Глава IV

# Многообразия и расслоения

В предыдущих главах рассматривались общие свойства топологических пространств и их отображений. В топологии и ее приложениях появляются, однако, пространства с дополнительными структурами, например, гладкие многообразия и расслоенные пространства, играющие важную роль во многих разделах современной математики.

В настоящей главе систематически изучаются гладкие многообразия и естественно связанные с ними касательные расслоения, излагаются элементы теории критических точек гладких функций на многообразиях и элементы теории расслоенных пространств.

## § 1. Основные понятия дифференциального исчисления в $n$-мерном пространстве

**1. Гладкие отображения.** Напомним, что $\mathbb{R}^n$ — это пространство упорядоченных наборов $x=(x_1, \ldots, x_n)$ из действительных чисел (см. § 2 гл. II), называемых *точками* или *векторами*. Будем считать, что $\mathbb{R}^n$ *стандартно вложено в* $\mathbb{R}^{n+k}$, т. е. точку $(x_1, \ldots, x_n)$ из $\mathbb{R}^n$ будем отождествлять с точкой $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$ из $\mathbb{R}^{n+k}$. Числа $x_1, \ldots, x_n$ из набора $(x_1, \ldots, x_n)$ называются *стандартными координатами* точки $x=(x_1, \ldots, x_n)$ в $\mathbb{R}^n$.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество. Всякое отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ можно представить (см. § 2 гл. II) как упорядоченный набор из $m$ функций:

$$f(x_1, \ldots, x_n)=(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)).$$

**Определение 1.** Отображение $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ называется *гладким* (или *дифференцируемым*) *класса* $C^r$, $r \geqslant 1$, на $U$, если каждая функция $f_k$, $k=1, \ldots, m$, имеет все непрерывные частные производные $\frac{\partial^s f_k}{\partial^{s_1} x_1 \ldots \partial^{s_n} x_n}$, $s_1 + \ldots + s_n = s$, на $U$ до порядка $s = r$ включительно.

Гладкие отображения $f$ класса $C^r$ называют также *$C^r$-отображениями* и пишут $f \in C^r$.

Если все функции $f_k$ имеют непрерывные частные производные любого порядка, то отображение $f$ называется *бесконечно гладким* ($f \in C^\infty$). Непрерывные отображения называют *$C^0$-отображениями*. Очевидно, что справедливы следующие включения:

$$C^0 \supset C^1 \supset \ldots \supset C^r \supset \ldots \supset C^\infty.$$

В том случае, когда все функции $f_k$ аналитические (функция называется *аналитической*, если ее ряд Тейлора сходится к ней в окрестности каждой точки), отображение $f$ называется *аналитическим* ($f \in C^\omega$). Справедливо включение $C^\infty \supset C^\omega$.

**Определение 2.** Матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

первых производных отображения $f$, вычисленных в точке $x_0$, называется *матрицей Якоби отображения $f$ в $x_0$* и обозначается $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$.

Матрица Якоби определяет линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$:

$$y_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0} x_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|_{x_0} x_2 + \ldots + \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x_0} x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y_m = \frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0} x_1 + \frac{\partial f_m}{\partial x_2}\Big|_{x_0} x_2 + \ldots + \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_{x_0} x_n,$$

которое называется *производной отображения $f$ в точке $x_0$* и обозначается $D_{x_0} f$. Производная является *«линеаризацией»* отображения $f$: аффинное отображение $f(x_0) + (D_{x_0} f)(x - x_0)$ совпадает с $f(x)$ с точностью до бесконечно малых более высокого порядка, чем $\|x - x_0\|$. Точнее, $D_{x_0} f$ — единственное линейное отображение $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, для которого

$$\frac{f(x) - f(x_0) - (D_{x_0} f)(x - x_0)}{\|x - x_0\|} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Следствием теоремы о производной сложной функции является следующее утверждение («цепное правило»): *при суперпозиции отображений $f$ и $g$ матрицы Якоби перемножаются, т. е.*

$$\left(\frac{\partial(fg)}{\partial x}\right)\Big|_{x_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{g(x_0)}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}.$$

Доказательство этого факта предоставляется в качестве упражнения.

**2. Ранг отображения.** Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — отображение класса $C^r$, $r \geqslant 1$. *Рангом отображения $f$ в точке $x_0$* называется ранг его матрицы Якоби, вычисленной в точке $x_0$, и обозначается $\operatorname{rank}_{x_0} f$. Он равен размерности подпространства в $\mathbb{R}^m$ — образа $\mathbb{R}^n$ при линейном отображении $D_{x_0} f$. Так как ранг матрицы не может превысить число строк или столбцов, то $\operatorname{rank}_{x_0} f \leqslant \min(n, m)$. Точки, в которых $\operatorname{rank}_{x_0} f = \min(n, m)$, называются *регулярными* (иногда также *некритическими, неособыми*). Точки, в которых $\operatorname{rank}_{x_0} f < \min(n, m)$, называются нерегулярными (также критическими, особыми).

Множество регулярных точек отображения $f$ открыто в $\mathbb{R}^n$ (в силу непрерывности частных производных определитель, на котором реализуется ранг матрицы Якоби, отличен от нуля в некоторой окрестности регулярной точки). Множество регулярных точек может быть и пустым. (Приведите примеры.)

**3. Теорема о неявной функции.** Приведем *теорему о неявной функции*, доказываемую в курсе анализа. Точки пространства $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ представим в виде $(x, y)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ — открытые множества и $(x_0, y_0) \in U \times V \subset \mathbb{R}^{n+m}$.

**Теорема 1.** *Если $f\colon U \times V \to \mathbb{R}^m$ есть $C^1$-отображение, $f(x_0, y_0) = 0$ и* $\det \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)} \neq 0$, *то существуют такая открытая окрестность $W(x_0) \subset U$ точки $x_0$ и такое отображение $g$: $W(x_0) \to V$, что $g(x_0) = y_0$ и $f(x, g(x)) = 0$ для любого $x \in W(x_0)$, причем такое отображение $g$ единственно. Кроме того, $g \in C^1$ и*

$$\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = -B^{-1}A, \tag{1}$$

*где матрицы $B$ и $A$ получаются из матриц* $\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right)$ *и* $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right)$ *соответственно при замене аргумента $y$ на $g(x)$.*

Замечание. Если $f \in C^r$, $r \geqslant 1$, то $g \in C^r$. Это утверждение вытекает из равенства (1).

Следствием теоремы о неявной функции является *теорема об обратном отображении.*

**Теорема 2.** *Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $f$: $U \to \mathbb{R}^n$ — отображение класса $C^r$, $r \geqslant 1$; $x_0 \in U$ — регулярная точка отображения $f$. Тогда существуют открытые окрестности $V(x_0)$, $W(f(x_0))$ точек $x_0$ и $f(x_0)$ такие, что $f$ является гомеоморфизмом $v(x_0) \xrightarrow{f} W(f(x_0))$ и $f^{-1} \in C^r$.*

Доказательство. Рассмотрим отображение $F$: $\mathbb{R}^n \times U \to \mathbb{R}^n$, задаваемое по правилу $F(y, x) = y - f(x)$ $(y \in \mathbb{R}^n,\ x \in U)$. Обозначим $y_0 = f(x_0)$. Очевидно, $F \in C^r$ и $F(y_0, x_0) = 0$. Так как $\operatorname{rank}_{x_0} f = n$, то $\det \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\Big|_{(y_0, x_0)} \neq 0$. По теореме о неявной функции существуют открытая окрестность $W(y_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки $y_0$ и единственное отображение $g$: $W(y_0) \to U$ такие, что $g(y_0) = x_0$ и для любого $y \in W(y_0)$

$$F(y, g(y)) = y - f(g(y)) = 0. \tag{2}$$

Положим $V(x_0) = g(W(y_0))$. Так как $V(x_0) = f^{-1}(W(y_0))$, то $V(x_0)$ открыто в силу непрерывности $f$. Таким образом, $g$: $W(y_0) \to V(x_0)$ — отображение открытых множеств, и в силу (2) получаем $g = f^{-1}$. Кроме того, в силу замечания к теореме 1 имеем $f^{-1} \in C^r$. ■

**Определение 3.** Отображение $f: U \to V$ открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ на открытое множество $V \subset \mathbb{R}^n$ называется *$C^r$-диффеоморфизмом*, $r \geqslant 1$, если: 1) $f$ — гомеоморфизм $U$ на $V$; 2) $f \in C^r$; 3) $f^{-1} \in C^r$.

*Упражнение* 1°. Постройте $C^\infty$-диффеоморфизм $f$: $D^n_\rho(x) \to \mathbb{R}^n$.

Теперь теорему об обратном отображении можно сформулировать в следующем виде. *Если $f: U \to \mathbb{R}^n$ есть $C^r$-отображение, $r \geqslant 1$, открытого множества $U \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$ и $x_0$ — регулярная точка $f$, то существуют открытые окрестности $V(x_0)$, $W(f(x_0))$ точек $x_0$, $f(x_0)$ такие, что отображение $f$: $V(x_0) \to W(f(x_0))$ является $C^r$-диффеоморфизмом.*

*Упражнения.* 2°. Докажите, что диффеоморфизм не имеет нерегулярных точек.

Указание. Воспользуйтесь замечанием о матрице Якоби для суперпозиции отображений $f$, $f^{-1}$.

3°. Пусть $f$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — отображение класса $C^r$, $r \geqslant 1$. Покажите, что нерегулярные точки $f$ характеризуются тем, что первые частные производные $f$ по всем переменным в этих точках равны нулю.

**4. «Криволинейные» системы координат.** Пусть $U$, $V \subset \mathbb{R}^n$ — открытые множества и $f\colon U \to V$ — гомеоморфизм. Положение каждой точки $y \in V$ можно задать с помощью стандартных координат $y_1, \ldots, y_n$ точки $y$, но это можно сделать и с помощью стандартных координат точки $x = f^{-1}(y) \in U$.

**Определение 4.** Стандартные координаты точки $f^{-1}(y) \in U$ называют *«криволинейными» координатами точки* $y \in V$.

Иными словами, вместо координатных плоскостей $y_i = b_i$, $i = 1, \ldots, n$, в $V$ рассматриваются образы координатных плоскостей $x_i = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, в $U$ при гомеоморфизме $f$, пересечение которых определяет положение точки $y$. Термин «криволинейные» координаты просто отражает тот факт, что новые координатные «плоскости» в $V$, вообще говоря, «искривлены» (рис. 81).

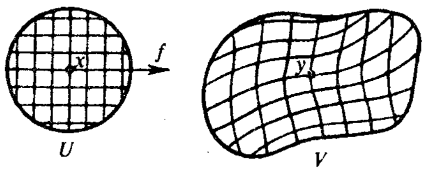



Рис. 81

Отметим, что в анализе криволинейные координаты вводятся обычно не с помощью гомеоморфизма, а с помощью $C^r$-диффеоморфизма, где порядок гладкости $r$ зависит от рассматриваемой задачи.

Если на $V$ задана функция $g$ как функция стандартных координат точки $y$, то ее можно рассматривать как функцию стандартных координат точки $x$, т. е. как функцию криволинейных координат точки $y$. В анализе такая операция называется *заменой переменных*. Иначе говоря, мы совершаем замену координат в пространстве прообразов функции $g$. Это равносильно тому, что вместо функции $g$ рассматривается функция $gf$. Разумеется, можно рассматривать и отображения и совершать аналогичные замены переменных. Замены делают также и в пространстве образов отображений: если $g\colon W \to V$ — отображение множества $W \subset \mathbb{R}^m$, то вместо стандартных координат точки $g(z)$, $z \in W$, рассматриваются криволинейные координаты точки $g(z)$, определяемые гомеоморфизмом $f$. Такая замена равносильна тому, что вместо отображения $g$ рассматривается отображение $f^{-1}g$.

Заметим, что ранг гладкого отображения не меняется при гладкой замене переменных.

**5. Теорема о выпрямлении.** *Стандартным вложением* $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+k}$ называют отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+k}$, задаваемое соответствием $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$.

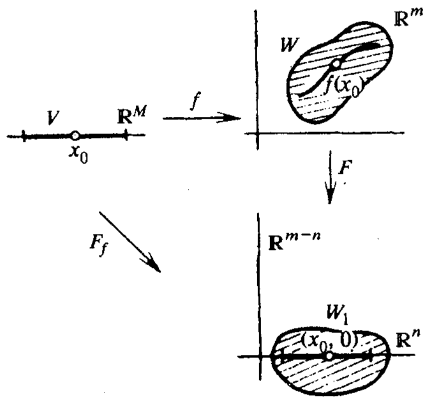
*Стандартной проекцией* $\mathbb{R}^{n+k}$ на $\mathbb{R}^n$ называют отображение $\mathbb{R}^{n+k} \to \mathbb{R}^n$, задаваемое соответствием $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+k}) \mapsto$ $\mapsto (x_1, \ldots, x_n)$.

**Теорема 3** (о выпрямлении отображения в окрестности регулярной точки). *Пусть* $U \subset \mathbb{R}^n$ — *открытое множество,* $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — $C^r$-*отображение,* $r \geq 1$, $x_0$ — *регулярная точка* $f$. *Тогда*

А) *Если* $n \leq m$, *то существуют открытая окрестность* $W(f(x_0))$ *точки* $f(x_0)$, *открытое множество* $W_1 \subset \mathbb{R}^m$ *и* $C^r$-*диффеоморфизм* $F\colon W(f(x_0)) \to W_1$ *такие, что* $Ff$ *на некоторой открытой окрестности* $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ *является стандартным вложением* $\mathbb{R}^n$ *в* $\mathbb{R}^m$ (рис. 82).

Б) *Если* $n \geq m$, *то существуют открытая окрестность* $V(x_0)$ *точки* $x_0$, *открытое множество* $W \subset \mathbb{R}^n$ *и* $C^r$-*диффеоморфизм* $F\colon V(x_0) \to W$ *такие, что* $fF^{-1}$ *на множестве* $W$ *является стандартной проекцией* $\mathbb{R}^n$ *на* $\mathbb{R}^m$ (рис. 83).

Поясним смысл этой теоремы с точки зрения замены координат. В случае А) диффеоморфизм $F^{-1}$ определяет криволинейные коор-




82

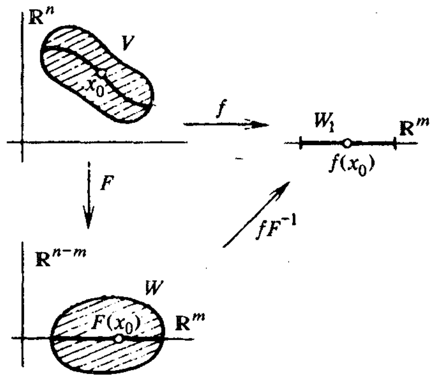



Рис. 83

динаты $\{\xi_1, \ldots, \xi_m\}$ в пространстве $\mathbb{R}^m$, в которых отображение $f$ имеет вид

$$\xi_1 = x_1, \ \ldots, \ \xi_n = x_n, \ \xi_{n+1} = 0, \ \ldots, \ \xi_m = 0.$$

В случае Б) диффеоморфизм $F^{-1}$ определяет криволинейные координаты $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$, в которых отображение $f$ имеет вид $y_1 = \xi_1, \ldots, y_m = \xi_m$.

Идея доказательства теоремы состоит в том, что заданные отображения мы будем достраивать до отображений пространств одинаковой размерности и, применяя теорему об обратном отображении, получать необходимые замены координат.

Доказательство. А) Точки пространства $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ представим в виде $(x, y)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots \ldots y_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. По условию $\operatorname{rank}_{x_0} f = n$, т. е. $\operatorname{rank} \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0} = n$. Предположим сначала, что в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ отличен от нуля определитель, составленный из первых $n$ строк. Рассмотрим отображение $F_1\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, задаваемое по правилу $F_1(x, y) = f(x) + (0, y)$. Матрица Якоби отображения $F_1$ в точке $(x_0, 0)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & & & \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & & 0 & \\
\frac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & & & \\
\hline
\frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_{n+1}}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & 1 & & 0 \\
\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & & \ddots & \\
\frac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{x_0}, & \ldots, & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\Big|_{x_0} & 0 & & 1
\end{array}\right)$$

По предположению определитель, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поэтому $\operatorname{rank}_{(x_0, 0)} F_1 = m$. По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $W(x_0, 0)$ и $W_1(f(x_0))$ точек $(x_0, 0)$ и $f(x_0)$ соответственно, что отображение $F_1\Big|_{W(x_0, 0)}\colon W(x_0, 0) \to W_1(f(x_0))$ является $C^r$-диффеоморфизмом. Значит, и отображение $F_1^{-1}\colon W_1(f(x_0)) \to W(x_0, 0)$ является $C^r$-диффеоморфизмом. Положим $F = F_1^{-1}$. В силу непрерывности отображения $f$ существует открытая окрестность $V(x_0)$ точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ такая, что $f(V(x_0)) \subset W_1(f(x_0))$. Тогда корректно определено отображение $Ff\colon V(x_0) \to W(x_0, 0)$. Отображение $Ff$ является стандартным вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ на окрестности $V(x_0)$. Действительно, так как отображение $F_1^{-1}$ биективно и $F_1(x, 0) = f(x)$, то $(Ff)(x) = F(f(x)) = F_1^{-1}(f(x)) = (x, 0)$.

В том случае, когда в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$ определитель, составленный из первых $n$ строк, равен нулю, необходимо предварительно перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^m$ (иначе говоря, произвести специальную замену координат в $\mathbb{R}^m$ с помощью $C^\infty$-диффеоморфизма $g\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ так, чтобы определитель, составленный из первых $n$ строк матрицы Якоби $\left(\frac{\partial (g^{-1}f)}{\partial x}\right)\Big|_{x_0}$, был отличен от нуля). Для отображения $g^{-1}f$ описанным выше способом построим $C^\infty$-диффеоморфизм $F$, тогда $Fg^{-1}$ будет искомым $C^r$-диффеоморфизмом для отображения $f$.

Б) Элементы пространства $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ представим в виде $(x, y)$, где $x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-m}) \in \mathbb{R}^{n-m}$. Пусть $x_0 = (x^0, y^0)$. По условию $\operatorname{rank}_{(x^0, y^0)} f = m$, т. е. $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial (x, y)}\right)\Big|_{(x^0, y^0)} = m$. Предположим сначала, что в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial (x; y)}\right)\Big|_{(x^0, y^0)}$ отличен от нуля определитель, составленный из первых $m$ столбцов. Рассмотрим отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$, задаваемое по правилу $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Матрица Якоби отображения $F$ в точке $(x^0, y^0)$ имеет вид

$$\left(\begin{array}{c|c}
\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}\Big|_{(x^0, y^0)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial x_m}\Big|_{(x^0, y^0)} \end{matrix} &
\begin{matrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial y_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \dfrac{\partial f_1}{\partial y_{n-m}}\Big|_{(x^0, y^0)} \\ \cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial y_1}\Big|_{(x^0, y^0)}, \ldots, \dfrac{\partial f_m}{\partial y_{n-m}}\Big|_{(x^0, y^0)} \end{matrix} \\
\hline
0 & \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix}
\end{array}\right).$$

По предположению определитель, стоящий в левом верхнем углу, отличен от нуля, поэтому $\operatorname{rank}_{(x^0, y^0)} F = n$. По теореме об обратном отображении существуют такие открытые окрестности $V(x^0, y^0)$ и $W(F(x^0, y^0))$ точек $(x^0, y^0)F(x^0, y^0)$ соответственно, что отображение

$$F\Big|_{V(x^0,\, y^0)}: V(x^0, y^0) \to W(f(x^0, y^0), y^0)$$

является $C^r$-диффеоморфизмом. Отображение $fF^{-1}$ на окрестности $W(f(x^0, y^0), y^0)$ является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Действительно, пусть $z \in W(f(x^0, y^0), y^0)$. Так как $F^{-1}$ биективно, то в окрестности $V(x^0, y^0)$ найдется единственная точка $(\xi, \eta)$, для которой $z = (f(\xi, \eta), \eta)$; тогда

$$[fF^{-1}](f(\xi, \eta), \eta) = f[F^{-1}(f(\xi, \eta), \eta)] = f(\xi, \eta).$$

В том случае, когда в матрице Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial(x, y)}\right)\Big|_{(x^0,\, y^0)}$ определитель, составленный из первых $m$ столбцов, равен нулю, предварительно необходимо перенумеровать координаты в $\mathbb{R}^n$ (произвести замену координат с помощью $C^\infty$-диффеоморфизма $g$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$) так, чтобы определитель, составленный из первых $m$ столбцов матрицы Якоби $\left(\frac{\partial(fg)}{\partial(x, y)}\right)\Big|_{(x^0,\, y^0)}$, был отличен от нуля. Для отображения $fg$ описанным выше способом построим $C^r$-диффеоморфизм $F$, тогда $Fg^{-1}$ будет искомым $C^r$-диффеоморфизмом для отображения $f$. ■

**6. Лемма о представлении гладких функций.** Приведем еще один результат, необходимый нам для дальнейшего.

**Лемма 1.** *Пусть $f$ есть $C^{r+1}$-функция $(r \geqslant 0)$, заданная на выпуклой окрестности $V(x^0)$ точки $x^0$ в $\mathbb{R}^n$. Тогда существуют $C^r$-функции $g_i$: $V(x^0) \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} g_i(x)(x_i - x_i^0)$, причем $g_i(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0)$.*

Доказательство. Положим

$$g_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0))\, dt.$$

Применяя элементарные преобразования анализа, получаем

$$f(x) - f(x^0) = \int_0^1 \frac{df(x^0 + t(x - x^0))}{dt}\, dt =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x^0))\right) dt =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0 + t(x - x_0))\, dt = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0)\, g_i(x). \ ■$$

*Упражнение* 4°. Пусть $f$ — функция класса $C^{r+2}$, $r \geqslant 0$, заданная на выпуклой окрестности $V(x^0)$ точки $x^0$ в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) A_{ij}(x),$$

где $A_{ij}(x)$ — функции класса $C^r$ на $V(x^0)$, причем $A_{ij}(x^0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$.

## § 2. Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве

**1. Понятие гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^N$.** В курсах анализа и аналитической геометрии рассматриваются гладкие поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемые уравнением $z = f(x, y)$, где $f$ — гладкая функция двух переменных, определенная в некоторой области $D$ плоскости $(x, y)$. Рассматриваются и более сложные поверхности (например замкнутые), которые задаются на отдельных своих частях (локально) одним из следующих уравнений: $z = \rho(x, y)$, $y = (x, z)$, $x = r(y, z)$. Простейшим примером такой поверхности является сфера $S^2$. Другими объектами, изучаемыми в анализе и аналитической геометрии, являются гладкие кривые, задаваемые локально одной из систем уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = \psi(z); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varphi(y), \\ z = \psi(y); \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

Все эти объекты охватываются единым понятием гладкого подмногообразия в евклидовом пространстве.

Рассмотрим некоторое подмножество $M$ в $\mathbb{R}^N$ как топологическое пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^N$. Пусть $x$ — точка $M$ и $U(x)$ — ее открытая окрестность (в $M$).

**Определение 1.** Если задан гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U(x)$, $n \leqslant N$, удовлетворяющий условиям:

1) $\varphi \in C^r$, $r \geqslant 1$, как отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$,

2) $\operatorname{rank}_y \varphi = n$ для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$,

то пара $(U(x), \varphi)$ называется *картой точки $x$ в $M$ класса $C^r$* или *$C^r$-картой в $M$.*

Замечание. Из определения следует, что $C^r$-карта $(U(x), \varphi)$ точки $x$ является $C^r$-картой любой точки $y \in U(x)$. Это служит объяснением тому, что пару $(U(x), \varphi)$ называют также $C^r$-картой в $M$.