24°. Покажите, что если $f: M^n \to N^n$ — гомеоморфизм многообразий с краем, то $f(\partial M^n) = \partial N^n$.

Из многообразий с краем можно конструировать многообразия без края. Приведем такую конструкцию.

Пусть M^n — некоторое C^0-многообразие с краем. Удвоением DM^n многообразия M^n называется топологическое пространство, получающееся из объединения $(M^n \times 0) \cup (M^n \times 1)$ двух экземпляров многообразия M^n отождествлением для всякого $x \in \partial M^n$ точек $(x, 0)$ и $(x, 1)$.

Упражнение 25°. Докажите, что DM^n является C^0-многообразием (без края) размерности n.

12. Существование гладких структур. Сделаем несколько замечаний о возможности введения гладких структур. Уитни доказал, что если на пространстве M существует C^r-структура ($r \geqslant 1$), то на нем существует и C^∞-структура (и даже C^ω-структура); более того, C^∞-атлас можно выбрать из максимального атласа данной C^r-структуры. Исключительным является случай $r = 0$. Известно, что на любом C^0-многообразии размерности $n < 4$ можно ввести C^1-структуру (а следовательно, и C^∞-структуру), но для любого $n \geqslant 4$ существуют C^0-многообразия, которые не допускают введения C^1-структуры.

§ 4. Гладкие функции на многообразии и гладкое разбиение единицы

Этот и следующий параграфы посвящены построению начал анализа на гладких многообразиях.

1. Понятие гладкой функции на многообразии. Функция, определенная на многообразии M^n, может рассматриваться локально как функция от локальных координат точки $x \in M^n$, т. е. как функция стандартных координат точки $\varphi_\alpha^{-1}(x)$ в $\mathbb{R}^n$, задаваемых некоторой картой $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $x \in U_\alpha$. Таким образом мы попадаем в круг понятий анализа, в частности, можем определить и исследовать понятие гладкой функции.

Определение 1. Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$. Отображение $f: M^n \to \mathbb{R}^1$ называется *C^r-функцией* (*функцией класса C^r*) *в окрестности точки* $x \in M^n$, если найдется карта $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, $(x \in U_\alpha)$ в M^n такая, что отображение $f\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ будет C^r-отображением на $\mathbb{R}^n$.

Упражнение 1°. Покажите, что определение C^r-функции в окрестности точки не зависит от выбора карты.

Определение 2. Функция $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$ называется *C^r-функцией на некотором множестве $A \subset M^n$*, если она является C^r-функцией в окрестности каждой точки $x \in A$.

Часто приходится рассматривать функцию, заданную не на всем многообразии M^n, а только на его подмножестве. Определения 1 и 2 естественным образом распространяются на случай функций $f\colon U \to \mathbb{R}^1$, заданных на открытом подмножестве $U \subset M^n$, при выборе карт $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ так, что $U_\alpha \subset U$. Однако эти определения необходимо расширить, если рассматривать функции $f\colon A \to \mathbb{R}^1$, определенные на произвольном подмножестве $A \subset M^n$.

Определение 3. Функция $f\colon A \to \mathbb{R}^1$ $(A \subset M^n)$ называется *C^r-функцией на A*, если для любой точки $y \in A$ существуют открытая окрестность $U(y) \subset M^n$ точки y и C^r — функция $\varphi_y\colon U(y) \to \mathbb{R}^1$ такие, что $\varphi_y\big|_{U(y)\cap A} = f\big|_{U(y)\cap A}$.

Легко убедиться, что каждая из локальных координат $\xi_i(x)$, $i = 1, \ldots, n$, C^r-многообразия является C^r-функцией на своей области определения.

В специальном случае двумерных многообразий — (абстрактной) римановой поверхности — важный класс образуют комплекснозначные функции.

Пусть M^2 — (абстрактная) риманова поверхность и $f\colon M^2 \to \mathbb{C}$ — функция на ней со значениями в поле $\mathbb{C}$ комплексных чисел. Функция f называется *регулярной аналитической* или *голоморфной в точке $P_0 \in M^2$*, если, будучи выраженной через локальные координаты $z = \Phi(P)$, $0 = \Phi(P_0)$ в окрестности точки P_0, она будет регулярной аналитической функцией от z в некотором круге $|z| < r$, т. е.

$$f(\Phi^{-1}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

где степенной ряд справа сходится в круге $|z| < r$.

Функция f называется *аналитической в некотором открытом множестве $U \subset M^2$*, если она является регулярной аналитической функцией в каждой точке $P_0 \in U$.

Функции на z-сфере задают обычно в локальных координатах открытого множества U_1 (см. п. 9 § 3), т. е. как функции $w = w(z)$ на z-плоскости. Чтобы исследовать функцию в окрестности точки ∞, необходимо иметь ее выражение в локальных координатах множества U_2. Последнее достигается заменой z на $1/z$; получаем функцию $w = w(1/z) = w_1(z)$, которую исследуем в окрестности нуля.

Упражнение 2°. Проверьте, что функция $w = 1/z$ определена в окрестности точки $z = \infty$ z-сферы и что она голоморфна в этой точке. То же задание для функции $w = \sum_{k=0}^{n} a_k/z^k$.

2. Разбиение единицы. Основным инструментом теории многообразий при переходе от локальных утверждений к глобальным являются разбиения единицы.

Пусть M^n есть C^r-многообразие и $\{U_\alpha\}$ — его открытое покрытие.

Определение 4. Если φ: $M^n \to \mathbb{R}^1$ — функция, то ее *носителем* supp φ называется замыкание множества $\{x\colon \varphi(x) \neq 0\}$.

Определение 5. Семейство C^r-функций $\{\varphi_\beta\colon M^n \to [0, 1]\}$ называется *разбиением единицы класса C^r, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$, если: 1) каждое из множеств supp φ_β компактно и содержится в некотором множестве U_α; 2) семейство $\{\text{supp } \varphi_\beta\}$ образует локально конечное покрытие M^n; 3) $\sum\limits_\beta \varphi_\beta(x) = 1$ для всякой точки $x \in M^n$.

Суммирование в условии 3) имеет смысл, так как в каждой точке x лишь конечное число функций φ_β отлично от нуля ввиду условия 2).

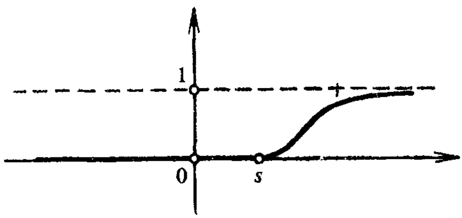

Рис. 89

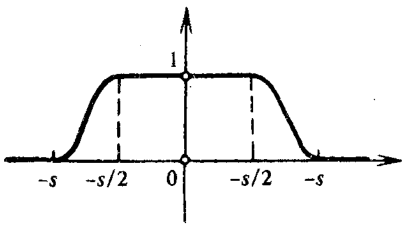

Рис. 90

Теорема 1. *Для любого открытого покрытия C^r-многообразия M^n, $r = 1, \ldots, \infty$, существует подчиненное ему C^r-разбиение единицы.*

Для доказательства этой фундаментальной теоремы нам потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого $s \in \mathbb{R}^1$ существует C^∞-функция h_s: $\mathbb{R}^1 \to [0, 1]$ такая, что* supp $h_s \subset [s, \infty)$.

Доказательство. Легко проверить, что функция

$$h_s(x) = \begin{cases} e^{-1/x-s}, & \text{если } x > s, \\ 0, & \text{если } x \leqslant s, \end{cases}$$

является искомой (рис. 89). ■

Упражнение 3°. Постройте графики функций $h_{-s}(x)$, $h_{-s}(-x)$, $h_{s/2}(x) + h_{s/2}(-x)$.

Лемма 2. *Для любого* $s > 0$ *существует* C^∞*-функция* g_s: $\mathbb{R}^n \to [0, 1]$ *такая, что*

$$g_s(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in \overline{D}_{s/2}(0), \\ 0, & \textit{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus D_s(0). \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\tilde{g}_s$: $\mathbb{R}^1 \to [0, 1]$ (рис. 90), заданную равенством

$$\tilde{g}_s(x) = \frac{h_{-s}(x)h_{-s}(-x)}{h_{-s}(x)h_{-s}(-x) + h_{s/2}(x) + h_{s/2}(-x)}.$$

Функция $g_s(x) = \tilde{g}_s(\|x\|)$: $\mathbb{R}^n \to [0, 1]$, очевидно, будет искомой.

Заметим, что если $x_0 \in \mathbb{R}^n$ — произвольная точка, то

$$g_s(x - x_0) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{D}_{s/2}(x_0), \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus D_s(x_0). \end{cases} \quad \blacksquare$$

Лемма 3. *Пусть* M^n *есть* C^r*-многообразие* $(r = 1, \ldots, \infty)$ *и* $U \subset M^n$ *— открытое множество. Тогда для любой точки* $x_0 \in U$ *существуют ее открытые окрестности* $V_1(x_0)$, $V_2(x_0)$ *и* C^r*-функция* f: $M^n \to [0, 1]$ *такие, что*:

1) $\overline{V}_1(x_0) \subset V_2(x_0) \subset U$;

2) $f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in \overline{V}_1(x_0), \\ 0, & \textit{если } x \in M^n \setminus V_2(x_0). \end{cases}$

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ — некоторый C^r-атлас M^n и пусть $x_0 \in U_\alpha \cap U$. Так как множество $U_\alpha \cap U$ открыто, а φ_α — гомеоморфизм, то множество $\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, существует диск $D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)) \subset \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U)$. Далее, так как φ_α — гомеоморфизм, то

$$\overline{\varphi_\alpha(D_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))} = \varphi_\alpha(\overline{D}_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))) \subset \varphi_\alpha(D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0))) \subset U,$$

следовательно, множества $V_1(x_0) = \varphi_\alpha(D_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))$, $V_2(x_0) = \varphi_\alpha(D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)))$ удовлетворяют условию 1. По лемме 2 существует C^r-функция $g_{s,x_0}(x) = g_s(x - x_0)$ такая, что

$$g_{s,x_0}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{D}_{s/2}(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)), \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus D_s(\varphi_\alpha^{-1}(x_0)). \end{cases}$$

Тогда функция

$$f(x) = \begin{cases} g_{s,x_0}\varphi_\alpha^{-1}(x), & \text{если } x \in V_2(x_0), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus V_2(x_0), \end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет условию 2. ■

Лемма 4. *Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r = 1, \dots, \infty$; $K \subset U \subset M^n$, где множество K компактно, а множество U открыто. Тогда существует C^r-функция $f\colon M^n \to [0, 1]$ такая, что*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если } x \in K, \\ 0, & \textit{если } x \in M^n \setminus U. \end{cases}$$

Доказательство. По лемме 3 для каждой точки $y \in K$ существуют открытые окрестности $V_1(y)$, $V_2(y)$ такие, что $\overline{V}_1(y) \subset \subset V_2(y) \subset U$, и существует C^r-функция $f_y(x)\colon M^n \to [0, 1]$ такая, что

$$f_y(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V}_1(y), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus V_2(y). \end{cases}$$

В силу компактности K в открытом покрытии $\{V_1(y)\}_{y \in K}$ множества K содержится конечное подпокрытие $V_1(y_1), \dots, V_1(y_p)$. Положим $g(x) = \prod_{i=1}^{p} (1 - f_{y_i}(x))$, тогда

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in K, \\ 1, & \text{если } x \in M^n \setminus U, \end{cases}$$

$$f(x) = 1 - g(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in K, \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus U. \end{cases}$$

Очевидно, что $f \in C^r$. ■

Лемма 5. *Во всякое открытое покрытие $\{U_\alpha\}$ C^r-многообразия M^n, $r = 1, \dots, \infty$, можно вписать открытое локально конечное покрытие $\{U'_\beta\}$ такое, что каждое множество $\overline{U'_\beta}$ компактно и содержится в некотором из множеств U_α.*

Доказательство. Пусть $\{(V_\gamma, \varphi_\gamma)\}$ — некоторый C^r-атлас многообразия M^n. Множества $\{V_\gamma \cap U_\alpha\}$ образуют открытое покрытие, вписанное в $\{U_\alpha\}$. Так как φ_γ — гомеоморфизм, то множество $\varphi_\gamma^{-1}(V_\gamma \cap U_\alpha)$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и, следовательно, для любой точки $x \in V_\gamma \in U_\alpha$ точки $\varphi_\gamma^{-1}(x)$ содержится в множестве $\varphi_\gamma^{-1}(V_\gamma \cap U_\alpha)$ с некоторым диском $D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))$. Далее, так как φ_γ — гомеоморфизм, то

$$\varphi_\gamma(\overline{D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x))}) = \varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(-x))) \subset$$
$$\subset \varphi_\gamma(D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))) \subset V_\gamma \cap U_\alpha; \quad (1)$$

кроме того, так как множество $\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x))$ компактно, а M^n хаусдорфово, то $\varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$ компактно (см. § 13 гл. II). В силу паракомпактности многообразия M^n (см. § 3) в его открытое покрытие $\{\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))\}$ можно вписать открытое локально конечное покрытие $\{U'_\beta\}$. Тогда каждое U'_β содержится в некотором $\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$. Поскольку

$$\overline{U}'_\beta \subset \overline{\varphi_\gamma(D_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))},$$

то из (1) получаем $\overline{U}'_\beta \subset \varphi_\gamma(D_{s(x)}(\varphi_\gamma^{-1}(x))) \subset V_\gamma \cap V_\alpha$, следовательно, $\overline{U}'_\beta \subset U_\alpha$. Компактность $\overline{U}'_\beta$ следует из того, что $\overline{U}'_\beta$ является замкнутым подмножеством компактного пространства $\varphi_\gamma(\overline{D}_{s(x)/2}(\varphi_\gamma^{-1}(x)))$ (см. § 13 гл. II). ■

Доказательство теоремы 1. Применяя дважды лемму 5, в заданное покрытие $\{U_\alpha\}$ впишем открытое локально конечное покрытие $\{U'_\beta\}$, а в $\{U'_\beta\}$ — открытое локально конечное покрытие $\{U''_\gamma\}$ так, что каждое $\overline{U}''_\gamma$ компактно и содержится в некотором U'_β, а каждое $\overline{U}'_\beta$ компактно и содержится в некотором U_α. Для каждого U''_γ зафиксируем одно из множеств системы $\{U'_\beta\}$, содержащее $\overline{U}''_\gamma$, и переобозначим его U'_γ. Применим теперь к множеству $K = \overline{U}''_\gamma$ лемму 4, найдем соответствующую функцию $f_\gamma\colon M^n \to [0, 1]$ такую, что

$$f_\gamma(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{U}''_\gamma, \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus U'_\gamma. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi_\gamma(x) = \frac{f_\gamma(x)}{\sum\limits_\nu f_\nu(x)}, \qquad x \in M^n$$

(суммирование в знаменателе идет по множеству индексов покрытия $\{U''_\gamma\}$ и имеет смысл, так как покрытие $\{U''_\gamma\}$ локально конечно и, следовательно, в каждой точке $x \in M^n$ лишь конечное число функций f_ν отлично от нуля). Так как $\operatorname{supp} \varphi_\gamma = \operatorname{supp} f_\gamma$, а множество $\operatorname{supp} f_\gamma$ компактно (как замкнутое подмножество компактного пространства $\overline{U}'_\gamma$), то множество $\operatorname{supp} \varphi_\gamma$ также компактно. Нетрудно видеть, что $\varphi_\gamma \in C^r$, и получаем требуемое разбиение единицы. ■

Определение 6. Функция $f: A \to \mathbb{R}^1$ ($A \subset M^n$) называется *C^r-функцией на множестве A*, если она является сужением на A некоторой C^r-функции, заданной на некотором открытом, содержащем A подмножестве U многообразия M^n.

Упражнение 4°. Пользуясь теоремой о разбиении единицы, покажите, что определение 3 гладкой функции, заданной на множестве $A \subset M^n$, эквивалентно определению 6.

3. Алгебра C^r-функций на многообразии. Рассмотрим теперь множество $\mathscr{C}(M^n)$ всех C^r-функций на C^r-многообразии M^n. Функции из $\mathscr{C}(M^n)$ естественным образом можно складывать и умножать на вещественные числа: $f, g \in \mathscr{C}(M^n)$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$, то в каждой точке $x \in M^n$ положим $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$. Таким образом, $\mathscr{C}(M^n)$ превращается в векторное пространство. Более того, обычное умножение $(f \cdot g)x = f(x) \cdot g(x)$, $x \in M^n$, превращает $\mathscr{C}(M^n)$ в алгебру над полем $\mathbb{R}$.

Пусть x — некоторая точка многообразия M^n. Рассмотрим на алгебре $\mathscr{C}(M^n)$ следующее отношение эквивалентности: $f_1 \sim f_2$, если у точки x существует такая окрестность $U(x)$, что $f_1|_{U(x)} = f_2|_{U(x)}$. Класс эквивалентности назовем C^r-ростком (функций) в точке x, а совокупность всех C^r-ростков в точке x обозначим через $\mathscr{C}(x)$. Очевидно, $\mathscr{C}(x)$ — также алгебра. Дадим другое определение $\mathscr{C}(x)$.

Если рассмотреть факторалгебру $\mathscr{C}(M^n)/\mathscr{C}_0(x)$, где $\mathscr{C}_0(x)$ — идеал всех тех функций из кольца $\mathscr{C}(M^n)$, которые обращаются в нуль в некоторой (зависящей от функции) окрестности точки x, то элементы ее естественно отождествить с ростком функций в точке x. Легко проверить, что $\mathscr{C}(M^n)/\mathscr{C}_0(x) = \mathscr{C}(x)$. Множество ростков $\mathscr{C}(x)$ можно было бы определить так же, как множество C^r-функций, определенных в окрестностях точки x, профакторизованное по тому же отношению эквивалентности, что и в определении $\mathscr{C}(x)$. На первый взгляд, получится новый объект, так как мы рассматриваем функции, заданные не на всем многообразии M^n. Из следующего упражнения вытекает, что это не так.

Упражнение 5°. Пусть f — функция класса C^r, заданная на некоторой открытой окрестности $U(x)$ точки x многообразия M^n класса C^r. Покажите, что существуют замкнутая окрестность $\overline{V}(x)$ точки x, $\overline{V}(x) \subset U(x)$, и C^r-функция $\tilde{f}$, заданная на всем многообразии M^n такие, что $\tilde{f}|_{\overline{V}(x)} = f|_{\overline{V}(x)}$.

Указание. Воспользуйтесь леммой 4.

Таким образом, на гладком многообразии построены алгебраические структуры гладких функций $\mathscr{C}(M^n)$ и ростков $\mathscr{C}(x)$. Возникает интересный вопрос: нельзя ли обратно, с помощью алгебр $\mathscr{O}(M^n)$ и $\mathscr{O}(x)$, восстановить структуру многообразия? Ниже показывается, что это возможно.

Прежде всего зафиксируем в аксиоматической форме наиболее существенные свойства алгебр функций на гладком многообразии. Рассмотрим топологическое пространство M и некоторые вещественные функции $f, f_1, \dots, f_k$, определенные на M. Будем говорить, что f *C^r-гладко зависит от функций* $f_1, \dots, f_k$ $(r \geqslant 1)$, если существует C^r-функция $U(t_1, \dots, t_k)$ вещественных переменных $t_1, \dots, t_k$, определенная на $\mathbb{R}^k$ и такая, что

$$f(x) = U(f_1(x), \dots, f_k(x)), \quad x \in M. \tag{2}$$

Если равенство (2) справедливо лишь для точек некоторого множества $V \subset M$, то будем говорить, что функция f *гладко зависит от функций* $f_1, \dots, f_k$ *на множестве* V. Назовем *C^r-гладкостью на топологическом пространстве* M непустое множество $\mathscr{O}(M)$ вещественных функций на M, удовлетворяющее условиям:

1) всякая функция, C^r-гладко зависящая от функций из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$;

2) всякая функция на M, совпадающая в некоторой окрестности каждой точки $x \in M$ с некоторой функцией из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$.

Упражнение 6°. Убедитесь, что для C^r-многообразия M^n алгебра C^r-функций $\mathscr{O}(M^n)$ удовлетворяет условиям C^r-гладкости.

Из условия 1) следует, что множество $\mathscr{O}(M)$ является алгеброй с естественными операциями сложения и умножения функций и умножения их на число. Естественным образом определяется понятие C^r-ростка $\hat{f}_x$ функции $f \in \mathscr{O}(M)$ в точке x, идеал $\mathscr{O}_0(x)$ и множества C^r-ростков $\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}(M)/\mathscr{O}_0(x)$.

Перейдем к построению C^r-структуры на M. Пусть M — топологическое пространство с C^r-гладкостью $\mathscr{O}(M)$. Пусть выполнены следующие условия: 1) для всякой точки $x \in M$ найдутся ростки $\hat{f}^1_x, \dots, \hat{f}^n_x \in \mathscr{O}(x)$, окрестность $V(x)$, представители $f^i\colon V(x) \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \dots, n$, ростков $\hat{f}^i_x$ такие, что отображение $\psi_V\colon y \mapsto \{f^1(y), \dots \dots f^n(y)\}$, $y \in V(x)$, является гомеоморфизмом $V(x)$ на пространство $\mathbb{R}^n$; 2) для всякой точки $y \in V(x)$ ростки $\hat{f}^1_y, \dots, \hat{f}^n_y$ функций $f^1, \dots, f^n$ принадлежат $\mathscr{O}(y)$; 3) для всякого ростка $\hat{g}_y \in \mathscr{O}(y)$ его представитель g зависит C^r-гладко от $f^1, \dots, f^n$ в окрестности точки y. Таким образом, задавая координатную систему в окрестности $V(x)$ посредством гомеоморфизма $\varphi_V = \psi_V^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to V(x)$, получаем систему карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$, которая, как легко проверить с помощью свойств 2), 3), образует C^r-атлас на M.

Упражнение 7°. Покажите, что система карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$ образует атлас.

Итак, на M определяется дифференциальная структура C^r-многообразия, индуцированная алгебрами $\mathscr{O}(M)$, $\mathscr{O}(x)$.

Упражнение 8°. Покажите, что если M^n — C^r-многообразие и $\{\mathscr{O}(x)\}_{x \in M^n}$ — соответствующие алгебры ростков C^r-функции на M^n, то определяемая ими дифференциальная структура совпадает со структурой многообразия M^n.

З а м е ч а н и е. Условия 1), 3) приводят к тому, что рассматриваемая гладкость на M состоит из непрерывных функций. Можно было бы рассмотреть C^r-гладкость на абстрактном множестве M и индуцировать на нем слабейшую топологию так, чтобы все функции из гладкости оказались непрерывными.

§ 5. Отображения многообразий

1. Понятие гладкого отображения. Определим и изучим гладкие отображения гладких многообразий, представляющие естественное обобщение дифференцируемых функций в анализе. Пусть M^n, N^m — два C^r-многообразия, $r \geqslant 1$. Рассматривая M^n, N^m как топологические пространства, можно говорить о непрерывных отображениях $f\colon M^n \to N^m$. Структуры класса C^r, заданные на M^n, N^m,

8*