обратно, с помощью алгебр $\mathscr{O}(M^n)$ и $\mathscr{O}(x)$, восстановить структуру многообразия? Ниже показывается, что это возможно.

Прежде всего зафиксируем в аксиоматической форме наиболее существенные свойства алгебр функций на гладком многообразии. Рассмотрим топологическое пространство M и некоторые вещественные функции $f, f_1, \ldots, f_k$, определенные на M. Будем говорить, что f *C^r-гладко зависит от функций* $f_1, \ldots, f_k$ $(r \geqslant 1)$, если существует C^r-функция $U(t_1, \ldots, t_k)$ вещественных переменных $t_1, \ldots, t_k$, определенная на $\mathbb{R}^k$ и такая, что

$$f(x) = U(f_1(x), \ldots, f_k(x)), \quad x \in M. \tag{2}$$

Если равенство (2) справедливо лишь для точек некоторого множества $V \subset M$, то будем говорить, что функция f *гладко зависит от функций* $f_1, \ldots, f_k$ *на множестве* V. Назовем *C^r-гладкостью на топологическом пространстве* M непустое множество $\mathscr{O}(M)$ вещественных функций на M, удовлетворяющее условиям:

1) всякая функция, C^r-гладко зависящая от функций из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$;

2) всякая функция на M, совпадающая в некоторой окрестности каждой точки $x \in M$ с некоторой функцией из $\mathscr{O}(M)$, принадлежит $\mathscr{O}(M)$.

Упражнение 6°. Убедитесь, что для C^r-многообразия M^n алгебра C^r-функций $\mathscr{O}(M^n)$ удовлетворяет условиям C^r-гладкости.

Из условия 1) следует, что множество $\mathscr{O}(M)$ является алгеброй с естественными операциями сложения и умножения функций и умножения их на число. Естественным образом определяется понятие C^r-ростка f_x функции $f \in \mathscr{O}(M)$ в точке x, идеал $\mathscr{O}_0(x)$ и множества C^r-ростков $\mathscr{O}(x) = \mathscr{O}(M)/\mathscr{O}_0(x)$.

Перейдем к построению C^r-структуры на M. Пусть M — топологическое пространство с C^r-гладкостью $\mathscr{O}(M)$. Пусть выполнены следующие условия: 1) для всякой точки $x \in M$ найдутся ростки $\hat{f}_x^1, \ldots, \hat{f}_x^n \in \mathscr{O}(x)$, окрестность $V(x)$, представители $f^i\colon V(x) \to \mathbb{R}^1$, $i = 1, \ldots, n$, ростков $\hat{f}_x^i$ такие, что отображение $\psi_V\colon y \mapsto \{f^1(y), \ldots \ldots f^n(y)\}$, $y \in V(x)$, является гомеоморфизмом $V(x)$ на пространство $\mathbb{R}^n$; 2) для всякой точки $y \in V(x)$ ростки $\hat{f}_y^1, \ldots, \hat{f}_y^n$ функций $f^1, \ldots, f^n$ принадлежат $\mathscr{O}(y)$; 3) для всякого ростка $\hat{g}_y \in \mathscr{O}(y)$ его представитель g зависит C^r-гладко от $f^1, \ldots, f^n$ в окрестности точки y. Таким образом, задавая координатную систему в окрестности $V(x)$ посредством гомеоморфизма $\varphi_V = \psi_V^{-1}\colon \mathbb{R}^n \to V(x)$, получаем систему карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$, которая, как легко проверить с помощью свойств 2), 3), образует C^r-атлас на M.

Упражнение 7°. Покажите, что система карт $\{(V(x), \varphi_V)\}$ образует атлас.

Итак, на M определяется дифференциальная структура C^r-многообразия, индуцированная алгебрами $\mathscr{O}(M)$, $\mathscr{O}(x)$.

Упражнение 8°. Покажите, что если M^n — C^r-многообразие и $\{\mathscr{O}(x)\}_{x \in M^n}$ — соответствующие алгебры ростков C^r-функции на M^n, то определяемая ими дифференциальная структура совпадает со структурой многообразия M^n.

Замечание. Условия 1), 3) приводят к тому, что рассматриваемая гладкость на M состоит из непрерывных функций. Можно было бы рассмотреть C^r-гладкость на абстрактном множестве M и индуцировать на нем слабейшую топологию так, чтобы все функции из гладкости оказались непрерывными.

§ 5. Отображения многообразий

1. Понятие гладкого отображения. Определим и изучим гладкие отображения гладких многообразий, представляющие естественное обобщение дифференцируемых функций в анализе. Пусть M^n, N^m — два C^r-многообразия, $r \geqslant 1$. Рассматривая M^n, N^m как топологические пространства, можно говорить о непрерывных отображениях $f\colon M^n \to N^m$. Структуры класса C^r, заданные на M^n, N^m, позволяют ввести более узкий класс отображений. Отображение $f\colon M^n \to N^m$ естественно задать в локальных координатах. Именно: если $x \in M^n$ — произвольная точка, (U, φ), (V, ψ) — карты в многообразиях M^n, N^m соответственно такие, что $x \in U$, $f(x) \in V$, и $W(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $W(x) \subset U$, $f(W(x)) \subset V$, то отображение

$$\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$$

назовем *координатным представлением отображения* f в окрестности точки x. Такое представление позволяет привлечь понятие гладкого отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, изучаемое в анализе (см. § 1).

Определение 1. Отображение $f\colon M^n \to N^m$ называется *C^r-отображением (отображением класса C^r) в окрестности точки $x \in M^n$*, если некоторое координатное представление отображения f в окрестности точки x является C^r-отображением.

Упражнение 1°. Покажите, что определение C^r-отображения в окрестности точки не зависит от выбора координатного представления.

Естественно, что, определяя гладкое в окрестности точки отображение, можно рассматривать отображения, заданные не на всем M^n, а в открытой окрестности точки.

Для случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$ определение 1 можно дать в других терминах. Пусть M^n, N^m — подмногообразия в $\mathbb{R}^{N_1}$ и $\mathbb{R}^{N_2}$ соответственно.

Определение 2. Отображение $f\colon M^n \to N^m$ называется *C^r-отображением (отображением класса C^r) в окрестности точки* $x \in M^n$, если существуют открытое множество $U \subset \mathbb{R}^{N_1}$, $x \in U$, и C^r-отображение $\tilde{f}\colon U \to \mathbb{R}^{N_2}$, совпадающее с f на $U \cap M^n$.

Упражнение 2°. Покажите, что для случая подмногообразий в $\mathbb{R}^N$ определения 1 и 2 эквивалентны.

Указание. Воспользуйтесь свойством отображений карт быть диффеоморфизмами (см. лемму 1 § 2).

От локальных определений перейдем к глобальным.

Определение 3. Отображение $f\colon M^n \to N^m$ многообразий называется *C^r-отображением (отображением класса C^r)*, если оно есть C^r-отображение в окрестности каждой точки $x \in M^n$.

Очевидно, что понятие C^r-отображения является обобщением понятия C^r-функции.

Аналогично, понятие комплексной аналитической функции на римановой поверхности обобщается в понятие комплексного аналитического отображения римановых поверхностей (если потребовать аналитичность координатного представления).

Упражнения. 3°. Проверьте, что отображение $w=\sqrt{z}$ двулистной римановой поверхности на z-сферу аналитично.

4°. Проверьте, что отображения $w=1/z$ и $w=\sum_{k=0}^{n} a_k/z^k$, рассматриваемые как отображения z-сферы на себя, аналитичны.

Замечание 1. Понятие гладкого отображения можно распространить на случай отображений многообразий с краем. Если $f\colon M^n \to N^m$ — непрерывное отображение C^r-многообразий с краем, $r \geqslant 1$, то, как и в случае отображения многообразий (без края), можно говорить о координатном представлении отображения f в окрестности точки $x \in M^n$. Отображение f называется C^r-отображением в окрестности точки $x \in M^n$, если некоторое координатное представление $\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$ отображения f в окрестности точки x является C^r-отображением в смысле определения 2 § 2, т. е. является C^r-отображением (в обычном смысле), если $\varphi^{-1}(W(x))$ открыто в $\mathbb{R}^n$, и продолжимо как C^r-отображение на некоторую открытую в $\mathbb{R}^n$ окрестность точки x, если $\varphi^{-1}(W(x))$ открыто в $\mathbb{R}^n_+$, но не открыто в $\mathbb{R}^n$. Отображение f называется C^r-отображением, если оно является C^r-отображением в окрестности каждой точки $x \in M^n$.

Определение 4. Отображение $f\colon M^n \to N^n$ многообразий класса C^r называется *C^r-диффеоморфизмом*, если: 1) f биективно; 2) f, f^{-1} являются C^r-отображениями.

Упражнение 5°. Почему нельзя определить диффеоморфизм многообразий разной размерности?

Два C^r-многообразия, M^n, N^n, называются C^r-диффеоморфными, если существует C^r-диффеоморфизм $f\colon M^n \to N^n$.

Упражнение 6°. Убедитесь, что диффеоморфность многообразий является отношением эквивалентности.

Теорема 1. *Если M^n — многообразие класса C^r и N^n — многообразие класса C^r со структурой, индуцированной гомеоморфизмом $f\colon M^n \to N^n$, то M^n и N^n C^r-диффеоморфны.*

Доказательство. Легко видеть, что нужным диффеоморфизмом является f. ■

Таким образом, индуцируя с помощью гомеоморфизма $f\colon M^n \to N$ структуру C^r-многообразия на топологическом пространстве N, мы превращаем f в C^r-диффеоморфизм.

Теорема 2. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — C^r-диффеоморфизм C^r-многообразий M^n, N^n. Тогда отображение $f\colon M^n \to N^n$ как гомеоморфизм топологических пространств индуцирует на N^n C^r-структуру, совпадающую с первоначально заданной.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ и $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — C^r-атласы на M^n и N^n соответственно. Покажем, что любая карта атласа

$\{(f(U_\alpha), f\varphi_\alpha)\}$ C^r-согласована с любой картой атласа $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$, т. е. что отображение

$$\psi_\beta^{-1}(f\varphi_\alpha)\colon (f\varphi_\alpha)^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \to \psi_\beta^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \qquad (1)$$

является C^r-диффеоморфизмом для любых α и β.

Действительно, так как f — C^r-диффеоморфизм, то его представление в локальных координатах открытых множеств

$$f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset U_\alpha, \quad f(U_\alpha) \cap V_\beta \subset V_\beta,$$

$$\psi_\beta^{-1} f\varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}[f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)] \to \psi_\beta^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)$$

является C^r-диффеоморфизмом. Но

$$\varphi_\alpha^{-1}[f^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta)] = (f\varphi_\alpha)^{-1}(f(U_\alpha) \cap V_\beta);$$

следовательно, отображение (1) является C^r-диффеоморфизмом, что и доказывает утверждение. ■

С точки зрения общей топологии мы не различаем гомеоморфные пространства. Естественно условиться не различать гомеоморфные многообразия M^n и N^n, где многообразие N^n наделено структурой гладкого многообразия, индуцированной гомеоморфизмом $f\colon M^n \to N^n$. Но тогда согласно теореме 1 M^n и N^n диффеоморфны. Обратно: если многообразия M^n, N^n диффеоморфны ($f\colon M^n \to N^n$), то они гомеоморфны, и согласно теореме 2 f как гомеоморфизм индуцирует на N^n структуру гладкого многообразия, совпадающую с первоначальной. Таким образом, принятое соглашение эквивалентно тому, чтобы не различать диффеоморфные многообразия.

Упражнения. 7°. Покажите, что совокупность C^r-многообразий всех размерностей $n \geqslant 1$ образует категорию, морфизмами которой служат C^r-отображения многообразий. Покажите, что эквивалентности в этой категории — это C^r-диффеоморфизмы многообразий.

8°. Покажите, что все C^∞-многообразия, задаваемые различными C^∞-структурами на $\mathbb{R}^1$, указанными в упражнении 2° § 3, C^∞-диффеоморфны.

Последнее упражнение отражает общую ситуацию. Как уже отмечалось в § 3, если на многообразии M^n существует хотя бы одна C^r-структура ($r \geqslant 1$), то на M^n существует бесконечно много C^∞-структур, однако определяемые ими C^∞-многообразия на M^n большей частью диффеоморфны. Например, известно, что все C^∞-структуры на $\mathbb{R}^n$, $n \neq 4$, задают C^∞-диффеоморфные многообразия; все C^∞-структуры на S^n, $n = 1, 2, 3, 5, 6, 12$, задают C^∞-диффеоморфные многообразия. Известно также, что если размерность многообразий меньше 4, то из гомеоморфности многообразий следует их диффеоморфность, т. е. для многообразий размерности, меньшей 4, дифференцируемая и топологическая классификации совпадают.

Возникает естественный вопрос: существуют ли гомеоморфные, но не диффеоморфные многообразия? Этот вопрос был решен Дж. Милнором в 1956 г. Он показал, что существует ровно 28 гладких многообразий (сферы Милнора), гомеоморфных S^7, но не диффеоморфных друг другу *. Открытие Милнором существования гомеоморфных, но не диффеоморфных многообразий положило начало выделению дифференциальной топологии в самостоятельную область математики **.

Важные примеры диффеоморфизмов возникают при действии групп преобразований на многообразиях. Мы уже рассматривали аффинную группу преобразований пространства $\mathbb{R}^n$.

Группы Ли $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n\ \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ также являются группами преобразований пространства $\mathbb{R}^n$ (как говорят, *действуют* на $\mathbb{R}^n$). Понятие действия абстрактной группы на топологическом пространстве обсуждалось в § 5 гл. II. Обобщим его на случай групп Ли.

Определение 5. Пусть M — гладкое многообразие и G — группа Ли. *Действием* (*правым*) *G на M* называется гладкое отображение $f: M\times G \to M$, сопоставляющее паре $(x, g)\in M\times G$ точку $y=f(x, g)\in M$ (обозначаемую $x\cdot g$), удовлетворяющее следующим условиям: 1) для $g_1, g_2\in G$, $x\in M$ имеем $x(g_1\cdot g_2)=(xg_1)g_2$ для любых g_1, g_2, x; 2) для единицы $e\in G$ имеем $x\cdot e=x$ для любых x.

Если при фиксированном g обозначить гладкое отображение $y=f(\cdot\,, g)$ через h_g, то из аксиом 1), 2) действия G на M заключаем $h_{g_1\cdot g_2}=h_{g_2}\cdot h_{g_1}$, $h_g\cdot h_{g^{-1}}=h_e=h_{g^{-1}}\cdot h_g$. Так как $h_e=1_M$, заключаем, что h_g обратимо и $(h_g)^{-1}=h_{g^{-1}}$ — гладкое отображение; следовательно, h_g — диффеоморфизм M и действие группы G означает задание гомеоморфизма $G\to \mathrm{Diff}\,(M)$ в группу диффеоморфизмов многообразия M.

Имея правое действие, можно определить *левое действие G на M* равенством $g\cdot x=f(x, g^{-1})$; тогда $(g_1\cdot g_2)x=g_2(g_1\cdot x)$, $h_{g_1\cdot g_2}=$ $=h_{g_1}\cdot h_{g_2}$.

Упражнение 9°. Покажите, что действие групп $GL(n, \mathbb{R})$, $O(n, \mathbb{R})$, $SO(n, \mathbb{R})$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, задаваемое формулой $y=Ax$, где A — матрица из соответствующей группы, а x, u — координатные вектор-столбцы, является левым действием; аналогично для группы аффинных преобразований $y=Ax+v$.

---

* Сферы Милнора можно задать как подмногообразия в $\mathbb{R}^{10}=\mathbb{C}^5=\{(z_1, \ldots, z_5)\}$ системами двух уравнений $z_1^{6k-1}+z_2^3+z_3^2+z_4^2+z_5^2=0$, $|z_1|^2+\ldots+|z_5|^2=1$, $k=1, 2, \ldots, 28$.

** В 1987 г. К. Таубс показал, что существует несчетное множество гладких многообразий, гомеоморфных $\mathbb{R}^4$, но не диффеоморфных друг другу.

Рассматривая алгебраические гомоморфизмы группы G_1 в G_2, полезно учитывать и структуру гладких многообразий. Понятия, формулируемые ниже, являются развитием соответствующих понятий гладких отображений.

Если $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — алгебраический гомоморфизм групп G_1 и G_2, являющихся группами Ли, и если φ является гладким отображением многообразий G_1 и G_2, то он называется *гомоморфизмом групп Ли*. Гомоморфизм, являющийся диффеоморфизмом, называется *изоморфизмом групп Ли*.

Изоморфизмы группы Ли на себя называют ее *автоморфизмами*. Если $G_2 = \mathrm{Aut}\,(V)$ (множество невырожденных линейных преобразований векторного пространства V — его автоморфизмов), то гомоморфизм $\varphi\colon G \to G_2$ называется *представлением группы Ли* G.

Каждый элемент g группы Ли G порождает автоморфизмы G: *левый сдвиг* $L_g\colon h \mapsto g\cdot h$; *правый сдвиг* $R_g\colon h \mapsto h\cdot g$; *внутренний автоморфизм* $L_g\cdot R_{g^{-1}}\colon h \mapsto g\cdot h\cdot g^{-1}$, обозначаемый α_g.

Упражнение 10°. Проверьте соотношения: $L_{g\cdot h} = L_g\cdot L_h$, $L_{g^{-1}} = L_g^{-1}$, $R_{g\cdot h} = R_h\cdot R_g$, $R_{g^{-1}} = R_g^{-1}$, $L_g\cdot R_h = R_h\cdot L_g$, $\alpha_{gh} = \alpha_g\alpha_h$, $\alpha_{g^{-1}} = \alpha_g^{-1}$.

2. Классификация одномерных многообразий. Всякое многообразие (произвольной размерности) состоит из не более чем счетного множества своих связных компонент (см. § 3). Поэтому достаточно классифицировать лишь связные многообразия.

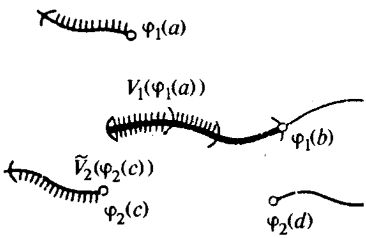

Рис. 91

Наиболее просто классифицируются нульмерные и одномерные многообразия. Связное нульмерное многообразие, очевидно, есть точка. Рассмотрим одномерные многообразия.

Лемма 1. *Если связное топологическое многообразие M^1 имеет атлас, состоящий из двух карт (U_i, φ_i), $\varphi_i\colon \mathbb{R}^1 \to U_i$, $i = 1, 2$, то M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1.*

Доказательство. Если $U_1 \subset U_2$ или $U_2 \subset U_1$, то M^1, очевидно, гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. Рассмотрим теперь случай, когда ни одно из множеств U_1, U_2 не содержится в другом. Из связности M^1 следует, что $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$. Так как множества $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ открыты в $\mathbb{R}^1$, то они представляют собой объединение некоторых непересекающихся конечных или бесконечных интервалов (связных компонент). Покажем сначала, что среди связных компонент этих множеств нет конечных интервалов. Предположим противное. Пусть, например, множество $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ имеет связную компоненту (a, b). Так $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ — гомеоморфизм, то интервал $(c, d) = \varphi_2^{-1}\varphi_1((a, b))$ будет связной компонентой множества $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$. Отметим, что при этом ни одна из точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_1(b)$ не может совпадать с точками $\varphi_2(c)$, $\varphi_2(d)$ (рис. 91), так как эти пары точек принадлежат непересекающимся множествам $U_1 \setminus (U_1 \cap U_2)$, $U_2 \setminus (U_1 \cap U_2)$. Поскольку функция $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ гомеоморфно отображает (a, b) на (c, d), то она монотонно возрастает или убывает. Рассмотрим случай возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$. Пусть $V(\varphi_1(a))$, $\tilde{V}(\varphi_2(c))$ — произвольные окрестности в M^1 точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$. Тогда $V_1(\varphi_1(a)) = V(\varphi_1(a)) \cap U_1$, $V_2(\varphi_2(c)) = \tilde{V}(\varphi_2(c)) \cap U_2$ — окрестности точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$ в U_1 и U_2 соответственно, а $W_1(a) = \varphi_1^{-1}(V_1(\varphi_1(a)))$, $W_2(c) = \varphi_2^{-1}(V_2(\varphi_2(c)))$ — окрестности точек a, c в $\mathbb{R}^1$. Для всех достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеем $(a, a+\varepsilon) \subset W_1(a)$, $(c, c+\varepsilon) \subset W_2(c)$, откуда

$$\begin{aligned} &\varphi_1((a, a+\varepsilon)) \subset \varphi_1(W_1(a)) = V_1(\varphi_1(a)), \\ &\varphi_2((c, c+\varepsilon)) \subset \varphi_2(W_2(c)) = V_2(\varphi_2(c)). \end{aligned} \tag{2}$$

В силу возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((a, a+\varepsilon)) \cap (c, c+\varepsilon) \neq \varnothing$ (рис. 92), откуда $\varphi_1((a, a+\varepsilon)) \cap \varphi_2(c, c+\varepsilon) \neq \varnothing$. Из последнего неравенства и включений (2) получаем $V_1(\varphi_1(a)) \cap V_2(\varphi_2(c)) \neq \varnothing$. Таким образом, пересечение любых окрестностей точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(c)$ непусто. Аналогичным образом доказывается, что непусто пересечение любых окрестностей точек $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(d)$, а в случае убывания функции $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ — точек $\varphi_1(a)$, $\varphi_2(d)$, а также точек $\varphi_1(b)$, $\varphi_2(c)$. Так как отсутствие непересекающихся окрестностей у пары различных точек противоречит хаусдорфовости многообразия M^1, то тем самым доказано, что среди связных компонент множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ нет конечных интервалов. Кроме того, множества $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ не совпадают со всей прямой $\mathbb{R}^1$, так как ни одно из множеств U_1, U_2 не содержится в другом. Поэтому логически возможны лишь следующие случаи:

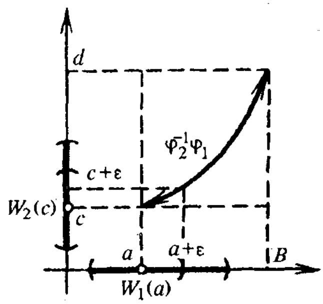

Рис. 92

1) каждое из множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ представляет собой открытую полупрямую;

2) каждое из множеств $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ состоит из двух открытых непересекающихся полупрямых.

Рассмотрим первый случай. Не ограничивая общности можно считать, что множество $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2)$ имеет вид $(-\infty, a)$, а множество $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2)$ — вид $(b, +\infty)$ (последнего можно добиться, рассматривая, в случае необходимости, вместо карты $(U_i, \varphi_i(x))$ карту $(U_i, \varphi_i(-x))$). Так как функция $\varphi_2^{-1}\varphi_i$ гомеоморфно отображает $(-\infty, a)$ на $(b, +\infty)$, то она монотонна. Заметим, что $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ возрастает, иначе из рассуждений, аналогичных приведенным выше, следовало бы, что точки $\varphi_1^{-1}(a)$, $\varphi_2^{-1}(b)$ не имеют непересекающихся окрестностей, что противоречит хаусдорфовости M^1. Пусть x_0 — какая-нибудь точка из $U_1 \cap U_2$. В силу возрастания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ (рис 93) имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_0))) = (b, \varphi_2^{-1}(x_0))$, $\varphi_2^{-1}\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), a)) = (\varphi_2^{-1}(x_0), +\infty)$ (рис. 94). Применяя гомеоморфизм φ_2 к обеим частям последних равенств, получаем $\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_0))) = \varphi_2(b, \varphi_2^{-1}))$, $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), a)) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_0), +\infty))$. Отсюда

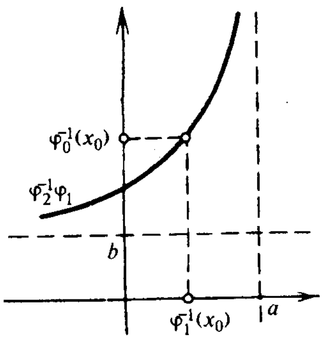

Рис. 93

$$M^1 = \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)) \cup \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)]),$$

причем $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)) \cap \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0))) = \varnothing$. Поэтому если ψ_1: $[0, +\infty) \to [\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty)$, ψ_2: $(-\infty, 0] \to (-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)]$ — некоторые гомеоморфизмы, то гомеоморфизмы $\varphi_1\psi_1$: $[0, +\infty) \to \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_0), +\infty))$, $\varphi_2\psi_2$: $(-\infty, 0] \to \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_0)])$ задают гомеоморфизм $\mathbb{R}^1$ и M^1. Таким образом, в случае 1) многообразие M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$.

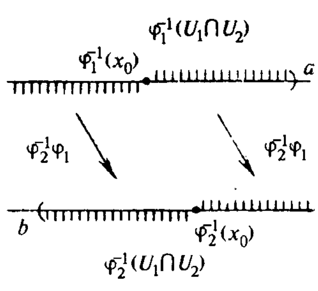

Рис. 94

Во втором случае $\varphi_1^{-1}(U_1 \cap U_2) = (-\infty, a_1) \cup (a_2, +\infty)$, $\varphi_2^{-1}(U_1 \cap U_2) = (-\infty, b_1) \cup (b_2, +\infty)$, где $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, $a_1 < a_2$, $b_1 < b_2$. Не ограничивая общности, можно считать, что

$\varphi_1((-\infty, a_1)) = \varphi_2((-\infty, b_1))$, $\varphi_1((a_2, +\infty)) = \varphi_2((b_2, +\infty))$ (в противном случае вместо одной из карт $(U_i, \varphi_i(x))$, $i = 1, 2$, следует рассмотреть карту $(U_i, \varphi_i(-x))$). Пусть x_1 — какая-нибудь точка из $\varphi_1((-\infty, a_1))$, а x_2 — какая-нибудь точка из $\varphi_1((a_2, +\infty))$. Покажем, что

$$\begin{aligned}
&\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_1))) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_1), b_1)),\\
&\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_1), a_1)) = \varphi_2((-\infty, \varphi_2^{-1}(x_1))),\\
&\varphi_1((a_2, \varphi_1^{-1}(x_2))) = \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_2), +\infty)),\\
&\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_2), +\infty)) = \varphi_2((b_2, \varphi_2^{-1}(x_2))).
\end{aligned} \tag{3}$$

Проверим первое из равенств (остальные проверяются аналогично). Так как функция $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ гомеоморфно отображает $(-\infty, a_1)$ на

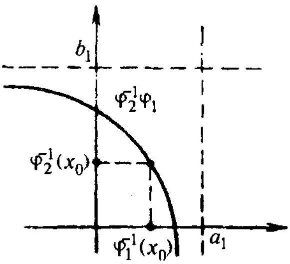

Рис. 95

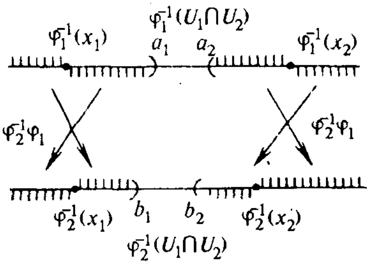

Рис. 96

$(-\infty, b_1)$, то она монотонна, причем $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ убывает, иначе точки $\varphi_1^{-1}(a_1)$, $\varphi_2^{-1}(b_1)$ не имели бы непересекающихся окрестностей, что противоречит хаусдорфовости M^1. В силу убывания $\varphi_2^{-1}\varphi_1$ (рис. 95) имеем $\varphi_2^{-1}\varphi_1((-\infty, \varphi_1^{-1}(x_1))) = (\varphi_2^{-1}(x_1), b_1)$ (рис. 96). Применяя гомеоморфизм φ_2 к обеим частям последнего равенства, получаем требуемое равенство. В силу равенства (3) имеем

$$M^1 = \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_1^{-1}(x_2)]) \cup ([\varphi_2^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2)]),$$

причем $\varphi_1((\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_1^{-1}(x_2))) \cap \varphi_2((\varphi_2^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2))) = \varnothing$. Поэтому если $\psi_1\colon \overline{S}^1_+ \to [\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_1^{-1}(x_2)]$, $\psi_2\colon \overline{S}^1_- \to [\varphi_2^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2)]$ — некоторые гомеоморфизмы, то гомеоморфизмы $\varphi_1\psi_1\colon \overline{S}^1_+ \to \varphi_1([\varphi_1^{-1}(x_1), \varphi_1^{-1}(x_2)])$, $\varphi_2\psi_2\colon \overline{S}^1_- \to \varphi_2([\varphi_2^{-1}(x_1), \varphi_2^{-1}(x_2)])$ задают гомеоморфизм S^1 и M^1. ■

Теорема 3. *Всякое одномерное связное топологическое многообразие M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ($\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^1 \to U_\alpha$) — какой-нибудь не более чем счетный атлас многообразия M^1. Заметим, что если объединение $V = U_{\alpha_1} \cup \dots \cup U_{\alpha_k}$ каких-нибудь множеств из $\{U_\alpha\}$ связно и система множеств $S = \{U_\alpha\} \setminus \{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_k}\}$ непуста, то найдется множество $U_{\alpha_{k+1}} \in S$ такое, что объединение $V \cup U_{\alpha_{k+1}}$ связно (иначе пересечение множества V с каждым из множеств системы S было бы пусто в силу связности множеств U_α, а следовательно, было бы пусто и пересечение множества V с объединением всех множеств системы S, что противоречит связности M^1). Поэтому множества из карт атласа можно перенумеровать в последовательность $U_1, U_2, \dots$ так, чтобы все объединения $V_k = U_1 \cup \dots \cup U_k$, $k = 1, 2, \dots$, были связны. В силу леммы 1 многообразие $V_2 = U_1 \cup U_2$ гомеоморфно S^1 или $\mathbb{R}^1$. Если V_2 гомеоморфно S^1, то $V_2 = M^1$. Действительно, поскольку V_2 гомеоморфно компактному пространству S^1, то оно компактно, и, следовательно, замкнуто в хаусдорфовом пространстве M^1. С другой стороны, V_2 открыто в M^1. Так как непустым, открытым и одновременно замкнутым множеством в связном пространстве может быть лишь само пространство, то $V_2 = M^1$, что и доказывает теорему, если V_2 гомеоморфно S^1. Если же V_2 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, то, аналогичным образом, многообразие $V_3 = V_2 \cup U_3$ гомеоморфно S^1 или $\mathbb{R}^1$. Если V_3 гомеоморфно S^1, то M^1 гомеоморфно S^1. Если же V_3 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$, то рассмотрим $V_4 = V_3 \cup U_4$ и т. д. При рассмотрении многообразий $V_1, V_2, \dots$ возможны следующие случаи:

1) некоторое V_k гомеоморфно S^1;

2) все V_k, $k = 1, 2, \dots$, гомеоморфны $\mathbb{R}^1$.

В первом случае M^1 гомеоморфно S^1. Покажем, что в случае 2) M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. Если атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ конечен, то это очевидно. Пусть атлас состоит из бесконечного множества карт. Построим индуктивно последовательность конечных интервалов $(a_1, b_1) \subset \subset (a_2, b_2) \subset \dots$ и последовательность гомеоморфизмов $\psi_k\colon (a_k, b_k) \to V_k$, $k = 1, 2, \dots$, таких, что $\psi_{k+1}\big|_{(a_k, b_k)} = \psi_k$. Пусть (a_1, b_1) — какой-нибудь конечный интервал и $\psi_1\colon (a_1, b_1) \to V_1$ — какой-нибудь гомеоморфизм. Пусть интервалы $(a_1, b_1), \dots, (a_k, b_k)$ и гомеоморфизмы $\psi_i\colon (a_i, b_i) \to V_i$, $i = 1, \dots, k$, уже построены. Построим интервал (a_{k+1}, b_{k+1}) и гомеоморфизм $\psi_{k+1}\colon (a_{k+1}, b_{k+1}) \to V_{k+1}$. Пусть $f_{k+1}\colon (a_k, b_k) \to V_{k+1}$ — какой-нибудь гомеоморфизм. Так как $V_k \subset V_{k+1}$, то $f_{k+1}^{-1}(V_k)$ — некоторый интервал

(c_k, d_k), содержащийся в (a_k, b_k). Пусть $g_{k+1}\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — какой-нибудь гомеоморфизм, для которого $g_{k+1}((c_k, d_k)) = (a_k, b_k)$ (среди таких гомеоморфизмов есть как возрастающие, так и убывающие). Так как функция $\psi_k^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}\big|_{(a_k,\, b_k)}$ — гомеоморфизм, то она монотонна; не ограничивая общности, можно считать, что она возрастает (последнего можно добиться выбором возрастающего или убывающего гомеоморфизма g_{k+1}). Положим $(a_{k+1}, b_{k+1}) = g_{k+1}(a_k, b_k))$. Зададим отображение $\psi_{k+1}\colon (a_{k+1}, b_{k+1}) \to V_{k+1}$ равенством

$$\psi_{k+1}(x) = \begin{cases} \psi_k(x), & \text{если } x \in (a_k, b_k); \\ f_{k+1} g_{k+1}^{-1}(x), & \text{если } x \in (a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus (a_k, b_k). \end{cases}$$

Покажем, что ψ_{k+1} — гомеоморфизм. Действительно, отображение $\Phi = \psi_{k+1}^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}\big|_{(a_{k+1}, b_{k+1})}$ на множестве $(a_{k+1}, b_{k+1}) \setminus (a_k, b_k)$ тождественно, а на (a_k, b_k) совпадает с гомеоморфизмом $\psi_k^{-1} f_{k+1} g_{k+1}^{-1}$, который возрастает (рис. 97), поэтому Φ — гомеоморфизм, а следовательно, и $\psi_{k+1} = f_{k+1} g_{k+1}^{-1} \Phi^{-1}$ — гомеоморфизм.

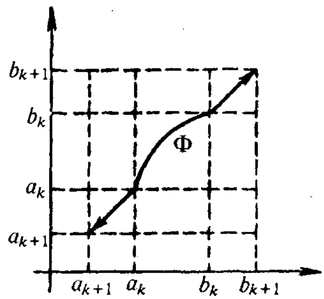

Рис. 97

Построенная последовательность гомеоморфизмов $\psi_k\colon (a_k, b_k) \to V_k$, $k = 1, 2, \ldots$, задает гомеоморфизм интервала $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k)$ и $M^1 = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} V_k$, следовательно, M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1$. ∎

Теорема 4. *Всякое одномерное связное топологическое многообразие с краем M^1 ($\partial M^1 \neq \varnothing$) гомеоморфно $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$.*

Доказательство. Удвоение DM^1 многообразия M^1 будет одномерным связным топологическим многообразием (без края) и, следовательно, гомеоморфно $\mathbb{R}^1$ или S^1, а само M^1 гомеоморфно связному замкнутому собственному подмножеству $\mathbb{R}^1$ или S^1, не сводящемуся к точке. Так как всякое связное неодноточечное подмножество $\mathbb{R}^1$ вместе с любыми двумя своими точками содержит соединяющий их отрезок, то связные неодноточечные множества в $\mathbb{R}^1$ имеют вид (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ или $[a, b]$, где $a < b$ (возможно, $a = -\infty$, $b = +\infty$). Поэтому связные замкнутые собственные подмножества $\mathbb{R}^1$, не сводящиеся к точке, имеют вид $(-\infty, b]$, $[a, +\infty)$ или $[a, b]$ и, следовательно, гомеоморфны $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$. Аналогичным образом, связные замкнутые собственные подмножества S^1, не сводящиеся к точке, гомеоморфны $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$. Таким образом, M^1 гомеоморфно $\mathbb{R}^1_+$ или $\overline{D}^1$ (компактное M^1 гомеоморфно $\overline{D}^1$, а некомпактное — $\mathbb{R}^1_+$). ■

Топологическая классификация компактных двумерных многообразий проведена нами в § 4 гл. II и § 4 гл. III. Классификация многообразий размерности, большей 2, представляет собой очень трудную задачу.

3. Регулярные и нерегулярные точки гладкого отображения. Пусть $f\colon M^n \to N^m$ есть C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant 1$.

Определение 6. Точка $x \in M^n$ называется *регулярной* (*некритической, неособой*) точкой отображения f, если для некоторого координатного представления

$$\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$$

отображения f в окрестности точки x точка $\varphi^{-1}(x)$ является регулярной.

В противном случае точка x называется *нерегулярной* (*критической, особой*).

Упражнение 11°. Покажите независимость определения от выбора координатного представления.

Определение 7. Точка $y \in N^m$ называется *регулярным* (*некритическим, неособым*) значением отображения f, если ее полный прообраз $f^{-1}(y)$ состоит только из регулярных точек отображения f или пуст.

В противном случае точка y называется *нерегулярным* (*критическим, особым*) *значением*.

Замечание 2. Понятие регулярной точки отображения f можно распространить на случай, когда M^n, N^m — многообразия с краем. Для точек, не принадлежащих краю ∂M^n, определение регулярности остается прежним. Точку x края ∂M^n будем называть *регулярной точкой* отображения f, если для некоторого координатного представления $\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(W(x)) \to \psi^{-1}(V)$ отображения f в окрестности точки x выполнены условия:

1) существует открытая в $\mathbb{R}^n$ окрестность $\widetilde{W}$ точки $\varphi^{-1}(x)$ и C^r-отображение $\Phi\colon \widetilde{W} \to \mathbb{R}^m$, совпадающее с $\psi^{-1} f \varphi$ на множестве $\widetilde{W} \cap \varphi^{-1}(W(x))$, для которого $\varphi^{-1}(x)$ — регулярная точка;

2) точка x является регулярной точкой сужения $f\big|_{\partial M^n}$ отображения f на край ∂M^n.

Определения нерегулярной точки, регулярного и нерегулярного значения прежние.

Отметим, что при $n \leqslant m$ условие 2) следует из условия 1), а при $n > m$ условие 1) следует из условия 2); при $n > m$ множество нерегулярных значений отображения f совпадает с объединением множеств нерегулярных значений отображений $f\big|_{M^n \setminus \partial M^n}$, $f\big|_{\partial M^n}$.

Упражнение 12°. Покажите, что множество регулярных точек отображения $f\colon M^n \to N^m$ многообразий открыто в M^n.

Множество регулярных значений отображения многообразий, в отличие от множества регулярных точек, может быть и не открыто (приведите примеры!).

В топологии часто используется фундаментальная теорема анализа о мере множества нерегулярных значений гладкого отображения.

Напомним вначале, что множество $A \subset \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль (обозначается $\operatorname{mes} A = 0$), если для всякого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетное покрытие A замкнутыми параллелепипедами $U_1, U_2, \ldots$ такое, что $\sum\limits_i \operatorname{Vol} U_i < \varepsilon$ (здесь $\operatorname{Vol} U_i$ — обычный объем параллелепипеда U_i в $\mathbb{R}^n$).

Ясно, что не более чем счетное объединение множеств меры нуль есть множество меры нуль и если A имеет меру нуль и $B \subset A$, то B имеет меру нуль.

Теорема 5 (Сард) *. *Пусть U — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon U \to \mathbb{R}^m$ — C^r-отображение, $r \geqslant \max(n-m, 0) + 1$. Тогда, если $n \geqslant m$, то множество нерегулярных значений отображения f имеет меру нуль; если $n < m$, то множество $f(U)$ всех значений отображения f имеет меру нуль* **.

Мы докажем теорему 5 лишь для случая $n \leqslant m$, хотя в дальнейшем будем ею пользоваться и при $n > m$. Доказательство в случае $n > m$ довольно сложно, читатель может найти его в литературе.

Докажем сначала теорему для случая $n = m$.

Пусть Q — некоторый замкнутый n-мерный куб в U со стороной l. Покажем сначала, что множество нерегулярных значений отображения $f\colon Q \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль. Согласно теореме о среднем для любых двух точек $y, z \in Q$ имеем

$$f_i(z) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \bigg|_{u^i} \right) (z_j - y_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где u^i — некоторая точка отрезка, соединяющего y и z. Так как $f \in C^1$, то функции $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, непрерывны на Q и, сле-

---

* Эту теорему в литературе чаще всего называют теоремой Сарда, хотя впервые такое утверждение было установлено А. Брауном в 1935 г. В 1939 г. А. П. Морс доказал теорему для случая функций $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, упоминая в статье более слабый результат из неопубликованной работы М. Морса и А. Сарда. Теорема 5 была опубликована А. Сардом в 1942 г. В 1953 г. результат был вновь открыт А. Я. Дубовицким и Р. Томом. Для случая отображений плоскости $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ теорема была установлена К. Кноппом и Р. Шмидтом еще в 1926 г.

** Как показали Дж. Уитни и Д. Е. Меньшов, предположение гладкости ослабить нельзя.

довательно, ограничены как непрерывные функции на компактном множестве. Поэтому из равенств (4) можно получить неравенство

$$\|f(y) - f(z)\| < c\|y - z\|, \tag{5}$$

где c — некоторая константа.

Рассмотрим теперь аффинное отображение

$$\begin{gathered} T_y(z) = (T_y^{(1)}(z), \ldots, T_y^{(n)}(z)) \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \\ T_y^{(i)}(z) = f_i(y) + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_y \right)(z_j - y_j), \quad i = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6}$$

Из равенств (4), (6) получаем

$$f_i(z) - T_y^{(i)}(z) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_{u^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\bigg|_y \right)(z_j - y_j), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Так как функции $\partial f_i/\partial x_j$, $i, j = 1, \ldots, n$, равномерно непрерывны на Q (как непрерывные функции на компактном множестве), то существует функция $\lambda(\varepsilon)\colon \mathbb{R}^1_+ \to \mathbb{R}^1_+$ такая, что $\lambda(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и

$$\|f(z) - T_y(z)\| \leqslant \lambda(\|z - y\|) \cdot (\|z - y\|). \tag{7}$$

Если y — нерегулярная точка отображения f, то $\operatorname{rank}(\partial f/\partial x)|_y < n$, следовательно, образ $T_y(\mathbb{R}^n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении T_y содержится в некоторой гиперплоскости $P_y \subset \mathbb{R}^n$.

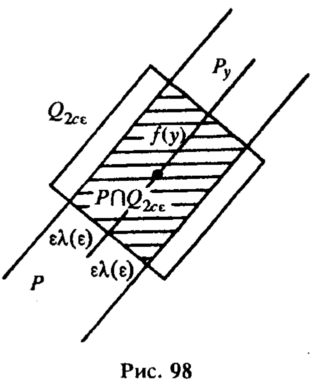

Рис. 98

Если $\|z - y\| < \varepsilon$, то в силу (7) имеем $\|f(z) - T_y(z)\| < \varepsilon\lambda(\varepsilon)$, и, следовательно, $f(z)$ лежит в слое P между гиперплоскостями, параллельными P_y и лежащими на расстоянии $\varepsilon\lambda(\varepsilon)$ от P_y (рис. 98); с другой стороны, из неравенства (5) следует, что $f(z)$ содержится в диске $D^n_{c\varepsilon}(f(y))$ радиуса $c\varepsilon$ с центром в точке $f(y)$, а следовательно, и во всяком замкнутом кубе с ребром $2c\varepsilon$ и с центром в $f(y)$, в частности, в кубе $Q_{2c\varepsilon}$, одна из граней которого параллельна P_y. Таким образом, если y — нерегулярная точка отображения f и $\|z - y\| < \varepsilon$, то $f(z)$ принадлежит замкнутому параллелепипеду $Q_{2c\varepsilon} \cap P$. Если $\varepsilon > 0$ достаточно мало, то $\varepsilon\lambda(\varepsilon) < c\varepsilon$, и $\operatorname{Vol}(Q_{2c\varepsilon} \cap P) = (2c\varepsilon)^{n-1} 2\varepsilon\lambda(\varepsilon) = 2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$.

Разобьем теперь куб Q на p^n замкнутых кубов Q_i, $i = 1, \ldots, p^n$, с длиной ребра (l/p), выбрав $p = [l\sqrt{n}/\varepsilon + 1]$ (здесь квадратные скобки означают целую часть числа). Так как $a < [a] + 1$ для всякого числа a, то $l\sqrt{n}/\varepsilon + 1 < p + 1$ и, следовательно, для длины ребра куба Q_i справедливо неравенство $(l/p) < \varepsilon/\sqrt{n}$. Так как расстояние между двумя точками куба в $\mathbb{R}^n$ с ребром r не превосходит $\sqrt{n}\,r$, то расстояние между любыми точками каждого куба Q_i меньше ε. Если некоторый куб Q_i содержит нерегулярную точку y, то для всякой точки $z \in Q_i$ имеем $\|z - y\| < \varepsilon$, поэтому точка $f(z)$, как показано выше, принадлежит некоторому замкнутому параллелепипеду объема $2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$. Множество нерегулярных значений отображения f содержится в объединении образов $f(Q_i)$ кубов Q_i, содержащих нерегулярные точки отображения f. Так как число кубов, содержащих нерегулярные точки отображения f, не превосходит p^n и образ каждого такого куба содержится в параллелепипеде объема $2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon)$, то сумма объемов параллелепипедов, содержащих нерегулярные значения, не превосходит $p^n 2^n c^{n-1} \varepsilon^n \lambda(\varepsilon) = (l\sqrt{n} + \varepsilon)^n 2^n c^{n-1} \lambda(\varepsilon)$. Последнее выражение стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, множество нерегулярных значений отображения $f\colon Q \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Покажем теперь, что множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Представим множество U в виде объединения $U = \bigcup\limits_k Q'_k$ не более чем счетного множества некоторых n-мерных замкнутых кубов Q'_k, $k = 1, 2, \ldots$ Тогда множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ есть объединение множеств нерегулярных значений отображений $f\colon Q'_k \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, каждое из которых, как показано выше, имеет меру нуль. Следовательно, множество нерегулярных значений отображения $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ имеет меру нуль.

Докажем теперь теорему для случая $n < m$.

Точки пространства $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ представим в виде (x, y), где $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_{m-n}) \in \mathbb{R}^{m-n}$. Рассмотрим C^1-отображение $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, задаваемое по правилу $F(x, y) = f(x)$. Согласно доказанному случаю теоремы множество нерегулярных значений отображения $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ имеет меру нуль. Так как $\operatorname{rank}_{(x,y)} F = \operatorname{rank}_x f < m$, то множество нерегулярных значений отображения $F\colon U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ совпадает с образом $F(U \times \mathbb{R}^{m-n})$. Для завершения доказательства остается заметить, что $F(U \times \mathbb{R}^{m-n}) = f(U)$. ■

Теорему 5 легко обобщить на случай отображений многообразий.

Определение 8. Говорят, что *подмножество A многообразия M^n имеет меру нуль* ($\operatorname{mes} A = 0$), если A можно представить в виде объединения $A = \bigcup_k A_k$ не более чем счетного числа множеств $A_1, A_2, \ldots$, где каждое A_k, $k = 1, 2, \ldots$, содержится в множестве U_k некоторой карты (U_k, φ_k) из атласа многообразия M^n, и $\varphi_k^{-1}(A_k)$ имеет меру нуль в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 6. *Пусть $f\colon M^n \to N^m$ есть C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant \max(n - m, 0) + 1$. Если $n \geqslant m$, то множество нерегулярных значений отображения f имеет меру нуль; если $n < m$, то множество $f(M^n)$ всех значений отображения f имеет меру нуль.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ — некоторые атласы многообразий M^n, N^m соответственно и x — некоторая точка M^n. Пусть $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (V_β, ψ_β) — некоторые карты атласов такие, что $x \in U_\alpha$, $f(x) \in V_\beta$ и $W(x)$ — открытая окрестность точки x такая, что $W(x) \subset U_\alpha$, $f(W(x)) \subset V_\beta$. Отображение $\psi_\beta^{-1} f \varphi_\alpha\colon \varphi_\alpha^{-1}(W(x)) \to \psi_\beta^{-1}(V_\beta)$ будет координатным представлением отображения f в окрестности точки x (и любой точки $y \in W(x)$). Рассмотрим для каждой точки $x \in M^n$ такое координатное представление отображения f в окрестности x. Система получаемых при этом множеств $\{W(x)\}_{x \in M^n}$ образует открытое покрытие M^n. Так как рассматриваемые нами многообразия имеют счетную базу, то по теореме Линделёфа (см. § 11 гл. II) покрытие $\{W(x)\}_{x \in M^n}$ содержит не более чем счетное подпокрытие $\{W(x_k)\}_{x_k \in M^n}$. Пусть

$$\psi_{\beta_k}^{-1} f \varphi_{\alpha_k}\colon \varphi_{\alpha_k}^{-1}(W(x_k)) \to \psi_{\beta_k}^{-1}(V_{\beta_k}), \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

— координатные представления отображения f в окрестностях точек x_k, $k = 1, 2, \ldots$, соответственно. Тогда множество C нерегулярных значений отображения f можно представить как объединение $C = \bigcup_k C_k$ множеств C_k нерегулярных значений отображений (8), а множество $f(M^n)$ — как объединение $f(M^n) = \bigcup_k B_k$ множеств $B_k = f(W(x_k))$ всех значений отображений (8). Если $n \geqslant m$, то в силу теоремы 5 имеем $\operatorname{mes} C_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\operatorname{mes} C = 0$; если $n < m$, то в силу теоремы 5 имеем $\operatorname{mes} B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, поэтому $\operatorname{mes} f(M^n) = 0$. ∎

Следствие. *Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant \max(n - m, 0) + 1$. Тогда множество регулярных значений отображения f всюду плотно в N^m, а в случае компактности M^n и открыто в N^m.*

Доказательство. Предположим, что множество регулярных значений отображения f не всюду плотно в N^m. Тогда существует непустое открытое множество $U \subset N^m$, не содержащее регулярных значений отображения f, т. е. U содержится в множестве C нерегулярных значений отображения f. Из теоремы 6 следует $\operatorname{mes} C = 0$, поэтому и $\operatorname{mes} U = 0$ — противоречие с тем, что непустое открытое множество имеет ненулевую меру.

Пусть теперь M^n компактно. Множество регулярных точек отображения f открыто в M^n, поэтому множество A нерегулярных точек

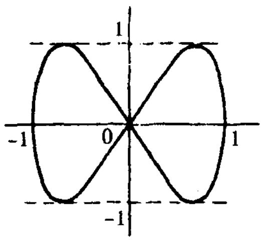

Рис. 99

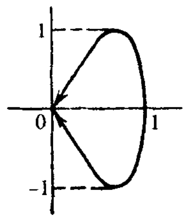

Рис. 100

отображения f замкнуто и, следовательно, компактно в компактном пространстве M^n. Тогда множество $f(A)$ нерегулярных значений отображения f также компактно (как образ компактного пространства при непрерывном отображении) и, следовательно, замкнуто в хаусдорфовом пространстве N^m. Поэтому множество $N^m \setminus f(A)$ регулярных значений отображения f открыто. ■

4. Иммерсии, субмерсии, вложения, подмногообразия. Пусть для C^r-отображения $f\colon M^n \to N^m$ C^r-многообразий, $r \geqslant 1$, каждая точка $x \in M^n$ является регулярной. Такое отображение называется: 1) *C^r-иммерсией,* если $n \leqslant m$; 2) *C^r-субмерсией,* если $n \geqslant m$.

C^r-иммерсия называется *C^r-вложением,* если f является гомеоморфизмом M^n на подпространство $f(M^n)$ топологического пространства N^m.

Пример 1. Отображение $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$, задаваемое по правилу $f(x, y) = x$, является C^∞-субмерсией.

Пример 2. Отображение $f\colon \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$, задаваемое по правилу $f(x) = (\sin x, \sin 2x)$ (рис. 99), является C^∞-иммерсией, но не является вложением, так как оно не инъективно. Отображение $f\big|_{(0,\,2\pi)}$ также не будет вложением, хотя f и биективно на $(0, 2\pi)$. В данном случае отображение f^{-1} не будет непрерывным. Заметим, что отображение $f\big|_{(0,\,\pi)}$ (рис. 100) есть C^∞-вложение.

Пример 3. Отображение $f: S^1 \to S^2$, задаваемое по правилу $f(x, y) = (x, y, 0)$ (рис. 101), является C^∞-вложением.

Пример 4. Пусть $f_1, f_2: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ — функции класса C^r.

Отображение $f = (f_1, f_2): \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ (кривая класса C^r) можно рассматривать как C^r-отображение многообразий $\mathbb{R}^1$, $\mathbb{R}^2$ с естест-

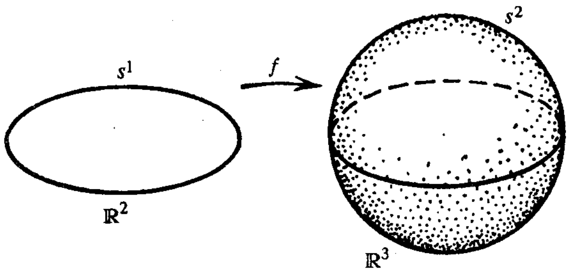

Рис. 101

венной C^∞-структурой. Выясним, при каких условиях отображение f является иммерсией. Условие иммерсии означает, что любая точка $x \in \mathbb{R}^1$ является регулярной точкой отображения

$$(1_{\mathbb{R}^2})^{-1} f 1_{\mathbb{R}^1} = f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$$

(здесь $1_{\mathbb{R}^2}$, $1_{\mathbb{R}^1}$ — тождественные отображения $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^1$), т. е.

$$\operatorname{rank}\left(\frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx}\right) = 1. \tag{9}$$

Таким образом, f является C^r-иммерсией, если производные df_1/dx, df_2/dx в нуль нигде одновременно не обращаются.

Кривая, удовлетворяющая условию (9), называется *кривой без особых точек*. Те точки, в которых не выполнено условие (9), называются *особыми точками кривой*. Например, для кривой $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x^3$ (рис. 102) точка 0 является особой.

Пример 5. Кривая, изображенная на рис. 103 (построенная с помощью графика функции $y = \sin(1/x)$), определяет C^∞-иммерсию, но не вложение полупрямой в плоскость, хотя отображение и биективно.

Другой пример подобного рода доставляет нам иммерсия $f: \mathbb{R}^1 \to \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, задаваемая формулой $f(x) = (e^{2\pi i \alpha_1 x}, e^{2\pi i \alpha_2 x})$, где α_1/α_2 иррационально. Легко проверить, что это биективное отображение (ранга 1), причем его образ лежит на торе $S^1 \times S^1$ и представляет собой всюду плотную обмотку тора.

Заметим, что существенную роль в данных примерах играла некомпактность прямой. Действительно, верна следующая теорема.

Теорема 7. *Если многообразие M^n компактно и $f\colon M^n \to N^m$ — инъективная иммерсия, то f является вложением.*

Доказательство следует из того, что инъективное непрерывное отображение $f\colon M \to N$ компактного пространства M в хаусдорфово пространство N является гомеоморфизмом на подпространство $f(M)$ (см. § 13 гл. II). ■

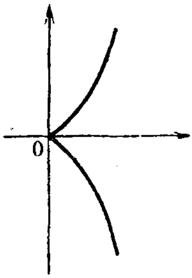

Рис. 102

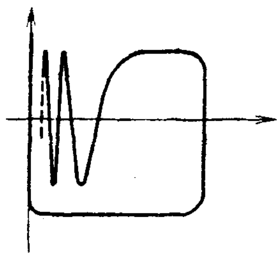

Рис. 103

Отметим, что любая C^r-иммерсия $f\colon M^n \to N^m$ является C^r-вложением на векторной окрестности каждой точки $x \in M^n$ (это следует из теоремы о выпрямлении отображения, см. § 1).

Пример 6. Отображение $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$, $N \geqslant n$, класса C^r, $r \geqslant 1$, задает иммерсию в $\mathbb{R}^N$, если

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\Big|_y = n$$

в любой точке $y \in \mathbb{R}^n$. Таким образом, f не имеет нерегулярных точек и, по теореме о выпрямлении отображения, является локальным гомеоморфизмом между $\mathbb{R}^n$ и $f(\mathbb{R}^n)$. Если, кроме того, f — гомеоморфизм $\mathbb{R}^n$ на $f(\mathbb{R}^n)$, то f есть C^r-вложение.

Упражнение 13°. Убедитесь, что понятие карты C^r-подмногообразия в $\mathbb{R}^N$ (см. § 2) эквивалентно C^r-вложению $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^N$.

Часто многообразия лежат в других объемлющих многообразиях. Было бы слишком общо называть всякое такое многообразие подмногообразием объемлющего многообразия подобно тому, как в топологическом пространстве не называют подпространством подмножество, наделенное произвольной топологией. Необходимо наложить разумные ограничения для существования простой связи между структурами вложенного и объемлющего многообразий. При этом полезным оказывается понятие вложения.

Определение 9. *Подмногообразием C^r-многообразия N^m* называют всякое подпространство M_1 в N^m, являющееся образом некоторого C^r-вложения $f: M^n \to N^m$ с C^r-структурой, индуцированной гомеоморфизмом f.

Структуры подмногообразия и многообразия оказываются связанными простым образом: для некоторого атласа $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия N^m пересечение $U_\alpha \cap M_1^n$ является (если не пусто) образом подпространства $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ при гомеоморфизме φ_α, причем сужения $\varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \to U_\alpha \cap M_1^n$ задают атлас подмногообразия M_1^n.

Таким образом, локально подмногообразие в N^m задается в соответствующих локальных координатах $\xi_1, \ldots, \xi_m$ многообразия N^m уравнениями $\xi_{n+1} = 0, \ldots, \xi_m = 0$.

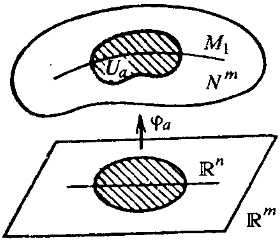

Рис. 104

Упражнение 14°. Применяя теорему о выпрямлении к координатному представлению вложения f, постройте вышеописанные атласы многообразий N^m и M_1^n.

Эту взаимосвязь структур многообразия и подмногообразия можно положить в основу понятия подмногообразия.

Определение 10. Подпространство $M_1 \subset N^m$ называется *n-мерным подмногообразием C^r-многообразия* N^m, $n \leqslant m$, если в заданной структуре многообразия N^m существует набор карт $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, $\varphi_\alpha: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \to U_\alpha$ такой, что $\varphi_\alpha(\mathbb{R}^n) = U_\alpha \cap M_1$, когда $U_\alpha \cap M_1 \neq \varnothing$, и $M_1 \subset \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$. При этом отображения $\varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \to U_\alpha \cap M_1$ задают C^r-атлас, определяющий структуру n-мерного C^r-многообразия на M_1 (рис. 104). Такую структуру на многообразии $M_1 \subset N^m$ называют структурой, согласованной со структурой многообразия N^m, или просто *структурой подмногообразия.*

Эквивалентность определений 9 и 10 очевидна.

Упражнения. 15°. Убедитесь, что $\{(U_\alpha \cap M_1, \varphi_\alpha\big|_{\mathbb{R}^n})\}$, $(U_\alpha \cap \cap M_1 \neq \varnothing)$ — C^r-атлас на M_1.

16°. Пусть M^n — C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}$ (см. § 2) и $(U(x), \varphi)$ — карта точки $x \in M^n$. Покажите, что:

1) существует C^r-диффеоморфизм $\tilde{\varphi}: \mathbb{R}^N \to \tilde{U}(x)$ пространства $\mathbb{R}^N$ на некоторую открытую в $\mathbb{R}^N$ окрестность $\tilde{U}(x)$ точки x такой, что

$$\tilde{\varphi}\big|_{\mathbb{R}^n} = \varphi; \qquad (10)$$

2) множество карт

$$\{(\tilde{U}(x), \tilde{\varphi})\}_{x \in M^n} \cup (\mathbb{R}^N, 1_{\mathbb{R}^N}) \tag{11}$$

образует C^r-атлас на $\mathbb{R}^N$ (в смысле определения 2 § 3).

Из упражнения 16° следует, что $\mathbb{R}^N$ с атласом (11) является C^r-многообразием, а M^n в силу (10) — его подмногообразием. (Это оправдывает термин «C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$», данный в § 2. Однако, если быть точнее, вместо него следовало бы употребить термин «подмногообразие C^r-многообразия $\mathbb{R}^N$».)

Пример 7. Экватор сферы S^2 (см. пример 3) является подмногообразием.

Упражнение 17°. Покажите, что график отображения $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}^1$, не является подмногообразием $\mathbb{R}^2$.

Подмногообразия, являющиеся группами Ли, возникают как образы гомоморфизмов групп Ли.

Пусть $\varphi\colon G_1 \to G_2$ — гомоморфизм групп Ли такой, что φ — иммерсия и инъекция. Тогда пара (G_1, φ) называется *подгруппой Ли группы Ли* G_2. Если при этом образ $\varphi(G_1)$ замкнут в G_2, то говорят о *замкнутой подгруппе* (G_1, φ) в G_2.

В том случае, когда $G_1 \subset G_2$ — абстрактная подгруппа группы Ли G_2 и является одновременно вложенным подмногообразием: $G_1 \xrightarrow{i} G_2$, то пара (G_1, i) с индуцированной гладкой структурой на G_1 является *подгруппой Ли* (*вложенной в* G_2).

Упражнения. 18°. Покажите, что в условиях последнего предложения G_1 является группой Ли (с индуцированной гладкой структурой из G_2).

19°. Покажите, что группы Ли $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ являются вложенными в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ подгруппами Ли. Убедитесь, что всюду плотная обмотка тора дает пример подгруппы Ли, не являющейся вложенной.

Часто многообразия возникают не как образы при некоторых отображениях, а как прообразы. Следующая важная теорема бывает полезна не только для построения новых многообразий, но и часто облегчает доказательство того, что изучаемые пространства имеют структуру многообразия.

Теорема 8. *Пусть $f\colon M^n \to N^m$ $(n \geqslant m)$ есть C^r-отображение C^r-многообразий $(r \geqslant 1)$, N_1^k — подмногообразие в N^m, состоящее только из регулярных значений отображения f. Тогда $M_1 = f^{-1}(N_1^k)$ либо пусто, либо является подмногообразием в M^n размерности $n - m + k$.*

Доказательство. Предположим, что $M_1 \neq \varnothing$. Пусть x_0 — произвольная точка M_1. Так как N_1^k — подмногообразие, то существует карта $(\tilde{V}, \psi)$ $(f(x_0) \in \tilde{V})$ из максимального атласа заданной на N^m C^r-структуры такая, что пара $(\tilde{V} \cap N_1^k, \psi|_{\mathbb{R}^k})$ является картой атласа C^r-структуры на N_1^k. Пусть (U, φ) $(x_0 \in U)$ — карта атласа C^r-структуры, заданной на M^n, такая, что $f(U) \subset \tilde{V}$. Тогда по условию $\varphi^{-1}(x_0)$ — регулярная точка отображения $\Phi = \psi^{-1} f \varphi \colon \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^m$ и по теореме о выпрямлении отображения существуют открытая окрестность $V \subset \mathbb{R}^n$ точки $\varphi^{-1}(x_0)$, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^n$ и C^r-диффеоморфизм $F\colon V \to W$ такие, что отображение ΦF^{-1} на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^n$ на $\mathbb{R}^m$. Заметим, что $\varphi(V)$ — открытая окрестность в M^n точки x_0 и пара $(\varphi(V), \varphi F^{-1})$ является картой максимального атласа C^r-структуры, заданной на M^n. Так как ΦF^{-1} — стандартная проекция, а множество

$$\psi^{-1} f(\varphi(V) \cap M_1) \subset \mathbb{R}^m$$

состоит из точек вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$, то множество

$$F\varphi^{-1}(\varphi(V) \cap M_1) \subset \mathbb{R}^n$$

состоит из точек вида $(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-m+k}$. Таким образом, карта $(\varphi(V), \varphi F^{-1})$ в M^n обладает свойством

$$(\varphi F^{-1})(\mathbb{R}^{n-m+k} \cap W) = \varphi(V) \cap M_1.$$

Такую карту можно построить для любой точки $x_0 \in M_1$. Это и доказывает, что M_1 является подмногообразием в M^n размерности $n - m + k$. ∎

Пример 8. Из теоремы 8, в частности, вытекает, что прообраз регулярного значения отображения $f\colon M^n \to N^m$ либо пуст, либо является подмногообразием в M^n размерности $n - m$.

Следующий фундаментальный факт решает принципиальный вопрос теории многообразий.

Теорема 9 (Уитни). *Для всякого C^r-многообразия M^n, $r \geqslant 1$, существует C^r-вложение M^n в $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Мы докажем теорему только в предположении, что M^n компактно и $r \geqslant 2$, общий случай требует более тонкого анализа.

Вначале установим более слабое утверждение.

Теорема 10. *Для всякого компактного C^r-многообразия M^n, $r \geqslant 1$, существует C^r-вложение M^n в пространство $\mathbb{R}^N$ некоторой размерности N.*

Доказательство. Пусть $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ — некоторый C^r-атлас многообразия M^n. Согласно лемме 3 § 4 для всякой точки

$y \in U_\alpha$ существуют открытые окрестности $V_{\alpha,1}(y)$, $V_{\alpha,2}(y)$ и C^r-функция $f_{\alpha,y}$: $M^n \to [0, 1]$ такие, что:

1) $\overline{V}_{\alpha,1}(y) \subset V_{\alpha,2}(y) \subset U_\alpha$,

2) $f_{\alpha,y}(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{V}_{\alpha,1}(y), \\ 0, & \text{если } x \in M^n \setminus V_{\alpha,2}(y), \end{cases}$

причем $f_{\alpha,y}(x) < 1$, если $x \notin \overline{V}_{\alpha,1}(y)$. Рассмотрим для каждой точки $y \in U_\alpha$ каждого множества U_α, $\alpha \in I$, открытые окрестности $V_{\alpha,1}(y)$, $V_{\alpha,2}(y)$ и C^r-функцию $f_{\alpha,y}$ с указанными свойствами. Система множеств $\{V_{\alpha,1}(y)\}_{\alpha \in I,\, y \in U_\alpha}$ образует открытое покрытие M^n. В силу компактности M^n это покрытие содержит конечное подпокрытие $\{V_{\alpha_1,1}(y_1), \ldots, V_{\alpha_k,1}(y_k)\}$.

Рассмотрим отображение ψ_i: $M^m \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, k$:

$$\psi_i(x) = \begin{cases} f_{\alpha_i, y_i}(x) \cdot \varphi_{\alpha_i}^{-1}(x), & \text{если } x \in U_{\alpha_i}, \\ 0, & \text{если } x \notin U_{\alpha_i}. \end{cases}$$

Очевидно, $\psi_i \in C^n$, $i = 1, \ldots, k$. Отображения $\psi_1, \ldots, \psi_k$, $f_{\alpha_1, y_1}, \ldots$ $\ldots, f_{\alpha_k, y_k}$ задают C^r-отображение $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_k, f_{\alpha_1, y_1}, \ldots, f_{\alpha_k, y_k})$: $M^n \to \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1 \times \ldots \times \mathbb{R}^1 = \mathbb{R}^{k(n+1)}$. Покажем, что ψ — иммерсия. Пусть z — некоторая точка M^n, тогда z принадлежит некоторому множеству $V_{\alpha_i 1}(y_i)$ подпокрытия. Так как $f_{\alpha_i, y_i}(x) = 1$ для $x \in V_{\alpha_i 1}(y_i)$, то матрица Якоби $\left(\frac{\partial(\psi\varphi_{\alpha_i})}{\partial x}\right)\Big|_z$ отображения $\psi\varphi_{\alpha_i}$ содержит единичную матрицу

$$\left(\frac{\partial((f_{\alpha_i, y_i} \cdot \varphi_{\alpha_i}^{-1})\varphi_{\alpha_i})}{\partial x}\right)\Bigg|_z = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

размера $n \times n$. Следовательно, $\operatorname{rank}_z \psi\varphi_{\alpha_i} = n$ и ψ — иммерсия. Покажем теперь, что ψ инъективно. Пусть $z' \in M^n$ и $z' \neq z$. Если $z' \in \overline{V}_{\alpha_i, 1}(y)$, то $\varphi_{\alpha_i}(z) \neq \varphi_{\alpha_i}(z')$ (так как φ_{α_i} — гомеоморфизм) и $f_{\alpha_i, y_i}(z) = f_{\alpha_i, y_i}(z') = 1$, поэтому $\psi(z) \neq \psi(z')$. Если $z' \notin \overline{V}_{\alpha_i, 1}(y_i)$, то $f_{\alpha_i, y_i}(z) \neq f_{\alpha_i, y_i}(z')$, и, следовательно, $\psi(z) \neq \psi(z')$. Таким образом, ψ: $M^n \to \mathbb{R}^{k(n+1)}$ — инъективная иммерсия. Так как M^n компактно, то по теореме 7 ψ — вложение. ■

Докажем теперь теорему 9.

В силу теоремы 10 можно считать, что C^r-многообразие M^n является C^r-подмногообразием некоторого пространства $\mathbb{R}^N$. Если $N \leqslant 2n + 1$, то утверждение доказано. Пусть $N > 2n + 1$. Покажем, что в этом случае существует проекция $\mathrm{pr}_e\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{N-1}$ на подпространство $\mathbb{R}^{N-1} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}^N$ параллельно некоторому вектору $e \in \mathbb{R}^N$, которая будет вложением M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. Будем искать e среди векторов единичной сферы S^{N-1}. Докажем сначала, что существуют проекции, инъективно отображающие M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. При проектировании M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$ параллельно вектору e инъективность нарушается тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in M^n$, $x \neq y$, такие, что вектор $x - y$ параллелен e. Таким образом, инъективность проекции $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет обеспечена, если будет выполнено условие

$$e \neq \frac{x-y}{\|x-y\|}, \qquad x, y \in M^n, \quad x \neq y. \tag{12}$$

Покажем, что векторы e, удовлетворяющие условию (12), существуют. Рассмотрим подмножество $K = (M^n \times M^n)\setminus\Delta$ произведения $M^n \times M^n$ (здесь $\Delta = \{(x, x)\colon x \in M^n\}$ — диагональ). Так как M^n хаусдорфово, то K открыто в $M^n \times M^n$, и, следовательно, является C^r-многообразием размерности $2n$. Рассмотрим C^r-отображение $f\colon K^{2n} \to S^{N-1}$, $f(x, y) = (x-y)/\|x-y\|$. Вектор $e \in S^{N-1}$ в том и только том случае удовлетворяет условию (12), если он не принадлежит образу $f(K^{2n})$. Так как $2n < N-1$, то согласно теореме 6 множество $f(K^{2n})$ имеет меру нуль в S^{N-1}, поэтому $S^{N-1}\setminus f(K^{2n}) \neq \varnothing$.

Покажем теперь, что существуют проекции, осуществляющие иммерсию M^n в $\mathbb{R}^{N-1}$. Так как M^n компактно, то существуют C^r-карты $(U_1, \varphi_1), \ldots, (U_s, \varphi_s)$ в M^n такие, что $\bigcup_{i=1}^{s} U_i = M^n$. Пусть x — некоторая точка M^n и (U_k, φ_k) — C^r-карта в M^n, $x \in U_k$. Для того чтобы проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ была иммерсией в точке x, необходимо и достаточно, чтобы подпространство $(D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n)$ (образ при линейном отображении $D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$) не теряло размерности при проекции pr_e; это эквивалентно тому, что $e \notin (D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет иммерсией в каждой точке $x \in U_k$, если выполнено условие

$$e \notin \bigcup_{x \in U_k} (D_{\varphi_k^{-1}(x)}\varphi_k)(\mathbb{R}^n). \tag{13}$$

Покажем, что векторы e, удовлетворяющие условию (13), существуют. Рассмотрим подмножество $L = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n\setminus 0)$ произведения

$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Так как L открыто в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то является C^∞-многообразием размерности $2n$. Рассмотрим отображение $g_k(y, z)\colon L^{2n} \to \mathbb{R}^N$, $g_k(y, z) = (D_y \varphi_k)(z)$. Так как для всякой точки $y \in \mathbb{R}^n$ $\operatorname{rank}_y \varphi_k = n$, то $\ker D_y \varphi_k = \{0\}$ и, следовательно, $g_k(y, z) \neq 0$. Поэтому можно рассмотреть отображение

$$h_k(y, z)\colon L^{2n} \to S^{N-1}, \quad h_k(y, z) = g_k(y, z)/\|g_k(y, z)\|.$$

Очевидно, $h_k \in C^{r-1}$. Вектор $e \in S^{N-1}$ тогда и только тогда удовлетворяет условию (13), когда он не принадлежит образу $h_k(L^{2n})$. Так как $2n < N - 1$, то согласно теореме 6 множество $h_k(L^{2n})$ имеет меру нуль в S^{N-1}. Так как $\bigcup\limits_{i=1}^{s} U_i = M^n$, то $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет иммерсией в каждой точке $X \in M^n$, если $e \notin \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n})$. Поскольку объединение конечного числа множеств меры нуль есть множество меры нуль, $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n}) = 0$, и поэтому $S^{N-1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n}) = \varnothing$.

Далее, множество $H = (f(K^{2n})) \cup \left(\bigcup\limits_{i=1}^{s} h_i(L^{2n})\right)$ имеет меру нуль в S^{N-1}, поэтому $S^{N-1} \setminus H \neq \varnothing$. Для всякого вектора $e \in S^{N-1} \setminus H$ проекция $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$ будет инъективной C^r-иммерсией. Так как M^n компактно, то по теореме 7 проекция pr_e будет C^r-вложением.

Мы показали, что если $N > 2n + 1$, то существует C^r-вложение $\mathrm{pr}_e\colon M^n \to \mathbb{R}^{N-1}$. Если, далее, $N - 1 > 2n + 1$, то существует проекция, осуществляющая C^r-вложение образа $\mathrm{pr}_e(M^n)$ в $\mathbb{R}^{N-2}$. Процесс вложения в пространство меньшей размерности можно продолжать до тех пор, пока размерность пространства не станет равной $2n + 1$. Суперпозиция проекций будет C^r-вложением M^n в $\mathbb{R}^{2n+1}$. ■

Замечание 3. При некоторых ограничениях на многообразия и их размерности теорема 9 может быть усилена. В частности, при $n \geqslant 1$ C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 1$, допускает C^r-вложение в $\mathbb{R}^{2n}$ (Уитни) и даже в $\mathbb{R}^{2n-1}$, если M^n некомпактно (Хирш) или $n \neq 2^k$.

Теорему 9 можно сформулировать иначе: *всякое C^r-многообразие M^n C^r-диффеоморфно подмногообразию пространства $\mathbb{R}^{2n+1}$.*

Так как мы условились не различать диффеоморфных многообразий, то из теоремы 9 видно, что абстрактное понятие многообразия не шире, чем понятие подмногообразия в евклидовых пространствах, и можно было бы ограничиться только их рассмотрением. Однако это не всегда целесообразно. Многие задачи о многообразиях проще решаются без привлечения вложения.

5. Степень отображения по модулю 2. Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — некоторое C^r-отображение C^r-многообразий, $r \geqslant 1$. Пусть, кроме того, M^n компактно. Если $y \in N^n$ — регулярное значение отображения f, то $f^{-1}(y)$ является подмногообразием в M^n нулевой размерности или пусто. Подмногообразие $f^{-1}(y)$ компактно как замкнутое подмножество компактного пространства M^n и, следовательно, состоит из конечного числа точек $n(f^{-1}(y))$ (если $f^{-1}(y) = \varnothing$, то $n(f^{-1}(y)) = 0$). Покажем, что если N^n связно и $r \geqslant 2$, то класс вычетов mod 2 числа $n(f^{-1}(y))$ не зависит от выбора регулярного значения $y \in N^n$ отображения f. Этот класс вычетов называется *степенью отображения f mod 2* и обозначается $\deg_2 f$.

Приведем вначале необходимые понятия.

Определение 11. C^r-отображения $f, g\colon M^n \to N^m$ C^r-многообразий, $r \geqslant 0$, называются *C^r-гомотопными*, если существует C^r-отображение $F(x, t)\colon M^n \times [0, 1] \to N^m$ такое, что $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ для всех $x \in M^n$.

Упражнения. 20°. Убедитесь, что произведение $M^n \times [0, 1]$, где M^n — C^r-многообразие, является C^r-многообразием с краем, причем его край состоит из двух экземпляров, $M^n \times 0$ и $M^n \times 1$, многообразия M^n.

21°. Покажите, что C^r-гомотопия является отношением эквивалентности на множестве $C^r(M^n, N^m)$ всех C^r-отображений C^r-многообразий M^n, N^m.

Определение 12. C^r-диффеоморфизмы $f, g\colon M^n \to N^n$ C^r-многообразий, $r \geqslant 0$, называются *C^r-изотопными*, если существует C^r-гомотопия $F(x, t)\colon M^n \times [0, 1] \to N^n$ между f и g такая, что при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ отображение $F(x, t)$ является C^r-диффеоморфизмом.

Докажем предварительно вспомогательные утверждения (леммы 2—5).

Лемма 2. *Пусть y, z — произвольные диаметрально противоположные точки окружности $S^1_{r/2}(0) \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм $h\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному отображению I, такой, что $h(y) = z$ и $h(x) = x$, если $x \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_r(0)$.*

Доказательство. Согласно лемме 2 § 4 существует C^∞-функция g_r: $\mathbb{R}^n \to [0, 1]$ такая, что

$$g_r(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in \overline{D}^n_{r/2}(0), \\ 0, & \text{если } x \in \mathbb{R}^n \setminus D^n_r(0), \end{cases}$$

причем $g_r(x)$ постоянна на сферах $S^{n-1}_\rho(0)$. Нетрудно видеть, что отображение h: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$h(x) = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos(\pi g_r(x)) & -\sin(\pi g_r(x)) & & 0 & \\ \sin(\pi g_r(x)) & \cos(\pi g_r(x)) & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

будет требуемым C^∞-диффеоморфизмом, а C^∞-гомотопия $F(x, t)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$,

$$F(x, t) = \left(\begin{array}{cc|ccc} \cos(t\pi g_r(x)) & -\sin(t\pi g_r(x)) & & 0 & \\ \sin(t\pi g_r(x)) & \cos(t\pi g_r(x)) & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

изотопно соединяет I и h (отображение $F(x, t)$ при каждом фиксированном $t \in [0, 1]$ осуществляет поворот диска $\overline{D}^n_{r/2}(0)$ на угол πt параллельно плоскости $\mathbb{R}^2$, а на сферах $S^{n-1}_\rho(0)$, $r/2 \leqslant \rho \leqslant r$, осуществляет поворот на угол $t\pi g_r(x)$). ■

Лемма 3. *Пусть y, z — произвольные точки $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Тогда существует C^∞-диффеоморфизм $\tilde{h}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $\tilde{h}(y) = z$ и $\tilde{h}(x) = x$ вне некоторого диска $D^n_\nu(0)$.*

Доказательство. Пусть $\|y - z\| = r$. Преобразование $A(x) = x - (y + z)/2$ переводит точки y, z в диаметрально противоположные точки сферы $S^{n-1}_{r/2}(0)$. Пусть B: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — какое-нибудь вращение, переводящее вектор $(y - z)/2$ в подпространство $\mathbb{R}^2$. Тогда $BA(y)$, $BA(z)$ — диаметрально противоположные точки окружности $S^1_{r/2}(0)$. Согласно лемме 2 существует C^∞-диффеоморфизм h:

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $h(BA(y)) = BA(z)$ и $h(x) = x$, если $x \in \mathbb{R}^n \backslash D_r^n(0)$. Тогда отображение $\tilde{h} = (BA)^{-1}h(BA)$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ будет требуемым диффеоморфизмом, и если $H(x, t)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и h, то $\tilde{H} = (BA)^{-1}H(BA)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и $\tilde{h}$. ■

Лемма 4. *Пусть y, z — произвольные точки связного C^r-многообразия N^n, $n > 0$, $r \geqslant 0$. Тогда существует C^r-диффеоморфизм d: $N^n \to N^n$, C^r-изотопный тождественному, такой, что $d(y) = z$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $n \geqslant 2$ и y, z принадлежат множеству U какой-нибудь карты (U, φ) атласа многообразия N^n. Согласно лемме 3 существует C^∞-диффеоморфизм $\tilde{h}$: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, C^∞-изотопный тождественному, такой, что $\tilde{h}(\varphi^{-1}(y)) = \varphi^{-1}(z)$ и $\tilde{h}(x) = (x)$ вне некоторого диска $D_\nu^n(0)$. Тогда, как нетрудно видеть, отображение d: $N^n \to N^n$,

$$d(x) = \begin{cases} \varphi\tilde{h}\varphi^{-1}(x), & \text{если } x \in U, \\ x, & \text{если } x \in N^n \backslash U, \end{cases}$$

будет требуемым C^r-диффеоморфизмом, и если $\tilde{H}(x, t)$: $\mathbb{R}^n \times [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ — C^∞-изотопия, соединяющая I и $\tilde{h}$, то $F(x, t)$: $N^n \times [0, 1] \to N^n$,

$$F(x, t) = \begin{cases} \varphi\tilde{H}\varphi^{-1}, & \text{если } x \in U, \\ x, & \text{если } x \in N^n \backslash U, \end{cases}$$

есть C^r-изотопия, соединяющая I и d.

Пусть теперь y, z не принадлежат множеству одной карты. Тогда в силу связности N^n существует «цепочка» карт, соединяющих y, z, т. е. существуют карты $(U_i \varphi_i)$, $i = 1, \ldots, k$, в N^n такие, что $y \in U_1$, $z \in U_k$ и $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, k-1$. В каждом из множеств $U_i \cap U_{i+1}$, $i = 1, \ldots, k-1$, выберем произвольную точку u_i. Тогда пары точек (y_1, u_1), (u_1, u_2), $\ldots$, (u_{k-2}, u_{k-1}), (u_{k-1}, z) будут принадлежать множествам $U_1, \ldots, U_k$ соответственно и, следовательно, существуют C^r-диффеоморфизмы d_i: $N^n \to N^n$, $i = 1, \ldots, k$, C^r-изотопные тождественному, такие, что $d_1(y) = u_1$, $d_2(u_1) = u_2, \ldots$ $\ldots, d_{k-1}(u_{k-2}) = u_{k-1}$, $d_k(u_{k-1}) = z$. Диффеоморфизм $d = d_k d_{k-1} \ldots d_1$: $N^n \to N^n$, очевидно, будет искомым.

Таким образом, в случае $n \geqslant 2$ лемма доказана. В справедливости утверждения леммы при $n = 1$ предлагаем читателю убедиться самостоятельно. ■

Лемма 5. *Пусть $f: M^{n+1} \to N^n$ — некоторое C^r-отображение компактного C^r-многообразия с краем M^{n+1} в C^r-многообразие N^n, $r \geq 1$. Если y_0 — регулярное значение отображения f, то $M_1 = f^{-1}(y_0)$ либо пусто, либо является одномерным компактным C^r-многообразием с краем, причем $\partial M_1 = M_1 \cap \partial M^{n+1}$.*

Доказательство. Утверждение леммы о компактности M_1 следует из того, что M_1 замкнуто (как прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении) в компактном пространстве M^{n+1}. Докажем основное утверждение леммы. Так как $L = M^{n+1} \setminus \partial M^{n+1}$ есть $(n+1)$-мерное C^r-многообразие, то в силу теоремы 8 для отображения $f\big|_{L^{n+1}}: L^{n+1} \to N^n$ множество $(f\big|_{L^{n+1}})^{-1}(y_0) = M_1 \cap L^{n+1}$ либо пусто, либо является одномерным подмногообразием в L^{n+1}. Поэтому если $M_1 \cap \partial M^{n+1} = \varnothing$, то утверждение леммы доказано (в этом случае $\partial M_1 = \varnothing$). Рассмотрим случай $M_1 \cap \partial M^{n+1} \neq \varnothing$. Для точек множества $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ построим карты, C^r-согласованные друг с другом и с картами подмногообразия $M_1 \cap L^{n+1}$.

По условию y_0 — регулярное значение отображения $f\big|_{\partial M^{n+1}}: \partial M^{n+1} \to N^n$, кроме того, ∂M^{n+1} компактно. Поэтому, как показано в начале пункта, множество $(f\big|_{\partial M^{n+1}})^{-1}(y_0) = M_1 \cap \cap \partial M^{n+1}$ конечно. Пусть x_0 — произвольная точка $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ и (U, φ), (V, ψ) — карты в M^{n+1} и N^n такие, что $x_0 \in U$, $y_0 \in V$ и $f(U) \subset V$. Кроме того, выберем U так, чтобы x_0 была единственной точкой множества $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ в U (это возможно, так как множество $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ конечно). По условию $z_0 = \varphi^{-1}(x)$ — регулярная точка отображения $\Phi = \psi^{-1} f \varphi: \mathbb{R}^{n+1}_{+} \to \mathbb{R}^n$, т. е. существует открытая в $\mathbb{R}^{n+1}$ окрестность W_1 точки z_0 и C^r-отображение $\tilde{\Phi}: W_1 \to \mathbb{R}^n$, совпадающее на множестве $W_1 \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+}$ с Φ, такое, что z_0 — регулярная точка отображений $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{\Phi}\big|_{W_1 \cap \mathbb{R}^n}$. По теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) существуют открытая окрестность $W_2 \subset W_1$ точки z_0, открытое множество $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и C^r-диффеоморфизм $F: W_2 \to W$ такие, что $\tilde{\Phi} F^{-1}$ на множестве W является стандартной проекцией $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$. Пусть $\tilde{W} = D^{n+1}_{\varepsilon}(u_0)$ — некоторый открытый диск с центром в точке $u_0 = F(z_0)$, содержащийся в W. Обозначим $W_2 = F^{-1}(\tilde{W})$, $\tilde{U} = \varphi(\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^{n+1}_{+})$. Будем рассматривать теперь сужения отображений $F, \tilde{\Phi}, \varphi$ на множества

$\tilde{W}_2$, $\tilde{W}_2$, $\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^{n+1}_+$ соответственно, сохранив для них прежние обозначения F, $\tilde{\Phi}$, φ. Так как $\tilde{\Phi}F^{-1}$ на множестве $\tilde{W}$ является стандартной проекцией $\mathbb{R}^{n+1}$ на $\mathbb{R}^n$, то прообраз точки $\psi^{-1}(y_0)$ при отображении $\tilde{\Phi}F^{-1}$ — это интервал I, получаемый при пересечении диска $\tilde{W}$ с прямой, проходящей через точку u_0 и параллельной вектору $(0, \ldots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Точка u_0 разбивает интервал I на два полуинтервала, I_1, I_2, с общим концом u_0.

Множество $F\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1)$, очевидно, содержится в I; покажем, что оно совпадает с одним из полуинтервалов I_1, I_2. Для этого докажем эквивалентное утверждение, что множество $\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1)$ совпадает с одним из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$. Поскольку $\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1) \subset \mathbb{R}^{n+1}_+ \cap F^{-1}(I)$, то достаточно показать, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. Покажем сначала, что каждое из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержится в одном из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. В силу выбора окрестности U имеем $\tilde{U} \cap M_1 \cap \partial M^{n+1} = \{x_0\}$, следовательно, $\tilde{\Phi}^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = z_0 \in \mathbb{R}^n$. Но $\tilde{\Phi}^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = F^{-1}(u_0)$, значит, пересечение каждого из множеств $F^{-1}(I_1 \backslash u_0)$, $F^{-1}(I_2 \backslash u_0)$ с пространством $\mathbb{R}^n$ пусто. Поэтому, если бы множества $F^{-1}(I_1 \backslash u_0)$, $F^{-1}(I_2 \backslash u_0)$ имели непустое пересечение с каждым из открытых полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+ \backslash \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}_- / \mathbb{R}^n$, то были бы несвязны, в противоречии с тем, что образы связных множеств I_1, I_2 при непрерывном отображении F^{-1} связны (см. § 10 гл. II).

Покажем теперь, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$. Рассмотрим $F^{-1}(I)$ как гладкую кривую, задаваемую диффеоморфизмом $F^{-1}\colon I \to \mathbb{R}^{n+1}$; обозначим ее $z = z(t)$, $t = u_{n+1}$, $t_0 = u_0$. Так как $\tilde{\Phi}^{-1}(\psi^{-1}(y_0)) = F^{-1}(I)$, то $\tilde{\Phi}(z(t)) \equiv \psi^{-1}(y_0)$ при $t \in I$. Дифференцируя последее равенство, получим $(D_{z_0}\tilde{\Phi})\left(\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{t_0} = 0$, т. е. вектор $a = \left(\frac{dz}{dt}\right)\Big|_{t_0}$ принадлежит ядру $\ker D_{z_0}\tilde{\Phi}$. Поскольку

$$a = \left(\frac{\partial F_1^{-1}}{\partial u_{n+1}}\bigg|_{u_0}, \ldots, \frac{\partial F_{n+1}^{-1}}{\partial u_{n+1}}\bigg|_{u_0}\right)$$

и диффеоморфизм F^{-1} не имеет особых точек, то $a \neq 0$. Очевидно, $a \notin \mathbb{R}^n$, так как в противном случае $a \in \ker (D_{z_0}\tilde{\Phi})\big|_{\mathbb{R}^n} =$

$= \ker D_{z_0}(\tilde{\Phi}\big|_{\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^n})$, что противоречит тому, что z_0 — регулярная точка отображения $\tilde{\Phi}\big|_{\tilde{W}_2 \cap \mathbb{R}^n}$. Таким образом, касательный вектор a к кривой $z = z(t)$ в точке z_0 направлен в одно из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$, поэтому кривая пересекает $\mathbb{R}^n$ в точке z_0, переходя из одного полупространства в другое. Следовательно, множество $F^{-1}(I) = F^{-1}(I_1) \cup F^{-1}(I_2)$ имеет непустое пересечение с каждым из открытых полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+ \backslash \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^{n+1}_- \backslash \mathbb{R}^n$. Отсюда, учитывая, что каждое из множеств $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержится в одном из полупространств $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$, получаем, что множества $F^{-1}(I_1)$, $F^{-1}(I_2)$ содержатся в разных полупространствах $\mathbb{R}^{n+1}_+$, $\mathbb{R}^{n+1}_-$.

Итак, множество $F\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1)$ совпадает с I_1 или I_2. Пусть, например, $F\varphi^{-1}(\tilde{U} \cap M_1) = I_1$. Тогда, если $g\colon \mathbb{R}^1_+ \to I_1$ — некоторый C^r-диффеоморфизм, то $\varphi F^{-1} g\colon \mathbb{R}^1_+ \to \tilde{U} \cap M_1$ — гомеоморфизм и $\varphi F^{-1} g(0) = x_0$, следовательно, $(\tilde{U} \cap M_1, \varphi F^{-1} g)$ — карта точки x_0 в M_1. Построенные таким образом карты для разных точек множества $M_1 \cap \partial M^{n+1}$ C^r-согласованы друг с другом и с картами подмногообразия $M_1 \cap L$, так как их гомеоморфизмы получены из гомеоморфизмов карт C^r-атласа на M^{n+1} суперпозицией с C^r-дифеоморфизмами. Таким образом, M_1 — одномерное C^r-многообразие с краем и $\partial M_1 = M_1 \cap \partial M^{n+1}$. ■

Докажем теперь независимость степени отображения по модулю 2 от выбора регулярного значения.

Лемма 6. *Пусть f, g: $M^n \to N^n$ — C^2-гомотопные C^2-отображения C^2-многообразий, причем M^n компактно. Если $y \in N^n$ — регулярное значение для f и g, то $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$.*

Доказательство. Пусть $F\colon M^n \times [0, 1] \to N^n$ — C^2-гомотопия, соединяющая f и g. Предположим сначала, что y является регулярным значением и для F. Если $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y) = \varnothing$, то утверждение леммы очевидно, так как $n(f^{-1}(y)) = n(g^{-1}(y)) = 0$. Рассмотрим случай непустого множества $f^{-1}(y) \cup g^{-1}(y)$. В силу леммы 5 множёство $M_1 = F^{-1}(y)$ является одномерным компактным многообразием с краем, причем $\partial M_1 = M_1 \cap ((M^n \times 0) \cup (M^n \times 1)) = (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)$. Тогда компоненты связности M_1 компактны (как замкнутые множества компактного пространства) и, следовательно, гомеоморфны S^1 или $\overline{D}^1$ (см. п. 2). Таким образом, край каждой компоненты связности M^1 состоит из четного числа точек. Так как край $\partial M_1 = (f^{-1}(y) \times 0) \cup (g^{-1}(y) \times 1)$ представляет собой объединение краев связных компонент и множества $f^{-1}(y)$, $g^{-1}(y)$ конечны (см. начало пункта), то число $n(f^{-1}(y)) + n(g^{-1}(y))$ точек края ∂M_1 четно, поэтому $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$.

Предположим теперь, что y не является регулярным значением отображения F. Покажем, что существует открытая окрестность точки y, для каждой точки y' которой справедливы равенства $n(f^{-1}(y')) = n(f^{-1}(y))$, $n(g^{-1}(y')) = n(g^{-1}(y))$. Пусть, например, $f^{-1}(y) = \{x_1, \ldots, x_k\}$. По теореме об обратном отображении существуют открытые окрестности $U(x_i)$, $U_i(y)$, $i = 1, \ldots, k$, точек $x_1, \ldots, x_k$, y такие, что отображения $f\big|_{U(x_i)} : U(x_i) \to U_i(y)$, $i = 1, \ldots, k$, являются C^2-диффеоморфизмами. Не ограничивая общности, можно считать, что окрестности $U(x_1), \ldots, U(x_k)$ не пересекаются. Множество $M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$ замкнуто в M^n и, значит, компактно, следовательно, его образ $f\left(M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)\right)$ при непрерывном отображении f компактен в N^n и поэтому замкнут в хаусдорфовом пространстве N^n. Тогда $U(y) = \bigcap_{i=1}^{k} U_i(y) \setminus f\left(M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)\right)$ — открытая окрестность точки y и $f^{-1}(y') \subset \bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)$ для всякой точки $y' \in U(y)$, следовательно, $n(f^{-1}(y')) = n(f^{-1}(y))$. Аналогичным образом, существует открытая окрестность $V(y)$ точки y, для каждой точки y' которой справедливо равенство $n(g^{-1}(y')) = n(g^{-1}(y))$. Окрестность $W(y) = U(y) \cap V(y)$, очевидно, будет требуемой. Отметим, что все точки окрестности $W(y)$ будут регулярными точками отображений f, g Далее, множество нерегулярных значений отображения F совпадает с объединением множеств нерегулярных значений отображений $F\big|_{(M^n \times [0,1]) \setminus \partial M^n \times [0,1]}$, $F\big|_{\partial(M^n \times [0,1])}$. Каждое из последних множеств согласно теореме 6 имеет меру нуль. Поэтому в окрестности $W(y)$ найдется регулярное значение y_0 отображения F. Таким образом, y_0 — регулярное значение отображений f, g, F и, как показано выше, $n(f^{-1}(y_0)) \equiv n(g^{-1}(y_0)) \bmod 2$. Но $n(f^{-1}(y_0)) = n(f^{-1}(y))$; $n(g^{-1}(y_0)) = n(g^{-1}(y))$, следовательно, $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$. ■

Теорема 11. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ — C^2-отображение C^2-многообразий, причем M^n копактно, а N^n связно. Если y, z — регулярные значения отображения f, то $n(f^{-1}(y)) \equiv n(f^{-1}(z)) \bmod 2$.*

Доказательство. В силу леммы 4 существует C^2-диффеоморфизм $d\colon N^n \to N^n$, C^2-изотопный тождественному, такой, что $d(y) = z$. Тогда z — регулярное значение C^2-отображения $df\colon M^n \to N^n$ и df C^2-гомотопно f. Согласно лемме 6 $n(f^{-1}(z)) \equiv \equiv n((df)^{-1}(z)) \bmod 2$. Но $(df)^{-1}(z) = f^{-1}d^{-1}(z) = f^{-1}(y)$, поэтому $n(f^{-1}(y)) \equiv n(f^{-1}(z)) \bmod 2$. ■

Таким образом, степень отображения по модулю 2 не зависит от выбора регулярного значения.

Теорема 12. *Пусть f, $g\colon M^n \to N^n$ — C^2-гомотопные C^2-отображения C^2-многообразий, причем M^n компактно, а N^n связно. Тогда* $\deg_2 f = \deg_2 g$.

Доказательство. Согласно теореме 6 множества нерегулярных значений отображений f, g имеют меру нуль, поэтому можно выбрать регулярное значение y, общее для f и g. В силу леммы 6 $n(f^{-1}(y)) \equiv n(g^{-1}(y)) \bmod 2$, откуда $\deg_2 f = \deg_2 g$. ■

Пример 9. Если M^n — компактное связное C^2-многообразие и $f\colon M^n \to M^n$ — постоянное отображение, т. е. $f(x) = x_0$ для всех $x \in M^n$, то при $n > 0$ $\deg_2 f = 0$, а при $n = 0$ $\deg_2 f = 1$.

Пример 10. Если M^n — компактное связное C^2-многообразие, $n \geqslant 0$ и $I\colon M^n \to M^n$ — тождественное отображение, то $\deg_2 I = 1$.

Замечание 4. Из примеров 9, 10 и теоремы 12 следует, что тождественное отображение компактного связного C^2-многообразия M^n не C^2-гомотопно постоянному отображению при $n > 0$.

Замечание 5. Предыдущие построения степени отображения по модулю 2 использовали компактность многообразия M^n, в частности, для обеспечения компактности прообразов одноточечных множеств при отображениях многообразий и при гомотопиях. В приложениях бывает удобно освободиться от требования компактности M^n. С этой целью можно рассмотреть класс отображений, априори обладающий свойством компактности прообраза.

Определение 13. Отображение $f\colon X \to Y$ топологических пространств называется *собственным* (сокращенно c-отображением), если прообраз $f^{-1}(A)$ компактен для всякого компактного множества $A \subset Y$.

Нетрудно видеть, что в классе c-отображений многообразий и их c-гомотопий лемма 6 и теоремы 11, 12 верны без условия компактности многообразия M^n. Таким образом, для собственных C^r-отображений C^r-многообразия M^n в связное C^r-многообразие N^n, $r \geqslant 2$, корректно определена степень по модулю 2.

В качестве приложения степени отображения по модулю 2 докажем классическую теорему Брауэра о неподвижной точке.

Лемма 7. *Не существует C^2-отображения $f\colon \bar{D}^n \to S^{n-1}$, оставляющего неподвижной каждую точку сферы S^{n-1} (т. е. сфера S^{n-1} не является «гладким ретрактом» шара $\bar{D}^n$).*

Доказательство. Предположим противное, пусть $f\colon \bar{D}^n \to S^{n-1}$ — C^2-отображение и $f(x) = x$ для всякой точки $x \in S^{n-1}$. Тогда отображение $F\colon S^{n-1}\,[0, 1] \to S^{n-1}$, задаваемое равенством $F(x, t) = f(tx)$, будет C^2-гомотопией, соединяющей тождественное отображение сферы с постоянным отображением сферы в точку $f(0) \in S^{n-1}$, что невозможно при $n > 1$ в силу замечания 4. В случае $n = 1$ множество $f(\bar{D}^1) = S^0$ несвязно, что противоречит связности образа при непрерывном отображении топологических пространств. ■

Несуществование ретракции $\bar{D}^n \to S^{n-1}$ приводит к принципу неподвижной точки (см. § 4 гл. III).

Лемма 8. *Всякое C^2-отображение $f\colon \bar{D}^n \to \bar{D}^n$ имеет неподвижную точку $x_* \in D^n$, $f(x_*) = x_*$.*

Доказательство. Предположим, что некоторое C^2-отображение $f\colon \bar{D}^n \to \bar{D}^n$ не имеет неподвижных точек. Рассмотрим отображение $G\colon \bar{D}^n \to \bar{D}^n$, сопоставляющее каждой точке $x \in \bar{D}^n$ точку пересечения $g(x)$ сферы S^{n-1} с полупрямой $tx + (1 - t)f(x)$, $t \geqslant 0$. Отображение g имеет следующий аналитический вид:

$$g(x) = x + u(\sqrt{1 - (x, x) + (x, u)^2} - (x, u)),$$

где $\quad u = (x - f(x))/\|x - f(x)\|, \quad (y, z) = \sum_{i=1}^{n} y_i z_i, \quad \|y\| = (y, y)^{1/2}.$

Очевидно, $g \in C^2$ и $g(x) = x$, если $x \in S^{n-1}$, что противоречит лемме 7. ■

Лемму 8 легко распространить на непрерывные отображения, применяя стандартную процедуру аппроксимации непрерывных отображений гладкими.

Теорема 13 (Брауэр). *Всякое непрерывное отображение $f\colon \bar{D}^n \to \bar{D}^n$ имеет неподвижную точку.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $f(x) \neq x$ для всех $x \in \bar{D}^n$. Тогда непрерывная функция $\|f(x) - x\|$ достигает своего минимума $\mu > 0$ на компактном множестве $\bar{D}^n$. Согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса для $\mu/2$ существует полиномиальное отображение $P_1\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ такое, что $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \bar{D}^n$. Отображение P_1, однако, может переводить точки из $\bar{D}^n$ в $\mathbb{R}^n \setminus \bar{D}^n$. «Подправим немного» P_1 и рассмотрим вместо P_1 аппроксимирующее отображение $P = P_1/(1+\mu/2)$, которое отображает $\overline{D}^n$ в $\overline{D}^n$, и $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1+\mu/2)$, если $x \in \overline{D}^n$. Действительно, неравенство $\|P(x)\| \leqslant 1$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x)\| = \|P_1(x) - f(x) + f(x)\|/(1+\mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant (\|P_1(x) - f(x)\| + \|f(x)\|/(1+\mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Неравенство $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1+\mu/2)$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x) - f(x)\| = \left\|P_1(x) - f(x) - \frac{\mu}{2}f(x)\right\|/(1+\mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|P_1(x) - f(x)\| + \frac{\mu}{2}\|f(x)\|\right)/(1+\mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Тогда

$$\|P(x) - x\| = \|f(x) - x - f(x) + P(x)\| \geqslant \|f(x) - x\| -$$
$$- \|P(x) - f(x)\| > \mu - \mu/(1+\mu/2) = \mu^2/(2+\mu) > 0$$

при $x \in \overline{D}^n$, и, значит, C^∞-отображение P на $\overline{D}^n$ не имеет неподвижных точек, что противоречит лемме 8. ■

Укажем еще одно простое, но полезное приложение степени отображения по модулю 2.

Теорема 14. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ есть C^2-отображение C^2-многообразий, причем M^n компактно, а N^n связно. Если $\deg_2 f \neq 0$, то отображение f сюръективно, т. е. $f(M^n) = N^n$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $y \in N^n$ и $y \notin f(M^n)$, т. е. $f^{-1}(y) = \varnothing$. Тогда y—регулярное значение отображения f и $n(f^{-1}(y)) = 0$, поэтому $\deg_2 f = 0$, что противоречит условию теоремы. ■

§ 6. Касательное расслоение и касательное отображение

1. Идея касательного пространства. Для дальнейшего развития анализа гладких отображений необходимо построение аналога дифференциала функции, широко используемого в математическом анализе. Касательное отображение, определяемое и изучаемое в этом параграфе, является таким обобщением. На этом пути прежде всего возникает необходимость обобщить и понятие касательной к кривой (касательной плоскости к поверхности). Необходимость такого обобщения вызвана приложениями понятия многообразия в механике и физике. Как отмечалось в § 3, конфигурационное пространство механической системы обычно является гладким многообразием. Каждая точка этого многообразия представляет собой некоторое положение механической системы. Под действием сил ме-