Упражнение 4°. Пусть f — функция класса C^{r+2}, $r \geqslant 0$, заданная на выпуклой окрестности $V(x^0)$ точки x^0 в $\mathbb{R}^n$. Покажите, что

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0) + \sum_{i,j=1}^{n} (x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0) A_{ij}(x),$$

где $A_{ij}(x)$ — функции класса C^r на $V(x^0)$, причем $A_{ij}(x^0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$.

§ 2. Гладкие подмногообразия в евклидовом пространстве

1. Понятие гладкого подмногообразия в $\mathbb{R}^N$. В курсах анализа и аналитической геометрии рассматриваются гладкие поверхности в трехмерном евклидовом пространстве, задаваемые уравнением $z = f(x, y)$, где f — гладкая функция двух переменных, определенная в некоторой области D плоскости (x, y). Рассматриваются и более сложные поверхности (например замкнутые), которые задаются на отдельных своих частях (локально) одним из следующих уравнений: $z = \rho(x, y)$, $y = (x, z)$, $x = r(y, z)$. Простейшим примером такой поверхности является сфера S^2. Другими объектами, изучаемыми в анализе и аналитической геометрии, являются гладкие кривые, задаваемые локально одной из систем уравнений:

$$\begin{cases} x = \varphi(z), \\ y = \psi(z); \end{cases} \quad \begin{cases} x = \varphi(y), \\ z = \psi(y); \end{cases} \quad \begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x). \end{cases}$$

Все эти объекты охватываются единым понятием гладкого подмногообразия в евклидовом пространстве.

Рассмотрим некоторое подмножество M в $\mathbb{R}^N$ как топологическое пространство с топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^N$. Пусть x — точка M и $U(x)$ — ее открытая окрестность (в M).

Определение 1. Если задан гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U(x)$, $n \leqslant N$, удовлетворяющий условиям:

1) $\varphi \in C^r$, $r \geqslant 1$, как отображение из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$,

2) $\operatorname{rank}_y \varphi = n$ для любой точки $y \in \mathbb{R}^n$,

то пара $(U(x), \varphi)$ называется *картой точки x в M класса C^r* или *C^r-картой в M*.

Замечание. Из определения следует, что C^r-карта $(U(x), \varphi)$ точки x является C^r-картой любой точки $y \in U(x)$. Это служит объяснением тому, что пару $(U(x), \varphi)$ называют также C^r-картой в M.

Таким образом, задание карты означает локальное задание множества M (задание окрестности $U(x)$) в виде

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(y_1, \ldots, y_n), \\ x_2 &= \varphi_2(y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_N &= \varphi_N(y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{1}$$

где φ_i, $i = 1, \ldots, N$, — функции класса C^r, определяющие гомеоморфизм φ.

Окрестность $U(x)$ часто называют *координатной окрестностью* ввиду того, что гомеоморфизм (1) определяет на множестве $U(x)$ криволинейные координаты $y_1, \ldots, y_n$, не связанные, вообще говоря, со стандартными координатами объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$.

Отметим, что в литературе также рассматривают карты, гомеоморфизмы φ которых действуют не из всего пространства $\mathbb{R}^n$, а из его некоторого открытого связного множества U; в этом случае пару (U, φ) по-прежнему называют C^r-картой в M (подробнее о таких картах см. § 3).

Определение 2. Отображение $f\colon A \to \mathbb{R}^n$ некоторого подмножества $A \subset \mathbb{R}^N$ в пространство $\mathbb{R}^n$ называется *C^r-отображением*, $r \geqslant 1$, *на A* ($f \in C^r(A)$), если для каждой точки $x \in A$ существуют открытая окрестность $\tilde{U}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^N$ и C^r-отображение $\tilde{f}\colon \tilde{U}(x) \to \mathbb{R}^n$ такие, что $\tilde{f}\big|_{A \cap \tilde{U}(x)} = f$.

Лемма 1. *Гомеоморфизм φ^{-1} из определения 1 принадлежит классу C^r.*

Доказательство. Пусть $x \in U(x_0) \subset \mathbb{R}^N$, тогда $\varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^n$. Так как $\operatorname{rank}_{\varphi^{-1}(x)} \varphi = n$, то по теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $W(x) \subset \mathbb{R}^N$ точки x, открытое множество $W_1 \subset \mathbb{R}^N$ и C^r-диффеоморфизм $F\colon W(x) \to W_1$ такие, что $F\varphi$ на некоторой окрестности $V(\varphi^{-1}(x)) \subset \mathbb{R}^n$ точки $\varphi^{-1}(x)$ является стандартным вложением $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$. Пусть $g\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ — стандартная проекция, очевидно, $g \in C^r$. Рассмотрим отображение $gF\colon W(x) \to \mathbb{R}^n$, тогда $gF \in C^r$ и $gF\big|_{W(x) \cap U(x_0)} = \varphi^{-1}$. ■

Определение 2 позволяет обобщить понятие диффеоморфизма открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ (см. п. 3 § 1) следующим образом: гомеоморфизм $f\colon A \to B$ подмножеств $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ называется *C^r-диффеоморфизмом*, если $f \in C^r(A)$, $f^{-1} \in C^r(B)$.

Из леммы 1 следует, что условия 1), 2) определения 1 C^r-карты $(U(x), \varphi)$ эквивалентны тому, что φ — C^r-диффеоморфизм.

Теперь дадим основное определение.

Определение 3. Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ называется *n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ класса C^r* или *C^r-подмногообразием*, если каждая его точка имеет некоторую C^r-карту.

Будем обозначать это подмногообразие через M^n и писать $M^n \in C^r$, указывая его принадлежность классу C^r. Другими словами, множество M в $\mathbb{R}^N$ есть n-мерное подмногообразие, если для каждой его точки можно построить координатную систему; каждая координатная система определена локально (и называется *локальной системой координат*), но все множество координатных систем «охватывает» все подмногообразие.

Определение карты можно расширить на случай $r = 0$, убирая условие 2) в определении 1. Естественно, что в этом случае о дифференцируемости гомеоморфизма (1) ничего сказать нельзя. В этом случае говорят, что M^n — *топологическое многообразие*, и пишут $M^n \in C^0$.

Отметим, что для каждой точки x подмногообразия M^n класса C^r определено, вообще говоря, бесконечное число карт. *Атласом подмногообразия* M^n называют такое множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ класса C^r, открытые множества $\{U_\alpha\}$ которых образуют покрытие M^n. Атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия M^n задает множество координатных систем, «обслуживающих» все подмногообразие. Чтобы задать подмногообразие, достаточно задать какой-нибудь атлас.

Упражнения. 1°. Покажите, что если заданы две карты, (U, φ), (V, ψ), и C^r-подмногообразия M^n такие, что $U \cap V \neq \varnothing$, то отображение $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ открытых множеств пространства $\mathbb{R}^n$ является C^r-диффеоморфизмом.

2°. Покажите, что если достаточное число экземпляров пространства $\mathbb{R}^n$ «склеить» с помощью гомеоморфизмов $\psi^{-1}\varphi$, определяемых картами некоторого атласа, то получится топологическое пространство, гомеоморфное M^n. (Сравните с разверткой двумерной поверхности, см. § 4 гл. II.)

Таким образом, выбор атласа определяет «*склейку*» подмногообразия M^n из n-мерных пространств с помощью системы карт.

2. Примеры подмногообразий. 1. Пара $(\mathbb{R}^1, 1_{\mathbb{R}^1})$, где $1_{\mathbb{R}^1}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — тождественное отображение, определяет одну C^∞-карту для всех $x \in \mathbb{R}^1$ и составляет атлас одномерного подмногообразия в $\mathbb{R}^1$ класса C^∞.

Упражнение 3°. Покажите, что пара $(\mathbb{R}^1, \varphi)$, где $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$, определяется формулой $\varphi(x) = x^3$, не является C^r-картой $(r \geqslant 1)$ точки $x = 0$, но составляет атлас одномерного многообразия в $\mathbb{R}^1$ класса C^0.

2. По аналогии с примером 1 пара $(\mathbb{R}^1, 1_{\mathbb{R}^n})$, где $1_{\mathbb{R}^n}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — тождественное отображение, определяет одну C^∞-карту для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и составляет атлас n-мерного подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ класса C^∞.

3. Зададим на сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ атлас, состоящий из двух карт. Воспользуемся стереографической проекцией (рис. 84). Тогда множества $U_1 = S^2 \setminus \{N\}$, $U_2 = S^2 \setminus \{S\}$ образуют открытое покрытие сфе-

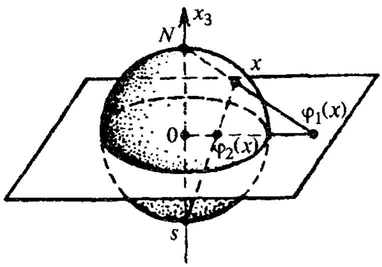

Рис. 84

ры. Стереографические проекции из северного и южного полюсов имеют соответственно вид

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right),$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{x_2}{1+x_3}\right)$$

и являются гомеоморфизмами из U_1, U_2 на $\mathbb{R}^2$.

Упражнение 4°. Проверьте, что отображения φ_1^{-1}, φ_2^{-1} принадлежат классу C^∞ и в каждой точке $y \in \mathbb{R}^2$ $\operatorname{rank}_y \varphi_1^{-1} = \operatorname{rank}_y \varphi_2^{-1} = 2$.

Таким образом, сфера S^2 с атласом, состоящим из двух карт, (U_1, φ_1^{-1}), (U_2, φ_2^{-1}), является двумерным подмногообразием в $\mathbb{R}^3$ класса C^∞.

4. С помощью стереографической проекции (см. пример 3) на сфере S^n можно задать атлас, состоящий из двух карт, (U_1, φ_1^{-1}), (U_2, φ_2^{-1}), где

$$\varphi_1(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right),$$

$$\varphi_2(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right).$$

Сфера S^n с таким атласом является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$ класса C^∞.

5. График отображения. Пусть задано отображение f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f \in C^r$. Рассмотрим график отображения $\Gamma(f) = \{x, f(x)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (см. упр. 12° § 9 гл. II). Атлас на $\Gamma(f)$ зададим из одной карты $(\mathbb{R}^n, \varphi)$, где $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ определяется формулой $\varphi(x) = (x, f(x))$. Таким образом, $\Gamma(f)$ является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+m}$ класса C^r.

Упражнения. 5°. Покажите, что множество точек $\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$ плоскости $\mathbb{R}^2$, $x \in \mathbb{R}^1$, $x \neq 0$, является одномерным подмногообразием в $\mathbb{R}^2$ класса C^∞.

6°. Покажите, что любое множество в $\mathbb{R}^n$, состоящее из изолированных точек, является нульмерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$.

6. Множество решений системы уравнений. Пусть имеется система уравнений

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $f_1, \ldots, f_m: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ — функции класса C^r, $r \geqslant 1$. Пусть $n \geqslant m$. Система функций $f_1, \ldots, f_m$ задает C^r-отображение $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Множество решений системы обозначим через M. Ясно, что $M = f^{-1}(0)$.

Теорема 1. *Пусть множество M непусто. Если для всякой точки $x \in M$ ранг матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_x$ равен m, то M является $(n - m)$-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^n$ класса C^r.*

Доказательство. Пусть x_0 — произвольная точка M. По условию теоремы x_0 — регулярная точка отображения f. Согласно теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $V(x_0) \subset \mathbb{R}^n$ точки x_0, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^m$ и C^r-диффеоморфизм $F: V(x_0) \to W$ такие, что fF^{-1} на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Без ограничения общности можно считать, что W есть некоторый открытый диск $D^n_\rho(y_0)$, $y_0 = F(x_0)$; тогда

$$(fF^{-1})^{-1}(0) \cap D^n_\rho(y_0) = \mathbb{R}^{n-m} \cap D^n_\rho(y_0) = D^{n-m}_\rho(y_0).$$

(Здесь $\mathbb{R}^{n-m} = \{x \in \mathbb{R}^n: x_1 = \ldots = x_m = 0\}$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$.) Ясно, что открытый в $\mathbb{R}^{n-m}$ диск $D^{n-m}_\rho(y_0)$ — образ множества $M \cap V(x_0)$ при диффеоморфизме F. Таким образом, открытая окрестность $V(x_0) \cap M$ точки x_0 в M C^r-диффеоморфна открытому диску $D^{n-m}_\rho(y_0)$, а следовательно, и пространству $\mathbb{R}^{n-m}$. ∎

В качестве примера снова рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задав ее уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$. Здесь $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ в любой точке сферы равен единице, следовательно, выполнены условия теоремы 1 (для любого $r \geqslant 1$). Таким образом, мы еще раз доказали, что сфера S^n является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$ класса C^∞.

Рассмотрим случай, когда условия теоремы 1 не выполнены.

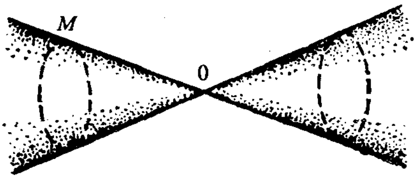

Рис. 85

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^3$ задается уравнением $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ (рис. 85). На множестве $M \setminus 0$ можно задать структуру двумерного C^∞-подмногообразия (как и ранее). В точке же 0 все миноры матрицы Якоби нулевые и ее ранг не максимальный. Множество M представляет простой пример алгебраического многообразия, а точка 0 — особая точка этого многообразия.

§ 3. Гладкие многообразия

1. Понятие гладкого многообразия. Это понятие является одним из центральных понятий гладкой топологии и современного анализа. Способ введения координат на множестве можно обобщить, не предполагая, что оно лежит в пространстве $\mathbb{R}^N$. Развитие этой идеи приводит к понятию гладкого многообразия.

Пусть M — топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U$ — гомеоморфизм. Тогда координатами точки $x \in U$ естественно считать стандартные координаты $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ точки $\varphi^{-1}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, гомеоморфизм φ задает координаты на части U пространства M; пару (U, φ) называют *картой* в M. Для всякой точки $x \in U$ карту (U, φ) будем называть также *картой точки* x.

Пусть $(U, \varphi)(\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U)$, $(V, \psi)(\psi\colon \mathbb{R}^n \to V)$ — две карты в M и $U \cap V \neq \varnothing$. Тогда каждой точке $x \in U \cap V$ отвечают две системы координат: $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ и $\{\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)\}$ — координаты точек $\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(U \cap V)$ и $\psi^{-1} \in \psi^{-1}(U \cap V)$, которые, вообще говоря, различны. Обе системы координат равноправны в том смысле, что существует гомеоморфизм перехода

$$\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V),$$