симирующее отображение $P = P_1/(1 + \mu/2)$, которое отображает $\overline{D}^n$ в $\overline{D}^n$, и $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1 + \mu/2)$, если $x \in \overline{D}^n$. Действительно, неравенство $\|P(x)\| \leqslant 1$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x)\| = \|P_1(x) - f(x) + f(x)\|/(1 + \mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant (\|P_1(x) - f(x)\| + \|f(x)\|/(1 + \mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Неравенство $\|P(x) - f(x)\| < \mu/(1 + \mu/2)$ при $x \in \overline{D}^n$ следует из неравенства

$$\|P(x) - f(x)\| = \left\|P_1(x) - f(x) - \tfrac{\mu}{2}f(x)\right\|/(1 + \mu/2) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|P_1(x) - f(x)\| + \tfrac{\mu}{2}\|f(x)\|\right)/(1 + \mu/2)$$

и неравенств $\|f(x)\| \leqslant 1$, $\|P_1(x) - f(x)\| < \mu/2$ при $x \in \overline{D}^n$. Тогда

$$\|P(x) - x\| = \|f(x) - x - f(x) + P(x)\| \geqslant \|f(x) - x\| -$$
$$- \|P(x) - f(x)\| > \mu - \mu/(1 + \mu/2) = \mu^2/(2 + \mu) > 0$$

при $x \in \overline{D}^n$, и, значит, C^∞-отображение P на $\overline{D}^n$ не имеет неподвижных точек, что противоречит лемме 8. ■

Укажем еще одно простое, но полезное приложение степени отображения по модулю 2.

Теорема 14. *Пусть $f\colon M^n \to N^n$ есть C^2-отображение C^2-многообразий, причем M^n компактно, а N^n связно. Если* $\deg_2 f \neq 0$, *то отображение f сюръективно, т. е. $f(M^n) = N^n$.*

Доказательство. Предположим противное, пусть $y \in N^n$ и $y \notin f(M^n)$, т. е. $f^{-1}(y) = \varnothing$. Тогда y—регулярное значение отображения f и $n(f^{-1}(y)) = 0$, поэтому $\deg_2 f = 0$, что противоречит условию теоремы. ■

§ 6. Касательное расслоение и касательное отображение

1. Идея касательного пространства. Для дальнейшего развития анализа гладких отображений необходимо построение аналога дифференциала функции, широко используемого в математическом анализе. Касательное отображение, определяемое и изучаемое в этом параграфе, является таким обобщением. На этом пути прежде всего возникает необходимость обобщить и понятие касательной к кривой (касательной плоскости к поверхности). Необходимость такого обобщения вызвана приложениями понятия многообразия в механике и физике. Как отмечалось в § 3, конфигурационное пространство механической системы обычно является гладким многообразием. Каждая точка этого многообразия представляет собой некоторое положение механической системы. Под действием сил механическая система меняет свое положение. Соответствующая ей точка конфигурационного пространства перемещается, описывая некоторую траекторию — путь на гладком многообразии. Важной характеристикой этого движения является скорость, вообще говоря, меняющаяся со временем. *Состоянием механической системы* в каждый заданный момент времени называется пара (x, v), где x — точка многообразия, соответствующая положению системы в рассматриваемый момент времени, а v — скорость перемещения точки x. Совокупность всех состояний механической системы называется *фазовым пространством.*

Естественно, возникает вопрос о том, какое математическое понятие можно сопоставить физическому понятию скорости и, более того, как описать математически точно понятие фазового пространства. Решение этого вопроса подсказывается простейшими физическими примерами. Так, в случае движения материальной точки по кривой скорость интерпретируется в виде некоторого вектора, касательного к кривой и направленного в сторону движения. Если материальная точка движется по двумерной поверхности, то ее скорость интерпретируется как некоторый вектор, касательный к данной поверхности и к самой траектории. Множество всех возможных скоростей в данной точке кривой (поверхности) является, таким образом, касательной прямой (касательной плоскостью). Точно так же в случае общего конфигурационного пространства множество всевозможных скоростей, допустимых в данном положении механической системы, естественно интерпретировать как некоторое касательное векторное пространство в соответствующей точке гладкого многообразия.

2. Понятие касательного пространства к многообразию. Прежде чем переходить к точному определению этого понятия, заметим, что теперь мы будем различать, рассматриваем ли мы n-мерное евклидово пространство как метрическое пространство (с евклидовой метрикой) или наделяем его дополнительной структурой векторного пространства. В первом случае мы будем говорить об элементах $\mathbb{R}^n$ как о точках, во втором случае — как о векторах, называя $\mathbb{R}^n$ векторным пространством (ранее мы не различали эти понятия). Так, например, рассматривая производную $D_{x_0}(f)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ в точке x_0 (см. § 1 гл. IV), следует подчеркнуть, что она осуществляет линейное отображение векторных пространств. Пусть $\mathbb{R}^n$ — подпространство $\mathbb{R}^N$. Пару $(x, v) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^n$, где x — точка, а v — вектор, назовем *вектором v в точке x (вектором, «отложенным» от точки x, вектором с «началом» в точке x)*. Пусть x — фиксированная (произвольная) точка в $\mathbb{R}^N$. *Пространством $\mathbb{R}^n$, отложенным от точки x*, будем называть совокупность всех векторов $v \in \mathbb{R}^n$, отложенных от точки x; оно обладает естественной структурой n-мерного векторного пространства, которое будем обозначать через $\mathbb{R}^n_x$.

Рассмотрим теперь гладкое подмногообразие M^n в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^N$ (см. § 2).

Определение 1. Пусть M^n есть C^r-подмногообразие в $\mathbb{R}^N$ ($r \geqslant 1$), $x \in M^n$ — произвольная точка. Пусть (U, φ) — некоторая карта M^n, $x \in U$. *Касательным пространством* T_xM^n *к многообразию* M^n *в точке* x называется отложенное от точки x подпространство — образ векторного пространства $\mathbb{R}^n$ при отображении $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N$.

Напомним, что линейное отображение $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$ задается матрицей Якоби $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{\varphi^{-1}(x)}$. Так как $\operatorname{rank}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{\varphi^{-1}(x)} = n$, то касательное пространство имеет размерность n. Покажем независимость определения T_xM^n от выбора карты. Пусть (V, ψ), $x \in V$, — другая карта. Коммутативная диаграмма (слева) порождает коммутативную диаграмму линейных отображений (справа):

$$\begin{tikzcd}
& U \cap V & \\
\varphi^{-1}(U \cap V) \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\psi^{-1}\varphi"'] & & \psi^{-1}(U \cap V) \arrow[ul, "\psi"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& \mathbb{R}^N & \\
\mathbb{R}^n \arrow[ur, "D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi"] \arrow[rr, "D_{\psi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)"'] & & \mathbb{R}^n \arrow[ul, "D_{\psi^{-1}(x)}\psi"']
\end{tikzcd}$$

Так как $\psi^{-1}\varphi\colon \varphi^{-1}(U \cap V) \to \psi^{-1}(U \cap V)$ — диффеоморфизм, то $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ — изоморфизм, и, следовательно, обозначая образ через Im, имеем $\operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi) = \mathbb{R}^n$. Далее получаем

$$\operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi = \operatorname{Im} D_{\varphi^{-1}(x)}[\psi(\psi^{-1}\varphi)] =$$
$$= \operatorname{Im}\{[d_{\psi^{-1}(x)}\psi][D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)]\} = \operatorname{Im} D_{\psi^{-1}(x)}\psi,$$

что доказывает корректность определения 1.

Элементы пространства T_xM^n называются *касательными векторами к* M^n *в точке* x.

Для многообразия M^2 в $\mathbb{R}^3$ касательное пространство T_xM^2 представляет двумерную плоскость, проходящую через точку x, которая совпадает с касательной плоскостью к поверхности M^2, обычно рассматриваемой в анализе.

Пример 1. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, рассматриваемое как подмногообразие в $\mathbb{R}^n$. Тогда для всякой точки $x \in U$ имеем $T_xU = \mathbb{R}^n_x$. ◆

Распространим понятие касательного пространства на случай произвольных многообразий. В этом случае, вообще говоря, невозможно говорить о производной $D_{\varphi^{-1}(x)}\varphi$. Однако из определения 1 касательного пространства можно извлечь другой подход.

Пусть (U, φ) — некоторая карта подмногообразия M^n в $\mathbb{R}^N$и $x \in U$ — некоторая точка. *Координатным представлением касательного вектора* $(x, h) \in T_xM$ *в карте* (U, φ) назовем вектор $(x, D_x\varphi^{-1}(h))$ из $\mathbb{R}^n_x$. Возникает вопрос: как связаны координатные представления касательного вектора h в различных картах? Пусть (V, ψ) — другая карта, $x \in V$. Дифференцируя отображение $\varphi^{-1} = (\varphi^{-1}\psi)\psi^{-1}$, нетрудно видеть, что координатные представления вектора (x, h) в картах (U, φ), (V, ψ) связаны равенством

$$(x, D_x\varphi^{-1}(h)) = (x, D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)D_x\psi^{-1}(h)). \tag{1}$$

Естественно отождествлять касательный вектор с множеством всех его координатных представлений. Это замечание можно положить в основу нового определения касательного вектора, пригодного для произвольного многообразия.

Пусть M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$. Зафиксируем произвольную точку $x \in M^n$ и рассмотрим множество T всех троек $(x, (U, \varphi), h)$, где (U, φ) — карта в точке x, а h — вектор пространства $\mathbb{R}^n$. В множестве T определим отношение эквивалентности

$$(x, (U, \varphi)h) \sim (x, (V, \psi), g) \Leftrightarrow h = D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)(g).$$

Упражнение 1°. Проверьте, что это отношение является отношением эквивалентности.

Класс эквивалентности $(x, (U, \varphi), h)$ называют *касательным вектором* в точке x, а тройку $(x, (U, \varphi), h)$ из класса эквивалентности — *представителем касательного вектора* в карте (U, φ). При этом вектор h будем называть *векторной компонентой представителя* $(x, (U, \varphi), h)$ и обозначать h_φ *.

Рассмотрим множество всех касательных векторов в точке x. Обозначим его через T_xM^n. Зафиксируем карту (U, φ), $x \in U$, и построим отображение

$$\tau_x\colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

сопоставляя каждому касательному вектору компоненту h его представителя в карте (U, φ). Очевидно, что τ_x — биекция, а следовательно, структура n-мерного векторного пространства $\mathbb{R}^n$ естественно переносится на множество T_xM^n. Более подробно, это означает, что в T_xM^n вводятся алгебраические операции сложения и

---

* Равенство (1) показывает, как меняется векторная компонента при изменении карты.

умножения на число через соответствующие действия над векторными компонентами представителей касательных векторов в выбранной карте (U, φ). Если представители касательных векторов заданы в разных картах, то предварительно их следует заменить на эквивалентные представители в одной карте. Таким образом, алгебраические операции в $T_x M^n$ определяются так:

1) $\{(x, (U, \varphi), h)\} + \{(x, (V, \psi), g)\} =$
$$= \{(x, (U, \varphi), h + D_{\psi^{-1}(x)}(\varphi^{-1}\psi)(g))\};$$

2) $\alpha\{(x, (U, \varphi), h)\} = \{(x, (U, \varphi), \alpha h)\}$.

Упражнение 2°. Докажите корректность определения алгебраических операций и проверьте аксиомы векторного пространства.

Итак, с каждой точкой x многообразия M^n мы связали векторное пространство, называемое *касательным пространством к M^n в точке x* и обозначаемое $T_x M^n$.

Размерность касательного пространства в каждой точке равна n, т. е. размерности многообразия M^n. Действительно, это вытекает из того, что биекция (2) (при данном определении алгебраических операций) является изоморфизмом векторных пространств.

Приведем еще одно удобное определение касательного пространства. Пусть M^n — гладкое многообразие и $x \in M^n$ — произвольная точка. *Гладкой кривой χ на многообразии M^n* назовем гладкое отображение

$$\chi\colon (a, b) \to M^n,$$

где (a, b) — некоторый интервал числовой оси, рассматриваемый как многообразие с естественной C^∞-структурой.

Рассмотрим множество гладких кривых

$$\chi\colon (-a, a) \to M^n, \quad \chi(0) = x.$$

Две такие кривые, χ_1 и χ_2, назовем *эквивалентными в точке x*, если для некоторой карты (U, φ), содержащей точку x, кривые $\varphi^{-1}\chi_1$, $\varphi^{-1}\chi_2$ в $\mathbb{R}^n$ обладают свойством

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_1)(t)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_2)(t)\Big|_{t=0}.$$

Упражнения. 3°. Покажите, что определение эквивалентности кривых χ_1, χ_2 не зависит от выбора карты.

4°. Покажите, что эквивалентность кривых в точке является отношением эквивалентности во множестве кривых на многообразии.

Определение 2. *Касательным вектором к многообразию M^n в точке x* называется класс эквивалентности гладких кривых, проходящих через точку x.

Лемма 1. *Множество классов эквивалентности гладких кривых на многообразии M^n, проходящих через точку x, является n-мерным векторным пространством.*

Действительно, зафиксировав карту (U, φ), классу эквивалентных кривых в точке x можно сопоставить n-мерный вектор $\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$. Обратно: каждый вектор α определяет прямую в пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку $\varphi^{-1}(x)$ с «угловым коэффициентом» α, а ее образ при отображении φ определит гладкую кривую χ в $\mathbb{R}^n$, проходящую через точку x и такую, что $\alpha = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$. Таким образом, имеем объективное соответствие между классами эквивалентности кривых в тоике x и векторами пространства $\mathbb{R}^n$.

Определим алгебраические операции в множетве классов эквивалентных в точке x кривых так, чтобы эта биекция стала изоморфизмом векторных пространств:

1) *суммой* $\{\chi_1\} + \{\chi_2\}$ двух классов называется класс $\{\chi_3\}$ такой, что

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_1)\Big|_{t=0} + \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_2)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_3)\Big|_{t=0};$$

2) *произведением* $\lambda\{\chi\}$ числа λ на класс $\{\chi\}$ называется класс $\{\chi_\lambda\}$ такой, что

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi_\lambda)\Big|_{t=0} = \lambda\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}.$$

Упражнение 5°. Покажите корректность введенных операций и проверьте аксиомы векторного пространства. ■

Построенное выше n-мерное векторное пространство классов эквивалентных в точке x кривых на многообразии M^n называется *касательным пространством к M^n в точке x*, а его элементы называются *касательными векторами.* Обозначается оно по-прежнему T_xM^n. Отметим, что для такого определения касательного пространства изоморфизм $\tau_x\colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n$, соответствующий карте (U, φ), $x \in U$, задается формулой $\{\chi\} \to \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$.

Тройку $\left(x, (U, \varphi), \frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}\right)$ естественно назвать *представителем касательного вектора* $\{\chi\}$ *в карте* (U, φ), а вектор $\frac{d}{dt}(\varphi^{-1}\chi)\Big|_{t=0}$ — *векторной компонентой представителя.*

Пример 2. Найдем касательные пространства для групп $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$.

Многообразие $M^{n^2} = \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ — открытое множество в векторном пространстве $L(n, \mathbb{R})$ всех вещественных $n \times n$-матриц. Пространство $L(n, \mathbb{R})$ можно отождествлять с пространством $\mathbb{R}^{n^2}$. Согласно примеру 1 имеем $T_x M^{n^2} = \mathbb{R}_x^{n^2}$, таким образом, касательное пространство к $\mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ в любой точке $x \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ совпадает с $L(n, \mathbb{R})$.

Многообразие $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ также лежит в $L(n, \mathbb{R})$ и выделяется условием $x \cdot x^T = t$, где x^T — транспонированная, а e — единичная матрицы. Вычислим касательное пространство к $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ в точке $x = e$. Рассмотрим гладкий путь $x = x(t)$, $x(0) = e$, удовлетворяющий условию $x(t) \cdot x(t)^T = e$ тождественно по t. Дифференцируя по t, имеем $x'(t) \cdot x(t)^T + x(t) \cdot x'(t)^T = 0$; полагая $t = 0$, получим $x'(0) + x'(0)^T = 0$. Таким образом, касательный вектор $x'(0)$ — кососимметрическая $n \times n$-матрица. С другой стороны, всякая кососимметрическая матрица c является касательным вектором в точке $t = 0$ к кривой $x(t) = e^{tc}$ (экспоненте от матрицы tc), лежащей в $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ и проходящей при $t = 0$ через точку e. Следовательно, $T_e\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$ совпадает с пространством всех кососимметрических $n \times n$-матриц. Далее, $\mathrm{SO}(n, \mathbb{R})$ — открытое множество в $\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$. Следовательно, $T_e\mathrm{SO}(n, \mathbb{R}) = T_e\mathrm{O}(n, \mathbb{R})$.

3. Касательное расслоение. Для каждой точки x гладкого многообразия M^n определено касательное пространство $T_x M^n$. Следующая задача состоит в том, чтобы построить из всех вектров этого семейства векторных пространств, зависящих от точки x, топологическое пространство и даже гладкое многообразие.

Рассмотрим дизъюнктное объединение $TM^n = \sqcup T_x M^n$ всех касательных пространств к многообразию M^n. Определим проекцию $\pi\colon TM^n \to M^n$, отображая каждый вектор из $T_x M^n$ в точку x. Тогда

$$\pi^{-1}(x) = T_x M^n;$$

будем называть этот прообраз *слоем над точкой* x.

Каждая карта (U, φ) многообразия M^n определит карту $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ в TM^n,

$$\tau_\varphi\colon \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

следующим образом: касательному вектору $a = \{(x, (U, \varphi), h\}$ в слое над точкой $x \in U$ сопоставим пару $(\varphi^{-1}(x), \tau_x a)$, где τ_x определено ранее (см. п. 2), т. е.

$$\tau_\varphi a = (\varphi^{-1}(x), h_\varphi),$$

$(x, (U, \varphi), h_\varphi)$ — представитель вектора a в карте (U, φ). Очевидно, τ_φ биективно, следовательно, в $\pi^{-1}(U)$ можно ввести слабейшую топологию так, что τ_φ станет непрерывным отображением и даже гомеоморфизмом (см. § 8 гл. II). Так как множество всех карт

$\pi^{-1}(U)$ образует покрытие TM^n, то, объявив совокупность всех открытий множеств во всех картах $\pi^{-1}(U)$ базой топологии, мы тем самым построим топологию в TM^n и превратим TM^n в топологическое пространство.

З а м е ч а н и е. Согласно формальному определению следовало бы назвать картами пространства TM^n пары $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi^{-1})$. Из соображений удобства мы обратили гомеоморфизмы (убедитесь, что это изменение несущественно).

Таким обрзом, карта (3) позволяет ввести локальные координаты в множестве $\pi^{-1}(U)$, задавая координаты пары $(\varphi^{-1}(x), h_\varphi)$ в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Будем называть пару $(\varphi^{-1}(x), h_\varphi)$ координатным представлением касательного вектора a в карте (U, φ), а вектор h_φ — векторной компонентой (в карте (U, φ)) касательного вектора.

Эта терминология оправдывается следующим утверждением.

Лемма 2. *Если M^n — многообразие класса C^r, $r \geqslant 1$, то совокупность $\{(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ всех карт пространства TM^n является C^{r-1}-атласом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть (U, φ), (V, ψ) — две карты многообразия M^n, $U \cap V \neq \varnothing$. Пусть $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$, $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$ — соответствующие карты TM^n; тогда $(\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)) = \pi^{-1}(U \cap V) \neq \varnothing$. Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & \pi^{-1}(U \cap V) \arrow[dl, "\tau_\varphi"'] \arrow[dr, "\tau_\psi"] & \\
\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}"'] & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

где отображение

$$\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}\colon \tau_\varphi(\pi^{-1}(U \cap V)) \to \tau_\psi(\pi^{-1}(U \cap V))$$

представляет собой гомеоморфизм открытых множеств в $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ (гомеоморфизм перехода от одних координат к другим). Нам достаточно показать, что $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1} \in C^{r-1}$. Так как $\tau_\varphi a = (\varphi^{-1}(x), h_1)$, $\tau_\psi a = (\psi^{-1}(x), h_2)$, $h_2 = D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi) h_1$, то легко находим, что

$$\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}(y, h) = ((\psi^{-1}\varphi)(y), D_y(\psi^{-1}\varphi) h), \tag{4}$$

откуда следует $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1} \in C^{r-1}$. ■

Отметим, что преобразование перехода (4) имеет специальный вид: координаты точки x преобразуются с помощью диффеоморфизма $\psi^{-1}\varphi$, а векторная компонента h касательного вектора a — с помощью линейного преобразования $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)$.

На топологическом пространстве TM^n построена структура гладкого многообразия размерности $2n$. Ввиду специального вида преобразований перехода (4) такое многообразие называется *касательным расслоением многообразия* M^n. Новый термин подчеркивает строение многообразия TM^n, состоящего из слоев над каждой точкой в M^n, являющихся касательными пространствами. Структура гладкого многообразия, определяемая атласом карт вида (3), называется *структурой касательного расслоения*.

Пример 3. Построим структуру касательного расслоения TS^1 для окружности $S^1 \subset \mathbb{R}^2$. Рассматривая S^1 как множество точек e^{is} ($s \in \mathbb{R}^1$), зададим на S^1 C^∞-атлас из двух карт:

$$U_1 = \left\{e^{is}: s \in \left(0, \frac{3}{2}\pi\right)\right\}, \qquad \varphi_1(s) = e^{is}: \left(0, \frac{3}{2}\pi\right) \to U_1,$$

$$U_2 = \left\{e^{is}: s \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right)\right\}, \qquad \varphi_2(s) = e^{is}: \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \to U_2.$$

Действительно, множество $U_1 \cap U_2$ состоит из двух связанных компонент, V_1, V_2 (рис. 105), и гомеоморфизм перехода на них имеет вид

$$\varphi_2^{-1}\varphi_1(s) = s: \varphi_1^{-1}(V_1) \to \varphi_2^{-1}(V_1),$$

$$\varphi_2^{-1}\varphi_1(s) = (s - 2\pi): \varphi_1^{-1}(V_2) \to \varphi_2^{-1}(V_2),$$

а следовательно, является C^∞-диффеоморфизмом. Карты атласа касательного расслоения тогда имеют вид

$$\tilde{U}_1 = \pi^{-1}(U_1), \quad \tau_{\varphi_1}: \pi^{-1}(U_1) \to \left(0, \frac{3}{2}\pi\right) \times \mathbb{R}^1,$$

$$\tilde{U}_2 = \pi^{-1}(U_2), \quad \tau_{\varphi_2}: \pi^{-1}(U_2) \to \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^1.$$

Замечание. Так как $D(\varphi_2^{-1}\varphi_1) = 1_{\mathbb{R}^1}$, то касательный вектор, заданный представителем $(x, (U_1, \varphi_1), h)$ в карте (U_1, φ_1), имеет в карте (U_2, φ_2) вид $(x, (U_2, \varphi_2), h)$. Склеивая многообразие TS^1 из прямых произведений $\left(0, \frac{3}{2}\pi\right) \times \mathbb{R}^1$, $\left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}^1$ по диффеоморфизму $\tau_{\varphi_2}\tau_{\varphi_1}^{-1} = (\varphi_2^{-1}\varphi_1, 1_{\mathbb{R}^1})$, получаем, очевидно, прямое произведение $S^1 \times \mathbb{R}^1$. Таким образом, касательное расслоение TS^1 гомеоморфно $S^1 \times \mathbb{R}^1$.

Упражнение 6°. Пусть V — открытое множество в M^n. Покажите, что касательное расслоение к множеству V, рассматриваемому как подмногообразие в M^n, совпадает с $\pi^{-1}(V)$. Опишите TV, $V \subset \mathbb{R}^n$.

Напомним, что в п. 1 мы говорили о фазовом пространстве системы. Состояние системы можно характеризовать теперь элементом из TM^n — касательным вектором a над точкой x. При этом x характеризует положение системы в конфигурационном пространстве, а вектор a из T_xM^n характеризует скорость системы.

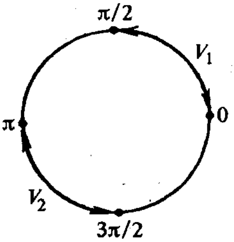

Рис. 105

4. Риманова метрика. С касательным расслоением связано понятие римановой метрики на многообразии, важное для геометрических задач. Рассмотрим C^r-многообразие M^n, $r \geqslant 1$, и его касательное расслоение T_xM^n. Пусть в каждом слое T_xM^n задана симметричная положительно определенная билинейная форма $A_x(u, v)$, зависящая, вообще говоря, от x. Будем предполагать, что эта зависимость класса C^{r-1} в том смысле, что в локальных координатах карты $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$ касательного расслоения TM^n билинейная форма $A_x(\tau_x^{-1}u, \tau_x^{-1}v)$ в фиксированном базисе векторного пространства $\mathbb{R}^n$ имеет матрицу $A_{ij}(x)$, элементы которой являются C^{r-1}-функциями на U.

Форма $A_x(u, v)$ называется *римановой метрикой класса C^{-1} на многообразии M^n*. Ее часто задают в локальных координатах касательного расслоения в виде билинейной формы

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)u_iv_j, \quad x \in U,$$

где $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ — координаты векторов u, v пространства $\mathbb{R}^n$. Риманова метрика позволяет измерять длины векторов и углы между ними в касательных пространствах, например, если $v \in T_xM^n$, то длину $\|v\|_x$ вектора v определяют равенством $\|v\|_x^2 = A_x(v, v)$. Возникает вопрос о существовании римановой метрики на гладких многообразиях.

Теорема 1. *На всяком C^r-многообразии M^n, $r \geqslant 1$, существует риманова метрика класса C^{r-1}.*

Доказательство. Рассмотрим некоторый атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ многообразия M^n. Пусть $\{V_\beta\}$ — такое локально конечное открытое покрытие M^n, что каждое V_β лежит в некотором U_α (такое покрытие найдется в силу паракомпактности M^n). Фиксируем для каждого β некоторый такой номер $\alpha = \alpha(\beta)$. Построим C^r-разбиение единицы $\{g_\beta\}$, подчиненное покрытию $\{V_\beta\}$. Идея построения римановой метрики состоит в том, чтобы построить на каждом V_β (как подмногообразии M^n с касательным расслоением $\pi^{-1}(V_\beta)$) свою риманову метрику $A_x^\beta(u, v)$, а затем «склеить» из них с помощью разбиения единицы «глобальную» риманову метрику

$$A_x(u, v) = \sum_\beta g_\beta(x) A_x^\beta(u, v). \tag{5}$$

Упражнение 7°. Убедитесь, что если $A_x^\beta(u, v)$ — риманова метрика на V_β (для каждого β), то формула (5) определяет риманову метрику на M^n.

Остается построить риманову метрику на V_β. По построению $V_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$, поэтому $\pi^{-1}(V_\beta) \subset \pi^{-1}(U_{\alpha(\beta)})$, следовательно, $\pi^{-1}(V_\beta)$ принадлежит карте $(\pi^{-1}(U_{\alpha(\beta)}), \tau_{\varphi_{\alpha(\beta)}})$ касательного расслоения TM^N и имеем отображение

$$\tau^\beta = \tau_{\varphi_{\alpha(\beta)}}\colon \pi^{-1}(V_\beta) \to (\varphi^{-1}_{\alpha(\beta)}(V_\beta)) \times \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

В локальных координатах (6) рассмотрим билинейную форму $B(u, v) = u_1 v_1 + \ldots + u_n v_n$ с постоянной матрицей $(a_{ij}(x)) = (\delta_{ij})$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Зададим теперь риманову метрику на V_β равенством

$$A_x^\beta(u, v) = B(\tau_x^\beta u, \tau_x^\beta v), \quad u, v \in T_x M^n, \quad x \in V_\beta,$$

где τ_x^β — сужение τ^β на слой $T_x M^n$. ∎

5. Касательное отображение. В анализе и его приложениях при изучении гладких отображений поверхностей (кривых) часто используют метод линеаризации, заключающийся в том, что в окрестностях какой-нибудь точки и ее образа заменяют поверхность (кривую) касательной плоскостью (прямой), а отображение — его дифференциалом, т. е. линейным отображением. Этот метод допускает обобщение на случай отображений гладких многообразий.

Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение класса C^r, $r \geqslant 1$, гладких многообразий того же класса. Пусть $x \in M^n$ — произвольная точка и (U, φ), (V, ψ) — карты многообразий M^n, N^m соответственно такие, что $x \in U$, $f(x) \in V$; будем считать также, что $f(U) \subset V$. Рассмотрим представление отображения f в данных картах

$$\psi^{-1} f \varphi\colon \varphi^{-1}(U) \to \psi^{-1}(U)$$

и его производную

$$D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1} f \varphi)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Определение 3. Пусть $a \in T_x M^n$ — произвольный касательный вектор в точке x и $(x, (U, \varphi), h)$ — его представитель в карте (U, φ). Линейное отображение

$$T_x(f)\colon T_x M^n \to T_{f(x)} N^m,$$

при котором касательный вектор a с представителем $(x, (U, \varphi), h)$ переходит в касательный вектор b с представителем $(f(x), (V, \psi), g)$ в карте (V, ψ), где $g = D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1} f \varphi) h$, называется *касательным к f отображением в точке $x \in M^n$.*

Таким образом, при касательном отображении точка x «переносится» отображением f, а векторная компонента h касательного вектора (соответствующая выбранной карте) преобразуется линейным отображением (7).

Упражнение 8°. Покажите, что касательное отображение $T_x(f)$ не зависти от выбора карт.

Следующие основные свойства касательного отображения мы предоставляем проверить читателям в качестве простого упражнения:

1) тождественному отображению $1_{M^n}\colon M^n \to M^n$ соответствует тождественное отображение

$$T_x(1_{M^n}) = 1_{T_x M^n}\colon T_x M^n \to T_x M^n;$$

2) коммутативность диаграммы отображений

$$\begin{tikzcd} & N^m \arrow[dd, "g"] \\ M^n \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "gf"'] & \\ & P^k \end{tikzcd}$$

влечет коммутативность диаграммы касательных отображений

$$\begin{tikzcd} & T_y N^m \arrow[dd, "T_y(g)"] \\ T_x M^n \arrow[ur, "T_x(f)"] \arrow[dr, "T_x(gf)"'] & \\ & T_z(P^k) \end{tikzcd}$$

где $y = f(x)$, $z = g(y)$.

Совокупность всех касательных отображений $\{T_x(f)\}_{x \in M^n}$ определяет отображение касательных расслоений $T(f)\colon TM^n \to TN^m$, называемое *касательным к f отображением многообразий.*

Используя гладкие структуры на TM^n и TN^m, можно записать представление отображения $T(f)$ в соответствующих картах. Действительно, пусть (V, ψ) — карта точки $f(x)$, а (U, φ) — карта точки x, причем $f(U) \subset V$. Рассмотрим карты $(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)$, $(\pi^{-1}(V), \tau_\psi)$ касательных расслоений TM^n, TN^m соответственно. Касательному вектору $a \in \pi^{-1}(U)$ в карте τ_φ соответствует пара $(\varphi^{-1}(x), h)$; аналогично, вектору $b = T(f)a$ в карте τ_ψ соответствует пара $(\psi^{-1}f(x), D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}f\varphi)h)$. Имеем следующее преобразование перехода:

$$\tau_\psi T(f)\tau_\varphi^{-1}\colon (y, h) \mapsto ((\psi^{-1}f\varphi)(y),\ D_y(\psi^{-1}f\varphi)h), \qquad (9)$$

действующее из множества $\tau_\varphi(\pi^{-1}(U)) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ во множество $\tau_\psi(\pi^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Ясно, что отображение (9) принадлежит классу гладкости C^{r-1}.

Таким образом, с каждым гладким отображением многообразий класса C^r, $r \geqslant 1$, можно связать гладкое класса C^{r-1} отображение (8) их касательных расслоений. Для касательных отображений касательных расслоений остаются справедливыми свойства 1), 2).

В терминах касательного отображения можно переформулировать определение регулярной точки гладкого отображения многообразий (см. определение 6 § 5). Пусть $f\colon M^n \to N^m$ — C^r-отображение $(r \geqslant 1)$ C^r-многообразий.

Определение 4. Точка $c \in M^n$ называется *регулярной точкой отображения* f, если

$$\operatorname{rank} T_x(f) = \min(n, m).$$

Упражнение 9°. Убедитесь в эквивалентности определения 4 определению 6 § 5.

Преимущество определения 4 заключается в том, что оно дано в инвариантной форме, т. е. в форме, не зависящей от выбора координатных систем.

6. Ориентация многообразия. Понятия касательного пространства и касательного расслоения позволяют определить понятие ориентируемости гладких многообразий, обобщая определение ориентируемой поверхности весьма важное для анализа.

Напомним понятие ориентированного векторного пространства $\mathbb{R}^n$. Говорят, что два базиса, $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(g_1, \ldots, g_n)$, в $\mathbb{R}^n$ имеют одну и ту же *ориентацию*, если переход от одного базиса к другому осуществляется линейным отображением с положительным определителем *.

---

* Ориентацию в пространстве $\mathbb{R}^0$ естественно определить как выбор знака у нуля: $+\theta$ или $-\theta$.

Упражнение 10°. Покажите, что ориентация является отношением эквивалентности на множестве всех базисов в $\mathbb{R}^n$ и что число классов эквивалентности равно 2.

Пространство $\mathbb{R}^n$ называется *ориентированным*, если в нем фиксирован один из классов эквивалентности базисов.

Рассмотрим C^r-подмногообразие M^n, $r \geqslant 1$, в пространстве $\mathbb{R}^N$. Подмногообразие M^n называется *ориентируемым*, если можно выбрать такие ориентации в каждом касательном пространстве T_xM^n и такой атлас $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ на M^n, что соответствующие диффеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ сохраняют ориентацию, т. е. для всякой точки $x \in U_\alpha$ касательное отображение $T_x\varphi_\alpha^{-1}\colon T_xM^n \to \mathbb{R}^n$ переводит выбранную ориентацию векторного пространства T_xM^n в фиксированную ориентацию векторного пространства $\mathbb{R}^n$.

В противном случае подмногообразие называется *неориентируемым*.

Атлас, удовлетворяющий этому условию, назовем *ориентирующим атласом*. Ясно, что диффеоморфизмы $\varphi_\alpha\colon \mathbb{R}^n \to U_\alpha$ для ориентирующего атласа согласованы между собой. Точный смысл этой согласованности выражен в следующем упражнении.

Упражнение 11°. Покажите, что любые две карты, $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, (U_β, φ_β), из ориентирующего атласа положительно согласованы, т. е. обладают тем свойством, что определитель отображения $D_x(\varphi_\beta^{-1}\varphi_\alpha)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ положителен для любой точки $x \in \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$; обратно: если любые две карты атласа положительно согласованны, то атлас ориентирующий.

Свойство, выраженное в упражнении 11°, используется при определении ориентируемого многообразия (не обязательно вложенного в $\mathbb{R}^N$).

В множестве ориентирующих атласов многообразия введем отношение эквивалентности: два ориентирующих атласа *эквивалентны*, если их объединение — ориентирующий атлас.

Выбор одного из классов эквивалентности называется *ориентацией многообразия*.

Упражнение 12°. Убедитесь, что для любого многообразия число классов эквивалентности ориентирующих атласов четно, а в случае связного многообразия равно 0 или 2.

Простейшим примером ориентируемого многообразия может служить пространство $\mathbb{R}^n$. В данном случае атлас, состоящий из одной карты $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$, ориентирующий.

Упражнение 13°. Покажите, что всякое многообразие, имеющее атлас, состоящий из одной карты, ориентируемо.

Упражнение 13° подсказывает нам следующий пример: открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, всякий открытый диск D^n ориентируемы.

Прямое произведение ориентируемых многообразий также пример ориентируемого многообразия. Предоставляем проверить это читателям в качестве упражнения.

Упражнения. 14°. Постройте ориентирующий атлас на S^n.

15°. Покажите, что многообразие $G_k(\mathbb{R}^n)$ ориентируемо при четном n, $0 < k < n$.

Что касается неориентируемых многообразий, то таковыми являются, например, лист Мёбиуса и проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ при четном $n - 1 > 0$. Доказательство мы не приводим. Если $n - 1$ нечетно, то $\mathbb{R}P^{n-1}$ ориентируемо, как следует из упражнения 15°.

Замечание. Обратим внимание на то, что при $n = 0$, $n = 1$ всякое многообразие M^n ориентируемо.

Понятие ориентации позволяет усовершенствовать введенную в § 5 степень отображения по модулю 2. Рассматривая отображение ориентированных многообразий, число точек в прообразе регулярного значения будем подсчитывать не по mod 2, а алгебраически, считая каждую точку прообраза со знаком + или − в зависимости от того, сохраняет касательное отображение в данной точке ориентацию касательного пространства или нет. Так же, как в случае степени по модулю 2, можно доказать, что это число не зависит от выбора регулярного значения; оно называется *степенью* (*ориентированной*) *отображения* f и обозначается $\deg f$. В случае гладких отображений сфер так определенная степень отображения совпадает со степенью отображения, введенной в § 4 гл. III.

§ 7. Касательный вектор как дифференциальный оператор. Дифференциал функции и кокасательное расслоение

1. Новое определение вектора. Продолжим изучение касательного вектора и дадим его определение посредством операции дифференцирования по вектору. Это позволит дать новую интерпретацию касательного расслоения.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и C^∞-функцию f, определенную в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$ всех n-мерных векторов в точке x^0. Если (x^0, v) — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n_{x^0}$, то производной от функции f по вектору v в точке x^0 называется производная $\frac{d}{dt} f(x^0 + tv)\Big|_{t=0}$, где $t \geq 0$ — числовой параметр (в анализе обычно рассматривают вектор v еди-