В качестве примера снова рассмотрим сферу $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, задав ее уравнением $x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 - 1 = 0$. Здесь $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ в любой точке сферы равен единице, следовательно, выполнены условия теоремы 1 (для любого $r \geqslant 1$). Таким образом, мы еще раз доказали, что сфера S^n является n-мерным подмногообразием в $\mathbb{R}^{n+1}$ класса C^∞.

Рассмотрим случай, когда условия теоремы 1 не выполнены.

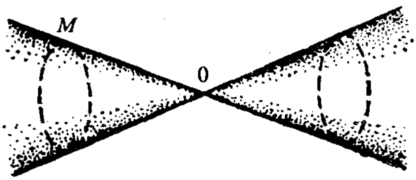

Рис. 85

Пусть множество $M \subset \mathbb{R}^3$ задается уравнением $x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$ (рис. 85). На множестве $M \setminus 0$ можно задать структуру двумерного C^∞-подмногообразия (как и ранее). В точке же 0 все миноры матрицы Якоби нулевые и ее ранг не максимальный. Множество M представляет простой пример алгебраического многообразия, а точка 0 — особая точка этого многообразия.

§ 3. Гладкие многообразия

1. Понятие гладкого многообразия. Это понятие является одним из центральных понятий гладкой топологии и современного анализа. Способ введения координат на множестве можно обобщить, не предполагая, что оно лежит в пространстве $\mathbb{R}^N$. Развитие этой идеи приводит к понятию гладкого многообразия.

Пусть M — топологическое пространство, $U \subset M$ — открытое множество и $\varphi: \mathbb{R}^n \to U$ — гомеоморфизм. Тогда координатами точки $x \in U$ естественно считать стандартные координаты $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ точки $\varphi^{-1}(x)$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Таким образом, гомеоморфизм φ задает координаты на части U пространства M; пару (U, φ) называют *картой* в M. Для всякой точки $x \in U$ карту (U, φ) будем называть также *картой точки* x.

Пусть $(U, \varphi)(\varphi: \mathbb{R}^n \to U)$, $(V, \psi)(\psi: \mathbb{R}^n \to V)$ — две карты в M и $U \cap V \neq \varnothing$. Тогда каждой точке $x \in U \cap V$ отвечают две системы координат: $\{\xi_1(x), \ldots, \xi_n(x)\}$ и $\{\eta_1(x), \ldots, \eta_n(x)\}$ — координаты точек $\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(U \cap V)$ и $\psi^{-1} \in \psi^{-1}(U \cap V)$, которые, вообще говоря, различны. Обе системы координат равноправны в том смысле, что существует гомеоморфизм перехода

$$\psi^{-1}\varphi: \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V),$$

связывающий обе системы координат и позволяющий первые координаты непрерывно выразить через вторые:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \chi_1(\eta_1, \ldots, \eta_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n &= \chi_n(\eta_1, \ldots, \eta_n) \end{aligned} \tag{1}$$

и наоборот, вторые непрерывно выразить через первые:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \varkappa_1(\xi_1, \ldots, \xi_n), \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n &= \varkappa_n(\xi_1, \ldots, \xi_n). \end{aligned} \tag{2}$$

В формулах (1) и (2) через $\chi_1, \ldots, \chi_n$; $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ обозначены координатные функции отображений $\varphi^{-1}\psi$, $\psi^{-1}\varphi$.

Для задач анализа бывает необходимо, чтобы зависимости (1) и (2) были r раз, $r = 0, 1, \ldots, \infty$, дифференцируемы. Это эквивалентно тому, что гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi$ является C^r-диффеоморфизмом. (Для удобства мы называем гомеоморфизм C^0-диффеоморфизмом.)

Определение 1. Карты (U, φ), (V, ψ) в M называются *C^r-согласованными*, если выполнено одно из следующих условий: 1) $U \cap V = \varnothing$, 2) $U \cap V \neq \varnothing$, и гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi$: $\varphi^{-1}(U \cap \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ является C^r-диффеоморфизмом.

Определение 2. Множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ в M называется *C^r-атласом* или *атласом класса C^r*, если любые две его карты C^r-согласованы и $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$.

Замечание. Все гомеоморфизмы φ_α в определении C^r-атласа действуют из одного и того же пространства $\mathbb{R}^n$.

Таким образом, задавая некоторый атлас на M, мы тем самым вводим координаты в окрестности каждой точки $x \in M$, называемые локальными координатами.

Пусть на M задан некоторый C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и, следовательно, в окрестности каждой точки введены локальные координаты. Во многих задачах анализа из разных соображений бывает удобно вводить новые локальные координаты (при помощи некоторой карты (V, ψ)), которые должны быть «равноправны» старым координатам, задаваемым картами C^r-атласа $\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}$. Таким образом, карта (V, φ) должна быть C^r-согласована с каждой картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ заданного C^r-атласа. Если это условие выполнено, то множество карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cap (V, \psi)$ является C^r-атласом. Так как C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\} \cup (V, \psi)$ получен из C^r-атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ присоединением «равноправной» карты, то естественно эти атласы считать эквивалентными.

Определение 3. Два C^r-атласа, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, называются эквивалентными, если C^r-согласованы любые две карты, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (V_β, ψ_β). Другими словами, два C^r-атласа эквивалентны, если их объединение является C^r-атласом.

Упражнение 1°. Покажите, что введенное отношение во множестве C^r-атласов является отношением эквивалентности.

Из упражнения 1° следует, что множество C^r-атласов на M распадается на непересекающиеся классы эквивалентных атласов.

Определение 4. Класс эквивалентности C^r-атласов на M называется *C^r-структурой* на M.

Каждый класс эквивалентности C^r-атласов на M определяется любым из своих представителей, т. е. заданную C^r-структуру можно восстановить по любому ее C^r-атласу. Это замечание лежит в основе того, что C^r-структуру на M задают указанием на нем одного C^r-атласа из данной C^r-структуры.

Объединение всех C^r-атласов из данной C^r-структуры также является C^r-атласом, который называется *максимальным*. Задание C^r-структуры равносильно заданию максимального атласа. Иногда C^r-структурой называют максимальный атлас.

Топологическими структурами называют C^0-структуры; *гладкими* (или *дифференциальными*) структурами называют C^r-структуры ($r = 1, \ldots, \infty$).

Определение 5. Топологическое пространство M с заданной на нем C^r-структурой называется *C^r-многообразием* (или *многообразием класса C^r*), а размерность пространства $\mathbb{R}^n$, из которого действуют гомеоморфизмы карт, называется *размерностью* C^r-многообразия.

По аналогии с C^r-структурами C^0-многообразия называются *топологическими*, C^r-многообразия ($r = 1, \ldots, \infty$) — *гладкими*. Иногда (для краткости) C^r-многообразия мы будем называть просто многообразиями, C^r-атласы — атласами.

Если в условии 2 определения 1 гомеоморфизмы $\psi^{-1}\varphi$, $\varphi^{-1}\psi$ являются аналитическими отображениями ($\psi^{-1}\varphi, \varphi^{-1}\psi \in C^\omega$), то карты (U, φ), (V, ψ) в M называются *C^ω-согласованными*. Естественным образом определяются *C^ω-атласы*, *C^ω-структуры* и *C^ω-многообразия. Аналитическими структурами и аналитическими многообразиями* называются C^ω-структуры и C^ω-многообразия соответственно. Для того чтобы указать размерность многообразия, мы будем писать M^n, а также $\dim M = n$.

Замечание. Размерность C^0-многообразия является его инвариантом, т. е. не зависит от выбора атласа. Действительно, если бы M допускало атласы

$$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}(\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha), \quad \{(V_\beta, \psi_\beta)\}(\psi_\beta\colon \mathbb{R}^m \to V_\beta)$$

и $n \neq m$, то нашлись бы множества U_α, V_β такие, что $U_\alpha \cap V_\beta \neq \varnothing$ и отображение

$$\psi_\beta^{-1}\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

было бы гомеоморфизмом. Это противоречит теореме Брауэра о том, что непустые открытые множества $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ могут быть гомеоморфными лишь в случае $n = m$. (Эта теорема будет доказана независимо от материала этой главы в § 6 гл. V.) Для C^r-многообразий, $r \geqslant 1$, корректность определения размерности очевидна.

Отметим, что C^0-структура на любом пространстве M единственна (это следует из определения); но если $r \neq 0$, то M может допускать несколько различных C^r-структур. Действительно, атлас, состоящий из одной карты $(U, \varphi))$, где $U = \mathbb{R}^1$, а $\varphi\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — тождественное отображение, задает на $\mathbb{R}^1$ структуру C^∞-многообразия. Атлас, состоящий из одной карты $(\mathbb{R}^1, \varphi)$, где $\varphi(x) = x^3$, также задает на $\mathbb{R}^1$ структуру C^∞-многообразия. Легко проверить, что рассмотренные атласы не эквивалентны и, следовательно, определяемые ими C^∞-структуры различны.

Более того, доказано, что если на M существует хотя бы одна C^r-структура $(r \geqslant 1)$, то на M существует бесконечно много C^r-структур.

Упражнения. 2°. Покажите, что атласы

$$\{(\mathbb{R}^1, \varphi_0)\}, \ldots, \{(\mathbb{R}^1, \varphi_k)\}, \ldots, \quad \text{где } \varphi_k(x) = x^{2k+1},\ k = 0, 1, \ldots,$$

задают на $\mathbb{R}^1$ различные C^∞-структуры.

3°. Покажите, что любое C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ является C^r-многообразием (см. упр. 1° § 2).

Укажем на одно формальное обобщение понятия карты (U, φ), когда гомеоморфизм φ действует из некоторого открытого связного множества пространства $\mathbb{R}^n$, вообще говоря, не совпадающего со всем пространством. В этом случае можно определить все понятия, введенные выше, повторяя дословно их определения. Однако это не приводит к обобщению понятия C^r-многообразия. Действительно, в такой C^r-структуре можно выделить C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, в котором все гомеоморфизмы φ_α действуют из открытых дисков D_α пространства $\mathbb{R}^n$. Так как существует C^r-диффеоморфизм $f_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to D_\alpha$, то C^r-атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha f_\alpha)\}$ содержится в нашей C^r-структуре и состоит из обычных карт.

В некоторых случаях более просто задать атлас, состоящий из обобщенных карт. Этим обстоятельством мы будем пользоваться в случае необходимости, не делая оговорок.

П р и м е р 1. Всякое открытое множество V многообразия M^n класса C^r само является многообразием класса C^r со структурой, задаваемой атласом $\left\{\left(U_\alpha \cap V, \varphi_\alpha\Big|_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap V)}\right)\right\}$, где $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — некоторый атлас из C^r-структуры, заданной на M^n.

Пример 2. Зададим C^∞-атлас на $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, состоящий из шести карт. Положим

$$U_k^+ = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2: x_k > 0\},$$

$$U_k^- = \{x \in S^2: x_k < 0\}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Определим гомеоморфизмы $\varphi_k^+: D^2 \to U_k^+$, $\varphi_k^-: D^2 \to U_k^-$:

$$\varphi_1^+, \varphi_1^-: (x_2, x_3) \mapsto \left(\pm\sqrt{1 - x_2^2 - x_3^2}, x_2, x_3\right),$$

$$\varphi_2^+, \varphi_2^-: (x_1, x_3) \mapsto \left(x_1, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_3^2}, x_3\right),$$

$$\varphi_3^+, \varphi_3^-: (x_1, x_2) \mapsto \left(x_1, x_2, \pm\sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2}\right),$$

где знак в правой части выбирается в соответствии со значком + или — слева.

Аналогичным образом на сфере S^n можно задать C^∞-атлас, состоящий из $2(n+1)$ карт. ◆

Для возможности целого ряда построений при изучении топологических пространств необходимы свойства хаусдорфовости и счетности базы топологии. Из определения многообразия эти свойства, вообще говоря, не вытекают. Это иллюстрируется нижеследующими примерами.

Пример 3. Нехаусдорфово многообразие M^1 класса C^∞. Рассмотрим интервал $(0, 3)$ и разобьем его на три множества: $(0, 1]$, $(2, 3)$, $(1, 2]$. В их формальном (несвязном) объединении (рис. 86) введем топологию следующим образом: окрестности точек на множестве $(0, 1) \cup \cup (1, 2) \cup (2, 3)$ такие же, как в топологии, индуцированной вещественной прямой. Окрестностями же точек $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ служат соответственно множества $(1-\varepsilon, 1] \cup \cup (2, 2+\varepsilon)$, $(2-\varepsilon, 2] \cup (2, 2+\varepsilon)$. Тогда точки x_1, x_2 неотделимы.

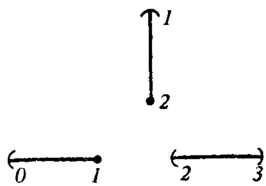

Рис. 86

Предоставляем в качестве задачи показать, что на полученном пространстве можно естественным образом задать структуру одномерного C^∞-многообразия и что это многообразие со счетной базой.

Пример 4. Многообразие M^1 класса C^∞, не имеющее счетной базы. Рассмотрим множество $M = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$. Топологию в M определим как топологию декартова произведения, где первый сомножитель $\mathbb{R}^1$ с обычной топологией, а второй сомножитель $\mathbb{R}^1$ — с дискретной. Нетрудно показать, что это хаусдорфово одномерное многообразие класса C^∞, топология которого не обладает счетной базой.

Соединяя два последних примера, легко построить нехаусдорфово многообразие без счетной базы (взяв их декартово произведение).

Отметим, что отсутствие счетности базы топологии многообразия в примере 4 привело к «патологии»: плоскость является многообразием размерности 1, а не 2.

Обычно многообразие M^n предполагают хаусдорфовым и удовлетворяющим второй аксиоме счетности. Мы также будем это делать без дополнительных оговорок. Тогда легко доказать, что многообразие M^n является локально компактным и даже паракомпактным пространством.

Действительно, локальная компактность вытекает из следующего простого упражнения.

Упражнение 4°. Покажите, что если (U, φ) — карта в M^n, $x \in U$ и $D^n(\varphi^{-1}(x))$, $\overline{D}^n(\varphi^{-1}(x))$ — открытый и замкнутый диски в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $\varphi^{-1}(x)$ радиуса 1, то $\varphi(D^n(\varphi^{-1}(x)))$ — открытая в M^n окрестность точки x, замыкание которой (в M^n) компактно и равно $\varphi(\overline{D}^n(\varphi^{-1}(x)))$.

Паракомпактность многообразия M^n следует из его локальной компактности и счетности базы (согласно следствию теоремы 6 § 13 гл. II).

Отметим, что из условия счетности базы для многообразия немедленно следует, что всякое C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 0$, имеет счетный атлас $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}$, $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$, т. е. атлас, состоящий не более чем из счетного множества карт.

2. Проективные пространства. Определение и различные топологически эквивалентные интерпретации проективных пространств $\mathbb{R}P^{n-1}$, $\mathbb{C}P^{n-1}$, $n \geqslant 2$, даны в п. 2 § 5 гл. II (см. также п. 1 § 3 гл. I). На пространствах $\mathbb{R}P^{n-1}$, $\mathbb{C}P^{n-1}$ можно ввести структуры C^∞-многообразий. Проиллюстрируем идею введения локальных координат в $\mathbb{R}P^{n-1}$. Рассмотрим $\mathbb{R}P^{n-1}$ как множество $L = \{l\}$ всех прямых пространства $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат. Каждая прямая пересекает одну или несколько гиперплоскостей вида $x_j = 1$. Зафиксируем одну из таких гиперплоскостей $x_i = 1$ и выделим из L совокупность U_i всех прямых, пересекающихся с гиперплоскостью $x_i = 1$. Тогда положение прямой $l \in U_i$ определяется декартовыми координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, 1, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})$ ее точки пересечения p с гиперплоскостью $x_i = 1$. Координаты $(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})$ естественно принять за локальные координаты прямой l (см. рис. 87). Таким образом, имеем гомеоморфизмы

$$\psi_i(l) = (\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_i, \ldots, \xi_{n-1})\colon U_i \to \mathbb{R}^{n-1}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Локальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ называют также проективными координатами прямой l. Нетрудно выразить локальные координаты прямой l через координаты произвольной точки $x = (x_1, \ldots, x_n)$ прямой l:

$$\xi_1 = x_1/x_i, \ \ldots, \ \xi_{i-1} = x_{i-1}/x_i, \ \xi_i = x_{i+1}/x_i, \ \ldots, \ \xi_{n-1} = x_n/x_i.$$

Атлас из n карт (U_i, φ_i), $i = 1, \ldots, n$, где $\varphi_i = \psi_i^{-1}$, задает структуру C^∞-многообразия размерности $n-1$ на $\mathbb{R}P^{n-1}$. Покажем C^∞-согласованность карт построенного атласа. Действительно, пусть

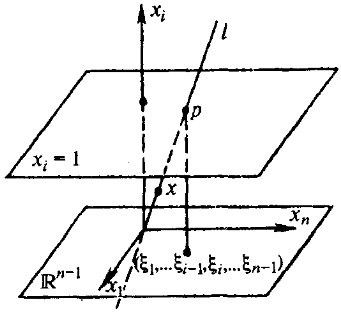

Рис. 87

$l \in U_i \cap U_j$ и $\eta_1 = x_1/x_j, \ldots, \eta_{j-1} = x_{j-1}/x_j$, $\eta_j = x_{j+1}/x_j, \ldots, \eta_{n-1} = x_n/x_j$ — локальные координаты прямой l в карте (U_j, φ_j). Пусть для определенности $i < j$. Тогда очевидны следующие соотношения:

$$\eta_1/\eta_i = \xi_1, \ldots, \eta_{i-1}/\eta_i = \xi_{i-1},$$
$$\eta_{i+1}/\eta_i = \xi_i, \ldots, \eta_{j-1}/\eta_i = \xi_{j-2},$$
$$1/\eta_i = \xi_{j-1}, \ \eta_j/\eta_i = \xi_j, \ldots, \eta_{n-1}/\eta_i = \xi_{n-1},$$

из которых видно, что локальные координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ бесконечно гладко зависят от координат $\eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$.

Упражнения. 5°. Убедитесь, что для проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$, рассматриваемого как совокупность пар диаметрально противоположных точек сферы S^{n-1}, локальные координаты можно также задать описанным выше способом.

6°. Покажите, что комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^{n-1}$ имеет C^∞-атлас, превращающий его в C^∞-многообразие вещественной размерности $2n-2$.

Указание. Рассматривая $\mathbb{C}P^{n-1}$ как множество комплексных прямых в $\mathbb{C}^n$, задайте атлас формулами, аналогичными случаю $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Более общо, можно рассмотреть некоторое многообразие M^n класса C^r, на котором действует группа $\mathbb{Z}_k$ (см. § 5 гл. II). Будем предполагать, что орбита каждой точки при этом действии состоит из k различных элементов.

Упражнение 7°. Пусть $h\colon \mathbb{Z}_k \to H(M^n)$ — гомоморфизм группы $\mathbb{Z}_k$ (k простое) в группу гомеоморфизмов M^n, задающий действие $\mathbb{Z}_k$ в M^n, и пусть g — образующий элемент группы $\mathbb{Z}_k$. Покажите, что условие $h_g(x) \neq x$ для любого $x \in M^n$ эквивалентно предположению о том, что орбита каждой точки при этом действии состоит из k различных элементов. В этом случае говорят, что группа $\mathbb{Z}_k$ *действует без неподвижных точек*.

Предположим далее, что карты вида $(h_g U_\alpha, h_g \varphi_\alpha)$ C^r-согласованы с картами (U_β, φ_β) C^r-атласа на M^n. Рассмотрим факторпространство $M^n/\mathbb{Z}_k$. Оно также является C^r-многообразием размерности n. Атлас задается следующим образом: пусть O_x — орбита точки x, $U(O_x)$ — окрестность орбиты в $M^n/\mathbb{Z}_k$, состоящая из всех орбит O_y, проходящих через точки y достаточно малой окрестности $V(x)$ точки x в M^n ($V(x)$ не должна содержать пар точек y, $h_g(y)$ и должна целиком лежать в какой-нибудь карте многообразия M^n). Тогда локальные координаты в $V(x)$ точки $y \in V(x)$ назовем локальными координатами орбиты $O_y \subset U(O_y)$. Можно убедиться, что это C^r-атлас. Условие согласованности карт $(h_g U_\alpha, h_g \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β) не является обременительным (см. ниже теорему 2 § 5).

Упражнение 8°. Проверьте, что обобщенное линзовое пространство $L(k, k_1, \ldots, k_n)$ является C^∞-многообразием размерности $2n+1$.

3. Индуцированные структуры. Пусть M^n есть C^r-многообразие и $f\colon M^n \to N$ — гомеоморфизм топологических пространств M^n и N. На топологическом пространстве N естественным образом можно ввести структуру C^r-многообразия, называемую *структурой, индуцированной* f. Именно: если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ есть C^r-атлас многообразия M^n, то $\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ есть C^r-атлас на N.

Упражнение 9°. Убедитесь, что $\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ действительно атлас, определяющий на N структуру C^r-многообразия размерности n.

Описанный способ задания структуры оказывается весьма полезным при задании структуры C^r-многообразия на топологическом пространстве N: мы можем задать структуру C^r-многообразия на более «простом» пространстве M, гомеоморфном N, а затем индуцировать на N структуру C^r-многообразия. Таким образом C^∞-структуру получают, например, различные модели $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Пример 5. Нетрудно видеть, что всякое одномерное компактное C^0-многообразие триангулируемо. Тогда всякое связное одномерное компактное C^0-многообразие гомеоморфно окружности S^1 (см. упр. 6° § 4 гл. II), следовательно, на нем естественным образом индуцируется C^∞-структура.

Пример 6. Двумерная ориентируемая замкнутая поверхность, как показано в § 4 гл. II, гомеоморфна поверхности типа M_p (сфера с p ручками), которую можно реализовать в пространстве $\mathbb{R}^3$ как C^∞-подмногообразие (интуитивно это представляется очевидным). Таким образом, ориентируемые замкнутые поверхности получают структуру C^∞-многообразия.

Упражнения. 10°. Задайте структуру C^∞-многообразия на границе куба $I^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n): |x_i| \leqslant 1,\ i = 1, \ldots, n\}$, индуцируя ее со сферы S^{n-1}.

11°. Покажите, что отображение

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_1x_2, x_1x_3, x_2x_3)$$

является гомеоморфизмом проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ на подмножество в $\mathbb{R}^6$. Индуцируя этим гомеоморфизмом структуру гладкого многообразия $\mathbb{R}P^2$, мы тем самым реализуем $\mathbb{R}P^2$ как подмножество в $\mathbb{R}^6$.

12°. Постройте реализацию $\mathbb{R}P^3$ в $\mathbb{R}^{10}$.

4. Многообразия матриц. Множество $M(m, n)$ всех $m \times n$-матриц с элементами из $\mathbb{R}^1$ наделим топологией, индуцированной естественным отображением i: $\mathbb{R}^{mn} \to M(m, n)$:

$$(x_1, \ldots, x_{mn}) \mapsto \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ x_{n+1} & \ldots & x_{2n} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_{(m-1)n+1} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}.$$

Тогда гомеоморфизм i индуцирует на $M(m, n)$ структуру C^∞-многообразия размерности mn.

Обозначим через $M(m, n;\ k)$ подпространство в $M(m, n)$ матриц фиксированного ранга k. Зададим на $M(m, n;\ k)$ структуру C^∞-многообразия размерности $k(m + n - k)$. Заметим предварительно, что если $Y \in M(m, n)$ и $\operatorname{rank} Y \geqslant k$, то перестановкой строк и столбцов матрицу Y можно привести к виду

$$\left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right),$$

где A_Y — невырожденная квадратная матрица порядка k. Иными словами, существуют квадратные невырожденные матрицы $P_Y \in M(m, m)$, $Q_Y \in M(n, n)$ такие, что

$$P_Y Y Q_Y = \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right).$$

Покажем, что $\operatorname{rank} Y = k$ тогда и только тогда, когда $D_Y = C_Y A_Y^{-1} B_Y$. Действительно, из равенства

$$\left(\begin{array}{c|c} I_k & 0 \\ \hline -C_Y A_Y^{-1} & I_{m-k} \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline C_Y & D_Y \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline 0 & -C_Y A_Y^{-1} B_Y + D_Y \end{array}\right)$$

следует, что

$$\operatorname{rank} Y = \operatorname{rank} \left(\begin{array}{c|c} A_Y & B_Y \\ \hline 0 & -C_Y A_Y^{-1} B_Y + D_Y \end{array}\right).$$

Из последнего равенства видно, что $\operatorname{rank} Y = k$ тогда и только тогда, когда $D_Y \in C_Y A_Y^{-1} B_Y$.

Пусть теперь $X_0 \in M(m, n;\ k)$. Пусть X — произвольная матрица из $M(m, n;\ k)$. Обозначим

$$P_{X_0} X Q_{X_0} = \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{B_{X, X_0}} \\ \hline C_{X, X_0} & D_{X, X_0} \end{array}\right),$$

где A_{X, X_0} — квадратная матрица порядка k. Рассмотрим открытую окрестность

$$V(X_0) = \{X \in M(m, n)\colon \det A_{X, X_0} \neq 0\}$$

матрицы X_0 в $M(m, n)$. Тогда $U(X_0) = V(X_0) \cap M(m, n;\ k)$ — открытая окрестность X_0 в $M(m, n;\ k)$ и отображение

$$\varphi_{X_0}\colon U(X_0) \to \mathbb{R}^{mn-(m-k)(n-k)},$$

задаваемое следующим образом:

$$X \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{X, X_0} \\ \hline C_{X, X_0} & D_{X, X_0} \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{c|c} A_{X, X_0} & B_{X, X_0} \\ \hline C_{X, X_0} & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{i} \mathbb{R}^{mn-(m-k)(n-k)},$$

— гомеоморфизм (i — естественное отображение). Следовательно, $(U(X_0), \varphi_{X_0}^{-1})$ — карта. Задавая таким образом карту для каждой матрицы $X_0 \in M(m, n;\ k)$, мы получаем C^∞-атлас на $M(m, n;\ k)$.

Упражнение 13°. Покажите C^∞-согласованность карт построенного атласа.

Отметим, что $M(k, n)$ можно интерпретировать как множество упорядоченных наборов k векторов в $\mathbb{R}^n$, а $M(k, n;\ k)$ — как множество упорядоченных наборов k линейно независимых векторов в $\mathbb{R}^n$; $M(n, n)$ обозначается $L(n, \mathbb{R})$, а $M(n, n; n)$ обозначается $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (группа обратимых матриц, называемая общей линейной группой).

5. Многообразия Грассмана. Естественным обобщением проективного пространства $\mathbb{R}P^{n-1}$ является многообразие Грассмана $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$, состоящее из всех k-мерных подпространств, $k \geqslant 1$, пространства $\mathbb{R}^n$ (при $k = 1$ это проективное пространство). Множество $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ наделим топологией, индуцированной естественным отображением $M(k, n; k) \to \mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$, сопоставляющим каждой матрице

$$\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ x_{k1} & \dots & x_{kn} \end{pmatrix}$$

подпространство в $\mathbb{R}^n$, натянутое на векторы

$$x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in}), \qquad i = 1, \dots, k.$$

Заметим, что $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно пространству орбит пространства $M(k, n;\ k)$ по действию (слева) группы $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$; элемент $C \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ действует на элемент $Y \in M(k, n;\ k)$ по правилу $Y \mapsto CY$ (произведение матриц). Другими словами, пространство $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно факторпространству $M(k, n;\ k)/\underset{R}{R}$ со следующим отношением эквивалентности: $X \sim Y$, если существует квадратная невырожденная матрица C порядка k такая, что $X = CY$. Чтобы задать на $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ структуру C^∞-многообразия, будем задавать C^∞-структуру на $M(k, n;\ k)/R$ и индуцировать C^∞-структуру на $\mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфизмом $f\colon M(k, n;\ k)/R \to \mathrm{G}_k(\mathbb{R}^n)$. Получаемое многообразие называется *многообразием Грассмана.*

Локальные координаты на $M(k, n;\ k)/R$ можно задать по аналогии с проективным пространством $\mathbb{R}P^{m-1}$, если вместо $\mathbb{R}^m\backslash 0$ рассмотреть $M(k, n;\ k)$, вместо прямых $l = \{tx\}$, $t \in \mathbb{R}^1\backslash 0$, $x \in \mathbb{R}^m\backslash 0$ — подпространство $L = \{TX\}$, $T \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$, $X \in M(k, n;\ k)$, а вместо гиперплоскости $x_i = 1$ — множество $H_{i_1, \dots, i_k}$ матриц из $M(k, n;\ k)$, для которых подматрица, составленная из $i_1, \dots, i_k$ столбцов, является единичной. Подпространство $\{TX\}$ пересекается с множеством $H_{i_1, \dots, i_k}$, если и только если подматрица $X_{i_1, \dots, i_k}$, составленная из

$i_1, \ldots, i_k$ столбцов матрицы X, невырожденна (т. е. $\det X_{i_1, \ldots, i_k} \neq 0$); в случае невырожденности $X_{i_1, \ldots, i_k}$ «точкой пересечения», как нетрудно видеть, будет матрица $Y = X^{-1}_{i_1, \ldots, i_k} X$. Для задания карт зафиксируем множество $H_{i_1, \ldots, i_k}$ (т. е. фиксируем номера столбцов в матрице $X \in M(k, n; k)$ и рассмотрим множество $U_{i_1, \ldots, i_k}$ всех подпространств $\{TX\}$, пересечение которых с $H_{i_1, \ldots, i_k}$ непусто. Иными словами, $U_{i_1, \ldots, i_k}$ — это множество подпространств $\{TX\}$, для которых у образующего элемента X подпространства $\{TX\}$ подматрица $X_{i_1, \ldots, i_k}$ невырожденна. Элементы матрицы $Y_{j_1, \ldots, j_{n-k}}$, образованной столбцами $j_1, \ldots, j_{n-k}$ матрицы Y, отличными от $i_1, \ldots, i_k$, естественно принять за локальные координаты. Точнее, пара $(U_{i_1, \ldots, i_k}, \varphi_{i_1, \ldots, i_k})$, где $\varphi_{i_1, \ldots, i_k}\colon M(k, n; k)/R \to \mathbb{R}^{k(n-k)}$ — гомеоморфизм, задаваемый соответствием

$$X \mapsto Y_{j_1, \ldots, j_{n-k}} = \begin{pmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1(n-k)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ y_{k1} & \cdots & y_{k(n-k)} \end{pmatrix} \stackrel{i}{\mapsto} (y_{11}, \ldots, y_{1(n-k)}, y_{21}, \ldots, y_{k(n-k)}),$$

является картой в $M(k, n;\ k)/R$.

Упражнение 14°. Убедитесь, что отображения $\varphi_{i_1, \ldots, i_k}$ являются гомеоморфизмами.

Атлас $\left\{\left(U_{i_1, \ldots, i_k}, \varphi^{-1}_{i_1, \ldots, i_k}\right)\right\}$ из C_n^k карт задает структуру C^∞-многообразия размерности $k(n-k)$ на $M(k, n;\ k)/R$.

Упражнения. 15°. Покажите C^∞-согласованность карт построенного атласа.

16°. Покажите, что многообразие $G_k(\mathbb{R}^n)$ гомеоморфно многообразию $G_{n-k}(\mathbb{R}^n)$.

6. Многообразие Штифеля. В многообразии $M(n, k)$ рассмотрим подмножество $V_k(\mathbb{R}^n)$ матриц, элементы которых удовлетворяют системе $k(k+1)/2$ уравнений

$$\sum_{s=1}^{n} x_{si} x_{sj} = \delta_{ij}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$$

(здесь δ_{ij} — символ Кронекера). Наделим $V_k(\mathbb{R}^n)$ топологией, индуцированной из $M(n, k)$. Рассмотрим естественное отображение $i\colon V_k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{nk}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \mapsto (a_{11}, \ldots, a_{1k}, a_{21}, \ldots, a_{2k}, \ldots, a_{n1}, \ldots, a_{nk}).$$

Наделим множество $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ топологией, индуцированной из $\mathbb{R}^{nk}$. Тогда i гомеоморфно отображает $V_k(\mathbb{R}^n)$ на свой образ $i(V_k(\mathbb{R}^n))$. Покажем, что на $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ можно задать структуру C^∞-многообразия. Ранг матрицы Якоби отображения $f\colon \mathbb{R}^{nk} \to \to \mathbb{R}^{k(k+1)/2}$, компонентами которого являются функции $\sum_{s=1}^{n} x_{si}x_{sj} - \delta_{ij}$, $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k$, очевидно, равен $k(k+1)/2$ для всякой точки $x \in i(V_k(\mathbb{R}^n))$. Поэтому согласно теореме 1 § 2 $i(V_k(\mathbb{R}^n))$ является подмногообразием в $\mathbb{R}^{nk}$ класса C^∞ размерности $kn - k(k+1)/2$, а следовательно, и C^∞-многообразием. Гомеоморфизм i^{-1} индуцирует на $V_k(\mathbb{R}^n)$ структуру C^∞-многообразия размерности $kn - k(k+1)/2$, которое называют *многообразием Штифеля*. Многообразие Штифеля можно интерпретировать геометрически как множество ортонормированных k-реперов пространства $\mathbb{R}^n$, так как координаты векторов однозначно определяют матрицу из $V_k(\mathbb{R}^n)$.

Элементами многообразия Штифеля $V_n(\mathbb{R}^n)$ являются ортогональные матрицы, его обозначают $O(n, \mathbb{R})$. Подмножество в $O(n, \mathbb{R})$, состоящее из матриц с определителем $+1$, открыто в $O(n, \mathbb{R})$, следовательно, является C^∞-многообразием размерности $(n^2 - 1)/2$, его обозначают $SO(n, \mathbb{R})$.

7. Произведение многообразий. Если M^n, N^m — два C^r-многообразия, то на топологическом произведении $M \times N$ естественным образом можно задать структуру C^r-многообразия размерности $m + n$. Предоставляем читателям сделать это в качестве упражнения.

Примерами произведения многообразий могут служить цилиндр $\mathbb{R}^1 \times S^1$ и k-мерный тор $T^k = S^1 \times \ldots \times S^1$ (k сомножителей). Согласно сказанному выше, они являются C^∞-многообразиями размерностей 2 и k соответственно.

8. Группы Ли. Рассмотрим специальный класс гладких многообразий, являющихся одновременно группами, — они называются группами Ли по имени норвежского математика Софуса Ли.

Группа G, наделенная структурой гладкого многообразия так, что отображение $G \times G \to G$, задаваемое правилом $(g, h) \mapsto g \cdot h^{-1}$, является гладким, называется *группой Ли*.

Очевидно, что для группы Ли гладкими являются и отображения $G \to G$: $g \mapsto g^{-1}$ и $G \times G$: $(f, g) \mapsto f \cdot g$; действительно, первое является суперпозицией гладких отображений $g \mapsto (e, g)$ и $(e, g) \mapsto \mapsto e \cdot g^{-1} = g^{-1}$, а второе — отображений $(g, h) \mapsto (g, h)$, $(g, h^{-1}) \mapsto \mapsto g(h^{-1})^{-1} = g \cdot h$. Далее, если G_e — связная компонента группы G, содержащая единицу e, то $g \cdot G_e \subset G_e$ при всяком $g \in G_e$ (в силу связности образа $g \cdot G_e$ и $(g \cdot G_e) \cap G_e \neq \varnothing$); аналогично $g^{-1} \cdot G_e \subset G_e$. Таким образом, связная компонента G, содержащая единицу, также является группой Ли.

Простейшие примеры групп Ли: пространство $\mathbb{R}^n$ относительно операции сложения векторов; $\mathbb{C} \setminus 0$ — комплексные числа, кроме 0, — относительно умножения; единичная окружность S^1, рассматриваемая как подмножество в $\mathbb{C} \setminus 0$, относительно умножения; многообразия $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ относительно умножения матриц.

Если G_1 и G_2 — две группы Ли, то $G_1 \times G_2$ есть группа Ли относительно умножения $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = (g_1 \cdot g_2, h_1 \cdot h_2)$ (с гладкой структурой произведения многообразий G_1, G_2).

Отсюда сразу следует, что n-мерный тор $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ — группа Ли с покомпонентной операцией умножения.

Группой Ли является и группа аффинных преобразований пространства $\mathbb{R}^n$: $x \mapsto Ax + v$, где $v, x \in \mathbb{R}^n$, A — невырожденная $n \times n$-матрица; ее многообразие $L^m = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n$, $m = n^2 + n$, состоит из пар (A, v) с гладкой структурой произведения, а групповая операция задается формулой $(A_1, v_1) \cdot (A_2, v_2) = (A_1 A_2, A_2 v_1 + v_2)$; единичный элемент $e = (I, 0)$, где I — единичная матрица, 0 — нулевой вектор.

Упражнение 17°. Докажите, что L^m — группа Ли.

9. Риманова поверхность. Рассмотрим пример, важный для теории функций комплексного переменного. Пусть M^2 — двумерное гладкое многообразие. Рассмотрим $\mathbb{R}^2$ как комплексную z-плоскость. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — атлас на M^2 такой, что диффеоморфизмы перехода

$$\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$$

являются комплексными аналитическими функциями z в областях $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cup U_\beta)$. Многообразие M^2 с таким атласом называется (абстрактной) *римановой поверхностью*. Комплексная аналитическая структура на ней определяется такой эквивалентностью атласов, при которой диффеоморфизмы перехода являются комплексными аналитическими функциями.

В частности, комплексная z-плоскость $\mathbb{C}$ является римановой поверхностью: ее комплексная аналитическая структура задается атласом, состоящим из одной карты $(\mathbb{C}, 1_\mathbb{C})$, где $1_\mathbb{C}$ — тождественное отображение.

Сфера $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ также является римановой поверхностью. Зададим на S^2 аналитическую структуру $U_1 = S^1 \setminus \{N\}$, $U_2 = S^2 \setminus \{S\}$; локальные координаты точки $P(x_1, x_2, x_3)$ в U_1, U_2 имеют соответственно вид

$$z_1 = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3}, \qquad z_2 = \frac{x_1 - ix_2}{1 + x_3}.$$

Координата z_1 возникает при стереографической проекции (см. рис. 84) сферы S^2 на экваториальную плоскость при проектировании из полюса N сферы, а $\bar{z}_2$ — при проектировании из полюса S. Если $P \in U_1 \cap U_2$, то $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$ и, очевидно, $z_1 z_2 = 1$; отсюда диффеоморфизм перехода $z_1 = 1/z_2$ является аналитической функцией. Расширенная z-плоскость (z-сфера) $\tilde{C}$ наделяется комплексной аналитической структурой с помощью гомеоморфизма на S^2.

Двулистная риманова поверхность функции $w = \sqrt{z}$ (см. § 4 гл. I) является комплексным аналитическим многообразием, и аналитическая структура на ней вводится посредством гомеоморфизма с z-сферой.

Упражнение 18°. Опишите соответствующий атлас двулистной римановой поверхности функции $w = \sqrt{z}$.

В теории функций комплексного переменного доказывается, что любая аналитическая функция на z-плоскости имеет абстрактную риманову поверхность и что всякую компактную абстрактную риманову поверхность можно реализовать как риманову поверхность некоторой алгебраической функции.

10. Конфигурационное пространство. Рассмотренные примеры гладких многообразий естественным образом возникают в различных задачах математики. Понятие многообразия столь же естественно используется и в прикладных науках (механика, физика) для описания множества положений (конфигурационного пространства) системы. Приведем простейший пример.

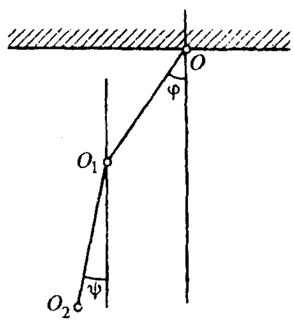

Рис. 88

Рассмотрим маятник с шарниром, качающийся в вертикальной плоскости. Точку подвеса маятника обозначим O, шарнир — через O_1, конец маятника — через O_2. Каждое положение данной системы задается направлением стержня OO_1 и направлением стержня O_1O_2 или парой углов φ, ψ (рис. 88), изменяющихся независимо в интервалах $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $0 \leqslant \psi < 2\pi$. Конфигурационное пространство данной системы, таким образом, есть декартово произведение двух окружностей $S^1 \times S^1$ — двумерный тор T^2.

Упражнение 19°. Опишите конфигурационное пространство плоского маятника, имеющего два шарнира.

Более сложные конфигурационные пространства возникают при рассмотрении более сложных механических систем, состоящих из большого числа материальных точек и при более сложных условиях их перемещения. Эти условия обычно задаются в форме уравнений, которым должны удовлетворять координаты всех материальных точек (эти уравнения называются геометрическими связями). Геометрические связи (при соответствующих условиях) и задают гладкое многообразие в пространстве $\mathbb{R}^{3n}$, где n — число материальных точек (см. пример 6 § 2). Упорядоченный набор координат в $\mathbb{R}^{3n}$ материальных точек определяет положение механической системы в конфигурационном пространстве.

11. Многообразия с краем. Введенное выше понятие многообразия не охватывает, однако, ряд геометрических объектов, например, n-мерный замкнутый диск, поверхности с границей и др. Действительно, для точек на границе диска $\overline{D}^n$ невозможно указать окрестность, гомеоморфную пространству $\mathbb{R}^n$ (или его открытой части). Этот пробел заполняет понятие многообразия с краем.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$. Последнее разбивает пространство $\mathbb{R}^n$ на два полупространства:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n \geqslant 0\} \quad \text{и} \quad \mathbb{R}^n_- = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n \leqslant 0\},$$

границей каждого из которых служит подпространство

$$\mathbb{R}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n\colon x_n = 0\}.$$

Полупространство $\mathbb{R}^n_+$ может служить простейшим примером n-мерного многообразия с краем $\mathbb{R}^{n-1}$. Если теперь «склеить» некоторое число полупространства $\mathbb{R}^n_+$, позаботившись о том, чтобы край «склеивался» с краем, то мы получим объект, называемый *n-мерным многообразием с краем*, где край — результат «склейки» экземпляров подпространства $\mathbb{R}^{n-1}$; он сам является $(n-1)$-мерным многообразием.

Дадим точное описание многообразия с краем. Пусть M — топологическое пространство. Расширим понятие карты в M, допустив возможность действия гомеоморфизмов карт не только из пространства $\mathbb{R}^n$, но и из полупространства $\mathbb{R}^n_+$, т. е. картой в M назовем всякую пару (U, φ), где U — открытое множество в M, а φ — гомеоморфизм $\varphi\colon \mathbb{R}^n \to U$ или $\varphi\colon \mathbb{R}^N_+ \to U$. Две такие карты, (U, φ), (V, ψ), в M называются C^r-согласованными, если либо $U \cap V = \varnothing$, либо гомеоморфизм $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ является C^r-диффеоморфизмом, понимая гладкость в смысле определения 2 § 2 в том случае, когда $\psi^{-1}\varphi$ действует между множествами, открытыми в $\mathbb{R}^n_+$, но не открытыми в $\mathbb{R}^n$. Исходя из такого обобщения понятия карты в M, можно ввести понятие C^r-атласа, эквивалентных C^r-атласов, C^r-структуры на M и максимального атласа, дословно повторяя определения аналогичных понятий п. 1. Топологическое пространство M с заданной на нем C^r-структурой называется C^r-многообразием с краем. Для многообразия с краем так же, как в п. 1, вводится понятие размерности (для указания размерности также пишут M^n).

Точка x многообразия с краем M^n называется *краевой точкой*, если в M^n существует карта (U, φ), $\varphi\colon \mathbb{R}^n_+ \to U$, $x \in U$, такая, что $\varphi^{-1}(x) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Определение краевой точки не зависит от выбора карт. Действительно, если бы для некоторой карты точка x не являлась краевой, то гомеоморфизм $\varphi^{-1}\psi$: $\psi^{-1}(U \cap V) \to \varphi^{-1}(U \cap V)$ переводил бы внутреннюю точку полупространства в граничную. Невозможность последнего для многообразий с краем класса C^r, $r \geqslant 1$, следует из теоремы об обратном отображении (покажите!), а для C^0-многообразий с краем — из трудной классической теоремы Брауэра об инвариантности области, утверждающей, что подмножество $\mathbb{R}^n$, гомеоморфное открытому подмножеству этого пространства, открыто в $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 20°. Покажите независимость определения краевой точки для C^0-многообразий.

Мы не приводим доказательство теоремы Брауэра, отсылая интересующегося читателя к литературе.

Множество краевых точек многообразия с краем M^n называется *краем* и обозначается ∂M^n.

Таким образом, понятие C^r-многообразия, введенное в п. 1, является частным случаем C^r-многообразия с краем, когда край — пустое множество.

Отметим, что край ∂M^n C^r-многообразия с краем M^n, если непуст, является $(n-1)$-мерным C^r-многообразием (без края), а $M^n \backslash \partial M^n$ является n-мерным C^r-многообразием (без края). Действительно, если $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — C^r-атлас на M^n, то, очевидно, $\left\{\left(U_\alpha \cap (M^n \backslash \partial M^n), \varphi\Big|_{\mathbb{R}^n_+ \backslash \mathbb{R}^{n-1}}\right)\right\}$ — C^r-атлас на $M^n \backslash \partial M^n$, а множество карт $\left\{\left(U_\alpha \cap \partial M^n, \varphi_\alpha\Big|_{\mathbb{R}^{n-1}}\right)\right\}$, для которых $U_\alpha \cap \partial M^n \neq \varnothing$, — C^r-атлас на ∂M^n.

Как и в случае многообразий (без края), для многообразий с краем можно рассматривать карты, действующие не из всего пространства $\mathbb{R}^n$ или полупространства $\mathbb{R}^n_+$, а из их открытых связных множеств, что часто облегчает задание атласа. Многообразия с краем также обычно предполагают хаусдорфовыми и удовлетворяющими второй аксиоме счетности.

Пример 7. Структуру C^∞-многообразия с краем на полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ можно задать с помощью атласа, состоящего из одной карты $\left(\mathbb{R}^n_+, 1_{\mathbb{R}^n_+}\right)$.

Упражнения. 21°. Докажите, что множества в $\mathbb{R}^n$, задаваемые неравенствами $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant 1$, $x_1^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant 1$, являются n-мерными C^∞-многообразиями с краем.

22°. Покажите, что произведение $M^n \times N^m$ C^r-многообразия M^n и C^r-многообразия с краем N^m является $(n+m)$-мерным C^r-многообразием с краем, причем $\partial(M^n \times N^m) = M^n \times \partial N^m$.

23°. Покажите, что если некоторое многообразие с краем компактно, то край этого многообразия также компактен.

24°. Покажите, что если $f: M^n \to N^n$ — гомеоморфизм многообразий с краем, то $f(\partial M^n) = \partial N^n$.

Из многообразий с краем можно конструировать многообразия без края. Приведем такую конструкцию.

Пусть M^n — некоторое C^0-многообразие с краем. Удвоением DM^n многообразия M^n называется топологическое пространство, получающееся из объединения $(M^n \times 0) \cup (M^n \times 1)$ двух экземпляров многообразия M^n отождествлением для всякого $x \in \partial M^n$ точек $(x, 0)$ и $(x, 1)$.

Упражнение 25°. Докажите, что DM^n является C^0-многообразием (без края) размерности n.

12. Существование гладких структур. Сделаем несколько замечаний о возможности введения гладких структур. Уитни доказал, что если на пространстве M существует C^r-структура ($r \geqslant 1$), то на нем существует и C^∞-структура (и даже C^ω-структура); более того, C^∞-атлас можно выбрать из максимального атласа данной C^r-структуры. Исключительным является случай $r = 0$. Известно, что на любом C^0-многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1-структуру (а следовательно, и C^∞-структуру), но для любого $n \geqslant 4$ существуют C^0-многообразия, которые не допускают введения C^1-структуры.

§ 4. Гладкие функции на многообразии и гладкое разбиение единицы

Этот и следующий параграфы посвящены построению начал анализа на гладких многообразиях.

1. Понятие гладкой функции на многообразии. Функция, определенная на многообразии M^n, может рассматриваться локально как функция от локальных координат точки $x \in M^n$, т. е. как функция стандартных координат точки $\varphi_\alpha^{-1}(x)$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемых некоторой картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $x \in U_\alpha$. Таким образом мы попадаем в круг понятий анализа, в частности, можем определить и исследовать понятие гладкой функции.

Определение 1. Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$. Отображение $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ называется *C^r-функцией* (*функцией класса C^r*) *в окрестности точки* $x \in M^n$, если найдется карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(x \in U_\alpha)$ в M^n такая, что отображение $f\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ будет C^r-отображением на $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 1°. Покажите, что определение C^r-функции в окрестности точки не зависит от выбора карты.