Упражнение 8°. Докажите, что тривиальный узел не эквивалентен «трилистнику» и «восьмерке».

Указание. Покажите, что фундаментальные группы дополнений в $\mathbb{R}^3$ к этим узлам не изоморфны.

5. Топологическая инвариантность эйлеровой характеристики поверхности. Пусть X, X' — две гомеоморфные замкнутые поверхности с какими-то разбиениями Π, Π'; пусть $\chi(\Pi)$, $\chi(\Pi')$ — их эйлеровы характеристики, вычисленные по разбиениям Π, Π' соответственно. Докажем, что $\chi(\Pi)=\chi(\Pi')$.

Развертка Π (Π') эквивалентными преобразованиями приводится к канонической одного из типов I или II (определяемого числом ручек p (p') или листов Мёбиуса q (q'), приклеенных к сфере). Числа $2p$ ($2p'$), q (q') суть числа образующих фундаментальной группы поверхности (связанных определяющим соотношением $\omega = e$). В силу гомеоморфизма X и X' группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(X')$ изоморфны. Следовательно, если канонический тип разверток Π, Π' соответствует I типу, то $2p=2p'$, откуда $\chi(\Pi)=\chi(\Pi')$ ввиду равенств $\chi(\Pi)=2-2p$, $\chi(\Pi')=2-2p'$. Аналогично рассматривается случай канонических разверток II типа. Таким образом, две различных поверхности типа M_p разного рода (равно как и типа N_q) не гомеоморфны.

Две поверхности типов M_p и N_q, $q \geqslant 1$, также не гомеоморфны. Это следует из неизоморфности фундаментальных групп ориентируемой поверхности M_p рода p и неориентируемой поверхности N_q, $q \geqslant 1$, рода q. Действительно, $\pi_1(M_p)$ — группа с образующими $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ и соотношением $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}=e$, в то время как группа $\pi_1(N_q)$ — группа с образующими $a_1, \ldots, a_q$ и соотношением $a_1a_1a_2a_2\ldots a_qa_q=e$. Ясно, что эти группы не изоморфны, если $2p \neq q$. Если же предположить, что $2p=q$, то $\pi_1(M_p)$ не изоморфна $\pi_1(N_q)$ по следующей причине. В факторгруппе $\pi_1(N_q)/[\pi_1(N_q), \pi_1(N_q)]$ группы $\pi_1(N_q)$ по ее коммутанту $[\pi_1(N_q), \pi_1(N_q)]$ имеется класс смежности второго порядка, содержащий элемент $a_1a_2\ldots a_q$. В факторгруппе $\pi_1(M_p)/[\pi_1(M_p), \pi_1(M_p)]$ элементов второго порядка нет, поскольку элемент $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_pb_pa_p^{-1}b_p^{-1}$ свободной группы с образующими $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ содержится в коммутанте этой группы.

Заметим, что классификационная теорема 2 § 4 гл. II теперь полностью доказана. Род поверхности и свойство ориентируемости полностью определяют ее топологический тип.

6. О вычислении высших гомотопических групп. Вычисление гомотопических групп пространств является важной, но трудной задачей. Разработаны методы таких вычислений, однако даже применение этих методов в конкретных случаях сопряжено со значительными трудностями. Тем не менее для достаточно «хороших» пространств некоторые гомотопические группы вычислены и играют важную роль во многих задачах.

Следующая теорема позволяет сводить вычисление гомотопических групп пространства X к вычислению соответствующих групп пространства Y, гомотопически эквивалентного X.

Теорема 4. *Если $f\colon X \to Y$ — гомотопическая эквивалентность, то для всякой точки $x \in X$ гомоморфизм*

$$f_n\colon \pi_n(X, x) \to \pi_n(Y, f(x)),$$

индуцированный f, является изоморфизмом.

Доказательство. Пусть отображение g гомотопически обратно f и φ — представитель некоторого класса $[\varphi] \in \pi_n(X, x_0)$. Тогда $(gf)\varphi$ — представитель его образа $(gf)_n[\varphi]$. Сфероид φ «прикреплен» к точке x_0, а сфероид $(gf)\varphi$ — к точке $(gf)(x_0) = z_0$, причем первый сфероид гомотопен второму в силу $gf \sim 1_X$. Пусть при этой гомотопии точка x_0 перемещается в точку z_0, описывая путь $\omega(t)$ (рис. 80).

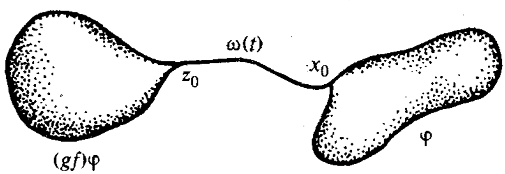

Рис. 80

Пусть $\omega(t)$ индуцирует изоморфное отображение $\pi_n(X, z_0) \xrightarrow{S_n^\omega} \pi_n(X, x_0)$ (см. теорему 5 § 3). Гомотопия сфероидов φ и $(gf)\varphi$ порождает гомотопию сфероидов $gf\varphi$ и α из $S_n^{\omega^{-1}}[\varphi]$. Следовательно, $g_n f_n[\varphi] = [gf\varphi] = [\alpha] = S_n^{\omega^{-1}}[\varphi]$, что означает коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\pi_n(X, x_0) \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "S^{\omega^{-1}}"'] & \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "g_n"] \\
\pi_n(X, gf(x_0)) &
\end{tikzcd}$$

Аналогично можно показать (проделайте это самостоятельно), что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
& \pi_n(Y, f(x_0)) \arrow[dl, "g_n"'] \arrow[dr, "S_n^{(\omega')^{-1}}"] & \\
\pi_n(X, gf(x_0)) \arrow[rr, "f_n"] & & \pi_n(Y, (fgf)(x_0))
\end{tikzcd}$$

где $\omega'\colon I \to Y$ — путь от точки $f(x_0)$ до точки $(fgf)(x_0)$, равный $f\omega$. Из коммутативности этих диаграмм и того факта, что $S_n^{\omega^{-1}}$, $S_n^{(\omega')^{-1}}$ — изоморфизмы, следует, что f_n, g_n — изоморфизмы. ■

Упражнения. 9°. Докажите, что одноточечное пространство и окружность S' имеют разные гомотопические типы.

10°. Докажите, что двумерный диск и двумерный цилиндр над окружностью имеют разные гомотопические типы.

Задача вычисления групп $\pi_k(S^n)$ стимулировала развитие многих разделов современной топологии, хотя полностью не решена и в настоящее время. Здесь резко разделяются два случая: $k \leqslant n$ и $k > n$. Первый случай достаточно элементарен, хотя и требует развития специальной методики. Приведем без доказательства * следующие результаты:

$$\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0 \qquad (n > 1),$$

$$\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z} \qquad (n \geqslant 1).$$

Отсюда, в частности, вытекает, что сфера S^n не стягиваема ни к одной из своих точек.

Второй случай до конца не исследован, и трудности растут с ростом n и $k - n$. Приведен некоторые простейшие результаты:

$$\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z},\ \pi_4(S^3) \simeq \mathbb{Z}_2, \ldots,\ \pi_{n+1}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2\ \ (n \geqslant 3).$$

Это опровергает кажущееся естественным предположение о том, что $\pi_k(S^n) = 0$ при $k > n$.

Таким образом, группы $\pi_n(S^n)$ при $n = 1, 2, \ldots$ — это свободные абелевы группы с одной образующей γ_n, причем γ_n — гомотопический класс тождественного отображения $1_{S^n}\colon S^n \to S^n$. Можно представить себе кратные классы $l \cdot \gamma_n$ как гомотопические классы таких отображений $\varphi\colon S^n \to S^n$, которые l раз «наворачивают» сферу S^n на себя. При этом если $l > 0$, то говорят о сохранении ориентации сферы при отображении φ, а если $l < 0$, то говорят об изменении ориентации (сравните с гомотопическими классами из $\pi_1(S^1)$).

Упражнение 11°. Пусть S^n — сфера с центром в нуле пространства $\mathbb{R}^{n+1}$. Покажите, что отображение S^n в себя, заданное соответствием

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \to (-x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}),$$

определяет гомотопический класс, равный $(-\gamma_n)$.

---

* Группа π_1 (S^1) вычислена в теореме 1.

Совсем просто доказать, что $\pi_n(X, x_0) = 0$, $n \geqslant 1$, если пространство X стягиваемо в точку (следует воспользоваться теоремой 4). В частности, получаем для диска D^n и пространства $\mathbb{R}^n$

$$\pi_k(\overline{D}^n) = 0, \quad \pi_k(D^n) = 0, \quad \pi_k(\mathbb{R}^n) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots$$

В § 9 гл. IV будет показано, что при $k \geqslant 2$

$$\pi_k(\mathbb{R}P^n) \simeq \pi_k(S^n) \simeq \begin{cases} 0, & k < n, \\ \mathbb{Z}, & k = n. \end{cases}$$

Для некоторых приложений (см. § 6 гл. I) необходимо знать группы π_1 и π_2 для группы ортогональных матриц с определителем 1 (обозначается $SO(3)$), рассматриваемой как подпространство в топологическом пространстве $\mathbb{R}^9$ всех матриц 3×3. Ответ получается сразу, если заметить, что $SO(3)$ гомеоморфно $\mathbb{R}P^3$. Действительно, каждая ортогональная матрица из $SO(3)$ представляет вращение стандартного базисного репера в $\mathbb{R}^3$. Из канонического вида такой матрицы заключаем, что вращение характеризуется заданием некоторой оси l, проходящей через 0, и поворотом всего пространства на угол α, $|\alpha| \leqslant \pi$, причем повороты на π и $(-\pi)$ эквивалентны. Если взять сферу S^2 единичного радиуса, то ось l задается парой диаметрально противоположных точек $(x, -x)$ на S^2 — точек пересечения l с S^2, и угол α — точкой на диаметре $[-x, +x]$ с координатой $x(\alpha) = \alpha/\pi$. Таким образом, множество всех матриц из $SO(3)$ биективно соответствует точкам единичного диска $\overline{D}^3$ с отождествленными диаметрально противоположными точками на границе, т. е. точкам $\mathbb{R}P^3$. Нетрудно проверить, что указанное соответствие — гомеоморфизм.

Таким образом, $\pi_1(SO(3)) \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(SO(3)) \simeq$ $\simeq \pi_2(\mathbb{R}P^3) = 0$, а также $\pi_3(SO(3)) \simeq \pi_3(\mathbb{R}P^3) = \mathbb{Z}$.

7. Некоторые применения. Докажем вначале важное свойство сферы S^n.

Теорема 5. *Сфера S^n (граница диска $\overline{D}^{n+1}$) не является ретрактом $\overline{D}^{n+1}$.*

Доказательство. В § 2 было указано в терминах функтора в категорию групп необходимое условие существования продолжения отображения. Применим это замечание, взяв в качестве функтора функтор π_n. Мы уже знаем, что $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$, $\pi_n(\overline{D}^{n+1}) = 0$. Далее, если бы сфера S^n была ретрактом $\overline{D}^{n+1}$, то имела бы место коммутативная диаграмма (1), где i — вложение сферы в шар, а r — искомая ретракция. Поскольку π_n — ковариантный функтор, то диаграмму (1) он переводил бы в коммутативную диаграмму (2), которая имеет вид (3). Последнее противоречит ее коммутативности. Следовательно, предположение о существовании ретракции r неверно. ■

$$\begin{tikzcd} \overline{D}^{n+1} \arrow[dr, "r"'] & & S^n \arrow[ll, "i"'] \arrow[dl, "1_{S^n}"] \\ & S^n & \end{tikzcd} \qquad (1) \qquad \begin{tikzcd} \pi_n(\overline{D}^{n+1}) \arrow[dr, "r_*"'] & & \pi_n(S^n) \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "1_{\pi_n(S^n)}"] \\ & \pi_n(S^n) & \end{tikzcd} \qquad (2)$$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[dr, "r_*"'] & & \mathbb{Z} \arrow[ll, "i_*"'] \arrow[dl, "1_{\mathbb{Z}}"] \\ & \mathbb{Z} & \end{tikzcd} \qquad (3)$$

С помощью теоремы 5 доказывается следующая теорема, интересная и важная в приложениях.

Теорема о неподвижной точке (Брауэр). *Всякое непрерывное отображение* $g\colon \overline{D}^{n+1} \to \overline{D}^{n+1}$ $(n+1)$*-мерного замкнутого шара (диска) в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку, т. е. существует точка* $x_* \in \overline{D}^{n+1}$ *такая, что* $g(x_*) = x_*$.

Доказательство. В самом деле, если такой точки нет, т. е. для всякой точки $x \in \overline{D}^{n+1}$, $g(x) \neq x$, то отрезок, соединяющий точку $g(x)$ с точкой x, можно продолжить за точку x до пересечения со сферой S^n в некоторой точке $r(x)$. Тогда отображение $r\colon \overline{D}^{n+1} \to S^n$, $x \mapsto r(x)$, является распространением на $\overline{D}^{n+1}$ тождественного отображения сферы S^n. Но мы только что доказали, что такого распространения не существует. Противоречие доказывает теорему. ■

8. Степень отображения. Группа $\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}$ тесно связана с часто используемым в анализе понятием степени непрерывного отображения $f\colon S^n \to S^n$. Пусть γ_n — образующая группы $\pi_n(S^n)$. Тогда $f_*(\gamma_n) = \alpha\gamma_n$, где α целое, а f_* — гомоморфизм группы $\pi_n(S^n)$, индуцируемый отображением f. Число α называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$ (знак числа $\deg f$ не зависит от выбора образующей).

Упражнения. 12°. Отображение единичной окружности $S^1 = \{z\colon |z| = 1\}$ комплексной плоскости задано формулой $f(z) = z^n$. Покажите, что $\deg f = n$.

13°. Покажите, что если $f\colon S^1 \to S^1$ — локальный гомеоморфизм, то число точек в полном прообразе $f^{-1}(x)$ любой точки $x \in S^1$ постоянно и равно $|\deg f|$.

Естественно вводится понятие степени и для отображений $f\colon S^n_1 \to S^n_2$ из одного экземпляра сферы в другой. (Для этого нужно зафиксировать базисные классы γ^1_n в $\pi_n(S^n_1)$ и γ^2_n в $\pi_n(S^n_2)$, тогда $f_*(\gamma^1_n) = \deg f \cdot \gamma^2_n$.) Так как γ_n — гомотопический класс $[1_{S^n}]$ тождественного отображения, то для отображения $f\colon S^n \to S^n$ имеем

$$f_*(\gamma_n) = f_*[1_{S^n}] = [f 1_{S^n}] = [f],$$

следовательно, $\deg f \cdot \gamma_n$ — гомотопический класс отображения f, таким образом, степень $\deg f$ есть «номер» гомотопического класса $[f]$.

Если $f = 1$ — тождественное отображение, то $\deg f = 1$, если $f \sim 0$ (гомотопно постоянному отображению), то $\deg f = 0$, если $f\colon S^n \to S^n$, $g\colon S^n \to S^n$ — два отображения, то они гомотопны тогда и только тогда, когда имеют равные степени: $\deg f = \deg g$. Приведем также полезную формулу $\deg(fg) = (\deg f)\cdot(\deg g)$, вытекающую из соотношения $[fg] = f_*[g]$.

Понятие степени применяется при исследовании вопроса о продолжении непрерывных отображений $f\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ на шар $\overline{D}^{n+1}$, ограниченный сферой S^n. Так как пространство $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ гомотопически эквивалентно S^n, то их гомотопические группы изоморфны и, следовательно, можно говорить о степени данного отображения, называемой обычно характеристикой (или вращением) векторного поля f; обозначим ее $\chi_{S^n}(f)$.

Лемма 6. *Условие* $\chi_{S^n}(f) = 0$ *необходимо и достаточно для существования продолжения* $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ *отображения* f.

Доказательство очевидно следует из замечания о том, что продолжение $\tilde{f}$ определяет гомотопию $f \sim 0$ по формуле

$$f(x, t) = \tilde{f}(tx), \quad x \in S^n, \quad t \in [0, 1]$$

(если S^n — сфера радиуса 1 с центром в 0), и обратно.

Упражнение 14°. Постройте продолжение $\tilde{f}$, когда $f \sim 0$. Из леммы 6 вытекает очевидное следствие.

Следствие. *Если* $\chi_{S^n}(f) \neq 0$, *то любое продолжение* $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ *имеет нуль, т. е. существует точка* $x_0 \in D^{n+1}$, $\tilde{f}(x_0) = 0$.

Это следствие часто используют для доказательства существования решения уравнения $\tilde{f}(x) = 0$, где $\tilde{f}\colon \overline{D}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — заданное отображение.

Пример 1. Легко убедиться, что в условиях теоремы Брауэра о неподвижной точке отображение $\tilde{f}(x) = -g(x) + x$ либо имеет нуль на S^n, либо $\chi_{S^n}(\tilde{f}) = 1$ ($\tilde{f}\colon S^n \to \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$ гомотопируется к тождественному отображению $\tilde{f}(x, t) = -tg(x) + x$, $x \in S^n$, $0 \leqslant t \leqslant 1$). Следовательно, $\tilde{f}$ имеет нуль в $\overline{D}^{n+1}$.

Пример 2. Основная теорема алгебры: у комплексного полинома $\tilde{f}(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m$ существует корень в комплексной плоскости.

Обозначим S^1_ρ окружность на z-плоскости: $\{z\colon |z| = \rho\}$.

Лемма 7. *При достаточно большом* ρ *имеем*

$$\tilde{f}\colon S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},$$

причем $\chi_{S^1_\rho}(\tilde{f}) = m$.

Доказательство. Рассмотрим гомотопию

$$\tilde{f}(z, t) = z^m + t(a_1 z^{m-1} + \ldots + a_{m-1} z + a_m), \quad t \in [0, 1].$$

Имеем оценку

$$|\tilde{f}(z, t)| \geqslant |z|^m \left[1 - t\left(a_1 \frac{1}{|z|} + \ldots + a_{m-1} \frac{1}{|z|^{m-1}} + a_m \frac{1}{|z|^m}\right)\right],$$

$$|z| \neq 0.$$

Очевидно, что найдется столь большое $\rho > 0$, что $|\tilde{f}(z, t)| > 0$ при $|z| = \rho$, $t \in [0, 1]$. Следовательно, $\tilde{f}\colon S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ гомотопно отображению $g\colon S^1_\rho \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $g(z) = z^m$. Согласно упражнению 12° $\chi_{S^1_\rho}(g) = m$, следовательно, и $\chi_{S^1_\rho}(f) = m$. Для завершения доказательства теоремы теперь нужно воспользоваться следствием из леммы 6. ■

9. Некоторые результаты о гомотопических группах конкретных пространств. Вначале дополним сведения о гомотопических группах сфер (п. 6). Соотношения $\pi_{n+2}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 3$, $\pi_{n+3}(S^n) \simeq \mathbb{Z}_{24}$ при $n \geqslant 5$, $\pi_{n+4}(S^n) = 0$ при $n \geqslant 6$, $\pi_{n+5}(S^n) = 0$ при $n \geqslant 7$ вместе с теоремой Фрейденталя об изоморфизме всех групп $\pi_{n+k}(S^n)$ при $n \geqslant k + 2$ и с соотношениями п. 6 позволяют вычислить большой массив групп $\pi_k(S^n)$, и в том числе изоморфных групп $\pi_{n+k}(S^n)$, $n \geqslant k + 2$, называемых *стабильными гомотопическими группами сфер*.

Для приложений представляют интерес гомотопические группы ряда классических матричных групп: группы вещественных $n \times n$-матриц $\mathrm{SO}(n)$ — специальная ортогональная (с детерминантом 1), $\mathrm{Sp}(n)$ — симплектическая, и их комплексные аналоги $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$ — унитарная и специальная унитарная. Все указанные группы вложены в линейное пространство $n \times n$-матриц (вещественное или комплексное соответственно) и наследуют евклидову топологию из этого пространства.

Приведем следующие данные:

$$\pi_1(\mathrm{SO}(n)) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad n \geqslant 3; \quad \pi_1(\mathrm{SU}(n)) \simeq \pi_1(\mathrm{Sp}(n)) = 0, \quad n \geqslant 1;$$

$\pi_1(SO(2)) \simeq \mathbb{Z}$; $\pi_1(SO(3)) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2 = 0$ для всех рассматриваемых групп;

$$\begin{cases} \pi_3(SO(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n = 3, \quad n \geqslant 5, \\ \pi_3(SO(4)) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, \quad \pi_3(SU(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 2, \\ \pi_3(Sp(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad n \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_4(SO(3)) \simeq \pi_4(SU(2)) \cong \mathbb{Z}_2, \quad \pi_4(SO(4)) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2, \\ \pi_4(SO(5)) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad \pi_4(SO(n)) = 0, \quad n \geqslant 6, \\ \pi_4(SU(n)) = 0, \quad n \geqslant 3; \quad \pi_4(Sp(n)) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad n \geqslant 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \pi_k(SO(3)) \simeq \pi_k(SU(2)) \simeq \pi_k(Sp(1)) \simeq \pi_k(S^3), \quad k > 1, \\ \pi_k(SO(4)) \simeq \pi_k(S^3) \oplus \pi_k(S^3), \quad k > 1; \end{cases}$$

$$\pi_1(U(1)) \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi_k(U(1)) = 0, \quad k > 1;$$

$$\pi_1(U(n)) \simeq \mathbb{Z}, \quad \pi_k(U(n)) \simeq \pi_k(SU\,(n)), \quad k > 1.$$

Группы $\pi_k(SO(n))$, $\pi_k(U(n))$ не зависят от n при $1 \leqslant k \leqslant n - 2$ и $1 \leqslant k \leqslant 2n - 1$ соответственно и называются *стабильными* гомотопическими группами и обозначаются $\pi_k(SO)$, $\pi_k(U)$; для них справедлива периодичность Ботта $\pi_{k+8}(SO) \simeq \pi_k(SO)$, $\pi_{k+2}(U) \simeq \pi_k(U)$ позволяющая с помощью соотношений $\pi_1(SO) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_2(SO) = 0$, $\pi_3(SO) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_4(SO) = 0$, $\pi_5(SO) = 0$, $\pi_6(SO) = 0$, $\pi_7(SO) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_8(SO) \simeq \mathbb{Z}_2$, $\pi_1(U) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_2(U) = 0$ вычислить любую стабильную гомотопическую группу для групп $SO(n)$, $U(n)$.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическое изложение теории гомотопий дано в книгах [58, 62, 63, 65, 78, 81].

Неформальное введение в теорию гомотопий и ее приложения имеется в [24].

Для начального изучения понятия фундаментальной группы можно рекомендовать книги [34, 43].

При изучении понятий категории и функтора полезно обратиться к монографии [41].

Теория степени отображения и характеристики векторного поля — см. обзор литературы к гл. IV, V.

С приложениями теории степени можно познакомиться по книге [35].

Задачники по теории гомотопий: [48, 52].