Упражнение 13° подсказывает нам следующий пример: открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и, следовательно, всякий открытый диск D^n ориентируемы.

Прямое произведение ориентируемых многообразий также пример ориентируемого многообразия. Предоставляем проверить это читателям в качестве упражнения.

Упражнения. 14°. Постройте ориентирующий атлас на S^n.

15°. Покажите, что многообразие $G_k(\mathbb{R}^n)$ ориентируемо при четном n, $0 < k < n$.

Что касается неориентируемых многообразий, то таковыми являются, например, лист Мёбиуса и проективное пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$ при четном $n - 1 > 0$. Доказательство мы не приводим. Если $n - 1$ нечетно, то $\mathbb{R}P^{n-1}$ ориентируемо, как следует из упражнения 15°.

Замечание. Обратим внимание на то, что при $n = 0$, $n = 1$ всякое многообразие M^n ориентируемо.

Понятие ориентации позволяет усовершенствовать введенную в § 5 степень отображения по модулю 2. Рассматривая отображение ориентированных многообразий, число точек в прообразе регулярного значения будем подсчитывать не по mod 2, а алгебраически, считая каждую точку прообраза со знаком + или − в зависимости от того, сохраняет касательное отображение в данной точке ориентацию касательного пространства или нет. Так же, как в случае степени по модулю 2, можно доказать, что это число не зависит от выбора регулярного значения; оно называется *степенью* (*ориентированной*) *отображения* f и обозначается $\deg f$. В случае гладких отображений сфер так определенная степень отображения совпадает со степенью отображения, введенной в § 4 гл. III.

§ 7. Касательный вектор как дифференциальный оператор. Дифференциал функции и кокасательное расслоение

1. Новое определение вектора. Продолжим изучение касательного вектора и дадим его определение посредством операции дифференцирования по вектору. Это позволит дать новую интерпретацию касательного расслоения.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ и C^∞-функцию f, определенную в окрестности точки $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Рассмотрим векторное пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$ всех n-мерных векторов в точке x^0. Если (x^0, v) — некоторый вектор из $\mathbb{R}^n_{x^0}$, то производной от функции f по вектору v в точке x^0 называется производная $\left.\frac{d}{dt}f(x^0 + tv)\right|_{t=0}$, где $t \geqslant 0$ — числовой параметр (в анализе обычно рассматривают вектор v единичной длины и говорят о производной по направлению v). В координатной системе имеем формулу

$$\frac{d}{dt}f(x^0+tv_1)\Big|_{t=0} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right)_{x^0} v_1 + \ldots + \left(\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right)_{x^0} v_n = \\ = (\operatorname{grad} f(x^0), v), \quad (1)$$

где $x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n$ — координаты точки x и вектора v. Обозначим производную (1) через $f_v(x^0)$. При фиксированных векторе v и точке x^0 получили соответствие $f \longmapsto f_v(x^0)$, определяющее некоторую функцию (функционал) $l^v_{x^0}$, определенную на гладких функциях в окрестностях точки x^0, со значениями в $\mathbb{R}^1$. Очевидно, что этот функционал определен на ростках $\widehat{f}_{x^0}$ гладких функций в точке x^0. Таким образом, имеем отображение

$$l^v_{x^0}\colon \mathscr{O}(x^0) \to \mathbb{R}^1. \quad (2)$$

Из определения вытекают следующие свойства функционала (2):

1) $l^v_{x^0}(\widehat{f}\widehat{g}) = f(x^0)l^v_{x^0}(\widehat{g}) + g(x^0)l^v_{x^0}(\widehat{f})$ (формула дифференцирования произведения);

2) $\mathrm{d}l^v_{x^0}(\widehat{f}) = 0$, если $f = \mathrm{const}$ (формула дифференцирования постоянной);

3) $l^v_{x^0}(\alpha\widehat{f} + \beta\widehat{g}) = \alpha l^v_{x^0}(\widehat{f}) + \beta l^v_{x^0}(\widehat{g})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$ (линейность).

Рассмотрим множество $\{l\}_{x^0}$ всех функционалов $l\colon \mathscr{O}(x^0) \to \mathbb{R}^1$, удовлетворяющих свойствам 1), 2), 3). Очевидно, $\{l\}_{x^0}$ — векторное пространство и $l^v_{x^0} \in \{l\}_{x^0}$. Если теперь вектор v «пробегает» пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$, то возникает отображение

$$\mathbb{R}^n_{x^0} \to \{l\}_{x^0}, \quad v \longmapsto l = l^v_{x^0}. \quad (3)$$

Теорема 1. *Отображение* (3) *является изоморфизмом векторных пространств* $\mathbb{R}^n_{x^0}$ *и* $\{l\}_{x^0}$.

Доказательство. Линейность отображения (3) следует из формулы (1). Отображение (3) — мономорфизм: если $l^v_{x^0} = l^w_{x^0}$, то $(\operatorname{grad} f(x^0), v) = (\operatorname{grad} f(x^0), w)$ для всякой функции f, гладкой в окрестности x^0; полагая $f(x) = x_i$ (координата точки x), получим равенства $v_i = w_i$, $i = 1, \ldots, n$, т. е. $v = w$.

Докажем эпиморфность отображения (3). Имеем

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{i=1}^{n} A_i(x^0)(x_i - x_i^0) + \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x)(x_i - x_i^0)(x_j - x_j^0), \quad (4)$$

где

$$A_i(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x^0), \quad i = 1, \ldots, n, \quad (5)$$

а $A_{ij}(x)$ — функции класса C^∞ (см. упражнение 4° § 1).

Пусть теперь $l\colon \mathscr{E}(x^0)\to\mathbb{R}^1$ — произвольный функционал из $\{l\}_{x^0}$. Используя аксиомы 1), 2), 3), получаем из (4) равенства

$$l(\hat{f})=\sum_{i=1}^{n} A_i'(x^0)l(\hat{x}_i-x_i^0)=\sum_{i=1}^{n} A_i(x^0)l(\hat{x}_i),$$

где $l(\hat{x}_i)$ — значение l на ростке функции x_i — координате точки x.

Используя (5), получим окончательно

$$l(\hat{f})=\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^0} v_1+\ldots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{x^0} v_n=l_{x^0}^{v}(f), \tag{6}$$

где $v_1=l(\hat{x}_1),\ \ldots,\ v_n=l(\hat{x}_n)$. ■

В силу изоморфизма (3) можно отождествить векторное пространство $\mathbb{R}^n_{x^0}$ с n-мерным векторным пространством $\{l\}_{x^0}$ всех функционалов, удовлетворяющих аксиомам 1), 2), 3). С помощью координатной системы в $\mathbb{R}^n$ можно, используя равенство (6), сопоставить каждому функционалу l_{x^0} дифференциальный оператор

$$\sum_{i=1}^{n} v_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}, \tag{7}$$

действующий на гладкие функции по формуле

$$\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}\right)f=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\Big|_{x^0} v_i.$$

Упражнение 1°. Убедитесь, что множество всех дифференциальных операторов (7) образует векторное пространство, а указанное соответствие задает изоморфизм с векторным пространством $\{l\}_{x^0}$.

Таким образом, имеем еще один изоморфизм — векторного пространства $\mathbb{R}^n_{x^0}$ с векторным пространством дифференциальных операторов (7). При этом изоморфизме базисному вектору $e_i=(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (1 на i-м месте) соответствует дифференциальный оператор $\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}$.

2. Касательное расслоение. Данное в п. 1 истолкование пространства векторов в точке x^0 подсказывает соответствующее обобщение этого понятия для гладких многообразий.

Пусть M^n — многообразие класса C^∞ и x^0 — точка из M^n. Рассмотрим алгебру $\mathscr{E}(x^0)$ ростков гладких функций в точке x^0 (см. § 4) и функционалы

$$l_{x^0}\colon \mathscr{E}(x^0)\to\mathbb{R}^1. \tag{8}$$

Упражнение 2°. Пусть (U, φ) — карта точки x^0 многообразия M^n. Проверьте, что функционал l_{x^0}, определяемый равенством

$$l_{x^0}(\hat{f}) = l^v_{\varphi^{-1}(x^0)}(f\varphi), \quad \hat{f} \in \mathcal{O}(x^0),$$

для всякого вектора $v \in \mathbb{R}^n$ задает функционал (8), удовлетворяющий аксиомам 1), 2), 3).

Определение 1. Множество всех функционалов (8), удовлетворяющих свойствам 1), 2), 3), называется *касательным пространством* $T_{x^0}M^n$ к многообразию M^n в точке x^0.

Касательное пространство $T_{x^0}M^n$ является векторным пространством с естественными алгебраическими операциями. Отдельный элемент l_{x^0} из $T_{x^0}M^n$ называется касательным вектором к многообразию M^n в точке x^0. Соответствие $l^v_{\varphi^{-1}(x^0)} \mapsto l_{x^0}$ (см. упр. 2) оказывается изоморфизмом пространств $\mathbb{R}^n_{\varphi^{-1}(x^0)}$ и $T_{x^0}M^n$. Действительно, линейность этого отображения очевидна, а обратное отображение задается формулой

$$\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x^0)}(\hat{g}) = l_{x^0}(\hat{g}\varphi^{-1}), \quad g \in \mathcal{O}(\varphi^{-1}(x^0)),$$

где $\mathcal{O}(\varphi^{-1}(x^0))$, $\mathcal{O}(x^0)$ — алгебры ростков соответственно в точках $\varphi^{-1}(x^0) \in \mathbb{R}^n$, $x^0 \in M^n$. Удобно считать в дальнейшем, что функционал l_{x^0} задан не только на ростках $\hat{g} \in \mathcal{O}(x^0)$, но и на функциях g, определенных в окрестности точки x^0 (полагая $l_{x^0}(g) = l_{x^0}(\hat{g})$), и написать $l_{x^0}(g)$ вместо $l_{x^0}(\hat{g})$.

Пусть $\Phi\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение многообразий и пусть $x^0 \in M^n$, $y^0 = \Phi(x^0) \in N^m$. Отображение Φ индуцирует отображение $\hat{\Phi}\colon \mathcal{O}(y^0) \to \mathcal{O}(x^0)$ между алгебрами ростков по правилу $\hat{g} \in \mathcal{O}(y^0)$, $\hat{g} \mapsto \hat{f}$, $f = g\Phi$. Это позволяет определить касательное отображение $T_{x^0}(\Phi)\colon T_{x^0}M^n \to T_{y^0}N^m$ по правилу $T_{x^0}(\Phi)l_{x^0} = l_{y^0}$, где $l_{y^0} = l_{x^0}\hat{\Phi}$.

Действие отображений Φ, $\hat{\Phi}$ показано на диаграммах

$$\begin{tikzcd}
M^n \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr, dashed, "f = g\Phi"'] & & N^m \arrow[dl, "g"] \\
& \mathbb{R}^1 &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{O}(x^0) \arrow[rr, "\hat{\Phi}"] \arrow[dr, "l_{x^0}"'] & & \mathcal{O}(y^0) \arrow[dl, dashed, "l_{y^0} = l_{x^0}\hat{\Phi}"] \\
& \mathbb{R}^1 &
\end{tikzcd}$$

Упражнения. 3°. Проверьте, что $l_{x^0}\hat{\Phi}$ — касательный вектор в точке y^0 многообразия N^m и что $T_{x^0}(\Phi)$ — линейное отображение.

Касательное отображение $T_{x^0}(\Phi)$ часто обозначают через $(\Phi_*)_{x^0}$ (или $d_{x^0}\Phi$).

4°. Покажите, что $[(1_{M^n})_*]_{x^0} = 1_{T_{x^0}M^n}$. Если $\Phi: M^n \to N^m$, $\Psi: N^m \to P^k$ — гладкие отображения многообразий, то $[(\Psi\Phi)_*]_{x^0} = (\Psi_*)_{\Phi(x^0)}(\Phi_*)_{x^0}$.

5°. Докажите, что если Φ — диффеоморфизм, то $(\Phi_*)_{x^0}$ — изоморфизм векторных пространств (и, следовательно, $m = n$).

Перейдем к построению касательного расслоения. Как и в § 6, положим $TM^n = \sqcup T_xM^n$ (дизъюнктное объединение). Задача состоит в том, чтобы определить структуру касательного расслоения на TM^n. Зададим проекцию $\pi: TM^n \to M^n$, сопоставляя элементу $l_x \in T_xM^n$ точку $x \in M^n$. Пусть (U, φ) — какая-нибудь карта точки x. Построим карту касательного пространства, соответствующую карте (U, φ),

$$\tau_\varphi: \pi^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Пусть $l_x \in T_xM^n$; тогда на алгебре $\mathscr{O}(\varphi^{-1}(x))$ определяется касательный вектор $\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}$ по правилу

$$\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}(g) = l_x(g\varphi^{-1}), \quad \hat{g} \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(x)).$$

В силу изоморфизма пространства дифференциальных операторов и касательного пространства (см. упр. 1°) имеем

$$\tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)} = v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}, \tag{10}$$

где дифференциальные операторы $\partial/\partial x_i$ действуют в точке $\varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_n)$, а $v = (v_1, \ldots, v_n)$ — однозначно определяемый вектор. Отображение (9) задается соответствием, линейным на каждом слое $\pi^{-1}(x)$:

$$l_x \mapsto (x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n). \tag{11}$$

Биективность этого отображения очевидна; как и в § 6, топологию в TM^n определим условием непрерывности отображений τ_φ для всех карт некоторого атласа многообразия M^n.

Покажем, что отображения (9), (11) определяют структуру касательного расслоения. Если (V, ψ) — другая карта точки x, то аналогично определен касательный вектор $\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}$:

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)} = w_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + w_n \frac{\partial}{\partial y_n}, \tag{12}$$

где $w = (w_1, \dots, w_n)$ — вектор в точке $\psi^{-1}(x) = (y_1, \dots, y_n)$ и отображение τ_ψ действует по правилу $l_x \mapsto (y_1, \dots, y_n; w_1, \dots, w_n)$. Вычислим $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}$. Имеем

$$(y_1, \dots, y_n) = \psi^{-1}\varphi(x_1, \dots, x_n) =$$
$$= ((\psi^{-1}\varphi)_1(x_1, \dots, x_n), \dots, (\psi^{-1}\varphi)_n(x_1, \dots, x_n)) \quad (13)$$

— отображение класса C^∞. Выразим $w_1, \dots, w_n$ через $v_1, \dots, v_n$. Пусть $\hat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(x))$, тогда из (12) получаем равенство

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = w_1 \frac{\partial g}{\partial y_1} + \dots + w_n \frac{\partial g}{\partial y_n},$$

но

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = l_x(g\psi^{-1}) = l_x(g\psi^{-1}\varphi\varphi^{-1}) = \tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g\psi^{-1}\varphi).$$

Теперь используем формулу (10)

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g) = v_1 \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x} + \dots + v_n \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x_n}$$

и сравним два выражения для $\tilde{l}_{\psi^{-1}(x)}(g)$:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \frac{\partial g}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(g\psi^{-1}\varphi)}{\partial x_j}.$$

В силу произвольности ростка $\hat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(x))$ можно положить $g(y_1, \dots, y_n) = y_i$, тогда из (13) имеем

$$(g\psi^{-1}\varphi)(x_1, \dots, x_n) = (\psi^{-1}\varphi)_i(x_1, \dots, x_n),$$

а из предыдущего равенства находим

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \quad (14)$$

Векторная компонента касательного вектора при преобразовании координат (13) преобразуется линейным преобразованием (14) с матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)$, т. е. преобразованием $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\varphi)$. Преобразования (13) и (14) гладко зависят от точки $\varphi^{-1}(x)$ и определяют, таким образом, преобразование $\tau_\psi \tau_\varphi^{-1}$ каласса C^∞. Специальный вид этого координатного преобразования означает, что атлас $\{(\pi^{-1}(U), \tau_\varphi)\}$ на TM^n задает гладкую структуру касательного расслоения.

Упражнение 6°. Рассмотрите евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ со структурой, задаваемой атласом, состоящим из одной карты $(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})$. Убедитесь, что $T_x\mathbb{R}^n$ изоморфно $\mathbb{R}^n_x$.

Теперь можно считать, что $T\mathbb{R}^n$ — множество всех пар (x, v), где $x \in \mathbb{R}^n$, а $v \in \mathbb{R}^n_x$. Можно считать также, что

$$T\mathbb{R}^n = \left\{ \left(x_1, \ldots, x_n; v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \right\},$$

где $x, \ldots, x_n$ — координаты x а $v_1, \ldots, v_n$ — координаты v; отображение $\tau_{1_{\mathbb{R}^n}}$ определяет единственную карту соответствующего атласа касательного расслоения $T\mathbb{R}^n$:

$$\left(x_1, \ldots, x_n; v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \to (x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n). \qquad (15)$$

Тем самым в $T\mathbb{R}^n$ введена структура прямого произведения; говорят, что $T\mathbb{R}^n$ — тривиальное касательное расслоение.

Упражнение 7°. Покажите, что отображение (9) расщепляется в произведение $\tau_\varphi = \tau_{1_{\mathbb{R}^n}}(\varphi^{-1})_*$, действующее по правилу

$$l_x \overset{(\varphi^{-1})^*}{\longmapsto} \left(x_1, \ldots, x_n; v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \overset{\tau_{1_{\mathbb{R}^n}}}{\longmapsto} (x_1, \ldots, x_n, v_1, \ldots, v_n).$$

Часто бывает удобно работать не с координатным представлением вектора l_x, а с его образом $(\varphi^{-1})_* l_x$; векторная компонента последнего есть $v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial x_n}$. При изменении карты (замене координат) ее координаты $v_1, \ldots, v_n$ в базисе $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^n$ преобразуются по формулам (14) к координатам $w_1, \ldots, w_n$ в базисе $\left\{ \frac{\partial}{\partial y_i} \right\}_{i=1}^n$.

3. Касательное отображение. Пусть $\Phi\colon M^n \to N^m$ — гладкое отображение многообразий. Для каждого $x \in M^n$ имеем линейное отображение $(\Phi_*)_x\colon T_x M^n \to T_y N^m$, где $y = \Phi(x)$. Тем самым определено отображение $\Phi_*\colon TM^n \to TM^m$. Убедимся, что Φ_* — гладкое отображение касательных расслоений.

Пусть (U, φ) — карта точки x, (V, ψ) — карта точки y, $l_x \in T_x M^n$ и $l_y = (\Phi_*)_x l_x$. В силу (11) имеем

$$\begin{aligned} &l_x \overset{\tau_\varphi}{\longmapsto} (x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n), \\ &l_y \overset{\tau_\psi}{\longmapsto} (y_1, \ldots, y_m; w_1, \ldots, w_m), \end{aligned} \qquad (16)$$

и нам необходимо найти преобразование

$$\tau_\psi(\Phi_*)\tau_\varphi^{-1}\colon (x_1, \ldots, x_n; v_1, \ldots, v_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_m; w_1, \ldots, w_m). \qquad (17)$$

Так как $(\psi^{-1}\Phi\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_m)$, то остается найти зависимость между $\{v_1\}$ и $\{w_i\}$. Если $\hat{g} \in \mathscr{O}(\psi^{-1}(y))$, то справедливы равенства

$$\tilde{l}_{\psi^{-1}(y)}(g) = l_y(g\psi^{-1}) = ((\Phi_*)_x l_x)(g\psi^{-1}) =$$
$$= l_x(g\psi^{-1}\Phi) = l_x(g\psi^{-1}\Phi\varphi\varphi^{-1}) = \tilde{l}_{\varphi^{-1}(x)}(g\psi^{-1}\Phi\varphi).$$

Но учитывая, что первый и последний функционалы равны соответственно

$$\sum_{j=1}^{m} w_j \frac{\partial g}{\partial y_j} \tag{18}$$

и

$$\sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(g\psi^{-1}\Phi\varphi)}{\partial x_j}, \tag{19}$$

как и при выводе (14), приравнивая (18) и (19) и полагая $g \equiv y_i$, получаем

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} v_j \frac{\partial(\psi^{-1}\Phi\varphi)_i}{\partial x_j}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{20}$$

откуда и следует, что отображение (17) принадлежит классу C^∞. Формула (20) подтверждает ранее установленный факт, что векторная компонента касательного вектора преобразуется с помощью линейного преобразования $D_{\varphi^{-1}(x)}(\psi^{-1}\Phi\varphi)$.

4. Дифференциал функции и кокасательное расслоение. Рассмотрим действие вектора $l_{x^0} \in T_{x^0}M^n$ на функцию f, $\hat{f} \in \mathscr{O}(x^0)$. Если фиксировать функцию f, то возникает линейный функционал на пространстве $T_{x^0}M^n$: $l_{x^0} \longmapsto l_{x^0}(f)$. Этот функционал обозначается символом $(df)_{x^0}$ и называется дифференциалом функции f в точке x^0. По определению

$$(df)_{x^0} l_{x^0} = l_{x^0}(f).$$

Таким образом, $(df)_{x^0}$ принадлежит $(T_{x^0}M^n)^*$ — сопряженному пространству к $T_{x^0}M^n$ с естественной векторной структурой.

Пусть (U, φ) — карта в точке x^0 и $\{x_i(x)\}_{i=1}^n$ — локальные координаты точки $x \in U$. Ниже мы отождествляем касательные векторы с соответствующими им дифференциальными операторами. Пусть $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_{x^0}\right\}_{i=1}^n$ — базис в $T_{x^0}M^n$, а $(dx_i)_{x^0}$ — дифференциал функции $x_i(x)$, тогда

$$(dx_i)_{x^0}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_{x_0}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} x_i\right)_{x^0} = \delta_{ij} \tag{21}$$

($\delta_{ij}=0$ при $i\neq j$, $\delta_{ij}=1$). Следовательно, $\{(dx_i)_{x^0}\}_{i=1}^n$ — двойственный к $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^0}\right\}_{i=1}^n$ базис в $(T_{x^0}M^n)^*$. Отсюда следует также, что $(T_{x^0}M^n)^*$ состоит из всевозможных линейных комбинаций $\{a_1(dx_1)_{x^0}+\ldots+a_n(dx_n)_{x^0}\}$ с вещественными коэффициентами. Для произвольной функции f, $\hat{f}\in\mathscr{O}(x^0)$, и вектора $l_{x^0}=$ $=v_1\frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_{x^0}+\ldots+v_n\frac{\partial}{\partial x_n}\Big|_{x^0}$ имеем разложение

$$(df)_{x^0}l_{x^0}=l_{x^0}(f)=v_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)+\ldots+v_n\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0).$$

С помощью (21) получаем

$$(dx_i)_{x^0}l_{x^0}=(dx_i)_{x^0}\left(\sum_{j=1}^n v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{x^0}\right)=v_i$$

и, подставляя в предыдущее равенство, находим

$$(df)_{x^0}l_{x^0}=\left(\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)\,(dx_i)_{x^0}\right)l_{x^0}.$$

В силу произвольности $l_{x^0}\in T_{x^0}M^n$ имеем

$$(df)_{x^0}=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)\,(dx_1)_{x^0}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0)\,(dx_n)_{x^0}.$$

Заменяя x^0 произвольной точкой $x\in U$, можно последнюю формулу записать более удобно:

$$(df)_x=\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,dx_1+\ldots+\frac{df}{\partial x_n}(x)\,dx_n,\tag{22}$$

здесь $\{dx_i\}_{i=1}^n$ — базисные дифференциалы в точке x. Формула (22) оправдывает название «дифференциал» для $(df)_x$.

Выведем из (22) зависимость между дифференциалами координат различных локальных координатных систем в точке x. Пусть (V,ψ) — карта, задающая координаты $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, $x\in V$. Если $x\in U\cap V$, то координаты $\{x_i(x)\}_{i=1}^n$ и $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$ связаны преобразованием $\psi^{-1}\varphi$ (см (13)). Из (22) имеем равенства

$$(dy_i)_x=\frac{\partial y_i}{\partial x_1}(x)\,dx_1+\ldots+\frac{\partial y_i}{\partial x_n}(x)\,dx_n,$$

но

$$\frac{\partial}{\partial x_j}y_i(x)=\frac{\partial}{\partial x_j}(\psi^{-1}\varphi)_i\,(x_1,\ldots,x_n),$$

следовательно,

$$(dy_i)_x = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j} dx_j, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{23}$$

Таким образом, при переходе от одной системы локальных координат к другой дифференциалы координат, рассматриваемых как функции точки на многообразии, преобразуются по формулам (23), т. е. линейным преобразованием, задаваемым матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\right)$.

Рассмотрим дизъюнктное объединение $T^*M = \bigsqcup_{x \in M^n} (T_x M^n)^*$. Построим на T^*M^n структуру векторного расслоения. Определено естественное проектирование $p\colon T^*M^n \to M^n$. Пусть (U, φ) — карта на M^n, $\{x_i(x)\}$ — локальные координаты точки $x \in U$. Определим на T^*M^n карту

$$\sigma_\varphi\colon p^{-1}(U) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

задав отображение σ_φ по правилу

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \mapsto (x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_n), \tag{25}$$

где $\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ — элемент из слоя $p^{-1}(x) = (T_x M^n)^*$.

Покажем, что $\{(p^{-1}(U), \sigma_\varphi\}$ — атлас C^∞-структуры, если $\{(U, \varphi)\}$ — атлас многообразия M^n. Пусть (V, ψ) — другая карта в точке x, определяющая локальные координаты $\{y_i(x)\}_{i=1}^n$, и

$$\sigma_\psi\colon p^{-1}(V) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \tag{26}$$

— другая карта на T^*M^n. Ясно, что $p^{-1}(U \cap V) = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$. Если $x \in U \cap V$, то элементу $\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i$ можно сопоставить координаты в карте (26):

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, dx_i \mapsto (y_1, \ldots, y_n; b_1, \ldots, b_n). \tag{27}$$

Из (25) и (27) заключаем о совпадении элементов в $(T_x M^n)^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, (dx_i)_x = \sum_{i=1}^{n} b_i\, (dy_i)_x. \tag{28}$$

Из (28) нетрудно получить зависимость между $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Действительно, подставляя в (28) выражение $(dy_i)_x$ из (23), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах dx_i в обеих частях равенства, получим равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\right)^{*-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

где * означает транспонирование матрицы. Отсюда видно, что в координатном представлении векторная компонента элемента слоя $p^{-1}(x)$ меняется при изменении координат по иному закону, чем векторная компонента касательного вектора, а именно: она преобразуется с помощью матрицы $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)^{*-1}$, в то время как векторная компонента касательного вектора преобразуется матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)$. Величины, меняющиеся по такому закону при изменении координатной системы, называются *ковекторами*. Элементы множества $(T_xM^n)^*$ называются *ковекторами в точке* x.

Теперь ясно, что, построив карты (25) для всех карт некоторого атласа на M^n, мы превратим множество всех ковекторов, т. е. T^*M^n, в гладкое многообразие; это многообразие называется *касательным расслоением*.

§ 8. Векторные поля на гладких многообразиях

Излагаемые в этом параграфе понятия важны как для целого ряда математических дисциплин (дифференциальные уравнения, динамические системы, топология многообразий), так и для приложений к механике и физике — здесь эти связи будут намечены в самой элементарной форме. Как и в § 7, для простоты формулировок мы рассматриваем все объекты класса C^∞, называя их гладкими.

1. Касательный вектор к гладкому пути. Пусть M^n — гладкое многообразие. Напомним, что путь в M^n — это непрерывное отображение $\chi\colon (a, b) \to M^n$ интервала числовой прямой в топологическое пространство M^n. Так как (a, b) — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^1$, можно рассматривать гладкие отображения χ, называя путь *гладким*.

Пусть χ — гладкий путь в M^n, $\chi(t)$ — точка этого пути, $t \in (a, b)$.