Из (28) нетрудно получить зависимость между $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$. Действительно, подставляя в (28) выражение $(dy_i)_x$ из (23), а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых дифференциалах dx_i в обеих частях равенства, получим равенство

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)_i}{\partial x_j}\right)^{*-1} \begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{pmatrix},$$

где * означает транспонирование матрицы. Отсюда видно, что в координатном представлении векторная компонента элемента слоя $p^{-1}(x)$ меняется при изменении координат по иному закону, чем векторная компонента касательного вектора, а именно: она преобразуется с помощью матрицы $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)^{*-1}$, в то время как векторная компонента касательного вектора преобразуется матрицей Якоби $\left(\frac{\partial(\psi^{-1}\varphi)}{\partial x}\right)$. Величины, меняющиеся по такому закону при изменении координатной системы, называются *ковекторами*. Элементы множества $(T_xM^n)^*$ называются *ковекторами в точке x*.

Теперь ясно, что, построив карты (25) для всех карт некоторого атласа на M^n, мы превратим множество всех ковекторов, т. е. T^*M^n, в гладкое многообразие; это многообразие называется *касательным расслоением*.

§ 8. Векторные поля на гладких многообразиях

Излагаемые в этом параграфе понятия важны как для целого ряда математических дисциплин (дифференциальные уравнения, динамические системы, топология многообразий), так и для приложений к механике и физике — здесь эти связи будут намечены в самой элементарной форме. Как и в § 7, для простоты формулировок мы рассматриваем все объекты класса C^∞, называя их гладкими.

1. Касательный вектор к гладкому пути. Пусть M^n — гладкое многообразие. Напомним, что путь в M^n — это непрерывное отображение χ: $(a, b) \to M^n$ интервала числовой прямой в топологическое пространство M^n. Так как (a, b) — гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^1$, можно рассматривать гладкие отображения χ, называя путь *гладким*.

Пусть χ — гладкий путь в M^n, $\chi(t)$ — точка этого пути, $t \in (a, b)$.

Определение 1. *Касательным вектором к пути* χ в точке $\chi(t)$ называется касательный вектор $l_{\chi(t)}$ к многообразию M^n в точке $\chi(t)$, определяемый равенством

$$l_{\chi(t)}(f) = \frac{d}{dt} f(\chi(t))\Big|_t, \quad \hat{f} \in \mathscr{O}(\chi(t)). \tag{1}$$

Упражнение 1°. Проверьте, что правая часть в (1) задает касательный вектор к многообразию M^n.

Касательный вектор к пути $\chi(t)$ обозначают обычно как $\chi'(t)$. Найдем координатное представление вектора $\chi'(t)$. Пусть (U, φ) — карта точки $\chi(t)$. Если $\hat{g} \in \mathscr{O}(\varphi^{-1}(\chi(t)))$, то

$$l_{\chi(t)}(g\varphi^{-1}) = \frac{d}{dt}(g\varphi^{-1}\chi(t))\Big|_t = \sum_{i=1}^{n} \frac{dx_i(t)}{dt} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_n(t)),$$

где $\varphi^{-1}\chi(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — соответствующий путь в $\mathbb{R}^n$. Отсюда получаем координаты вектора $\chi'(t)$ в карте (U, φ):

$$\tau_\varphi l_{\chi(t)} = \left(x_1(t), \ldots, x_n(t); \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{dx_n(t)}{dt}\right). \tag{2}$$

Здесь $x'(t) = (x_1'(t), \ldots, x_n'(t))$ — векторная компонента касательного вектора.

Если $A_x(u, v)$ — риманова метрика на M^n, то определяется длина $\|\chi'(t)\|_{\chi(t)}$ касательного вектора к пути и длина участка пути $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$:

$$S_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{A_{\chi(t)}(\chi'(t), \chi(t))}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \|\chi'(t)\|_{\chi(t)}\, dt. \tag{3}$$

В локальных координатах формула (3) имеет вид

$$S_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t)) \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt}}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{ij}(x(t))\, dx_i dx_j},$$

где $g_{ij}(x)$ — соответствующая матрица билинейной формы.

2. Динамическая группа физической системы и ее инфинитезимальная образующая. Понятия гладкого пути и касательного вектора к нему находят естественное применение при математическом исследовании физических систем.

Будем говорить о множестве всех возможных состояний физической системы в некотором процессе и предполагать, что оно является гладким многообразием M^n, называемым *фазовым пространством* системы. Тогда $x \in M^n$ обозначает возможное состояние системы и соответствие «точка $x \longmapsto$ состояние» биективно. Состояние системы меняется в зависимости от времени в соответствии с физическим законом, следовательно, точка x, соответствующая этому состоянию, меняет свое положение в зависимости от времени t. Будем предполагать процесс детерминированным, что означает однозначную определенность состояния системы в будущем и прошедшем ее настоящим состоянием. Такие процессы описываются динамической группой физической системы, определяемой следующим образом. Если $x \in M^n$ — точка, отмечающая в настоящий момент ($t = 0$) состояние системы, то состоянию системы в момент t отвечает точка $\chi = \chi(t, x)$, $\chi(t, x) \in M^n$, $\chi(0, x) = x$. Таким образом, точка x описывает путь $\chi = \chi(t, x)$, $-\infty < t < +\infty$, называемый *фазовой траекторией* (*орбитой*) точки x. Для каждого $t \in (-\infty, +\infty)$ определяется преобразование U_t: $M^n \to M^n$ по правилу $x \mapsto \chi(t, x)$. В силу принципа причинности имеем

$$U_{t_1+t_2}(x) = U_{t_1}(U_{t_2}(x)), \quad t_1, t_2 \in (-\infty, +\infty);$$

отсюда вытекает, что семейство преобразований $\{U_t\}$ является группой с обратным элементом $(U_t)^{-1} = U_{-1}$ и с единицей $U_0 = 1_{M^n}$.

Эта группа называется *динамической группой физической системы*. Будем предполагать, что отображение $\mathbb{R}^1 \times M^n \to M^n$: $(t, x) \mapsto U_t(x)$ является гладким; в этом случае группу диффеоморфизмов $\{U_t\}$ называют *гладко зависящей от* t. С физической точки зрения знание динамической группы означает полное описание поведения системы во времени. Такое описание не всегда возможно.

Физические законы обычно формулируются гораздо проще в «инфинитезимальной форме», что означает следующее: рассмотрим орбиту $\chi(t) = \chi(t, x)$ и касательный к ней вектор $\chi'(0)$ (в точке x). Для каждой точки $x \in M^n$ положим $X(x) = \chi'(0)$. Совокупность касательных векторов $\{X(x)\}$ называется *векторным полем на многообразии* M^n; это поле называют также *инфинитезимальной образующей динамической группы*. Физический закон выражается обычно путем описания инфинитезимальной образующей. Но тогда возникает задача построения (описания) динамической группы.

Ниже мы изучим более тщательно понятие векторного поля.

3. Гладкое векторное поле. *Векторным полем на многообразии* M^n называется отображение

$$X\colon M^n \to TM^n \tag{4}$$

такое, что $X(x) \in T_xM^n$ для каждого $x \in M^n$. Векторное поле называется *гладким* (класса C^∞), если отображение (4) является гладким (класса C^∞). В локальных координатах векторное поле имеет вид

$$\left(x_1, \ldots, x_n; X_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_n}\right). \tag{5}$$

Упражнение 2°. Покажите, что гладкость векторного поля эквивалентна гладкости функций $X_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, n$.

Пусть U_t — группа диффеоморфизмов многообразия M^n, гладко зависящая от t, и пусть $\chi(t, x) = U_t(x)$ — орбита точки x.

Определение 2. Векторное поле $X(x)$ называется *инфинитезимальной образующей группы* U_t, если для каждой орбиты $\chi(t) = \chi(t, x)$ имеем

$$\chi'(0) = X(x). \tag{6}$$

Упражнения. 3°. Покажите, что равенство (6) эквивалентно равенству

$$\chi'(t) = X(\chi(t)), \quad t \in (-\infty, +\infty). \tag{7}$$

Указание. Используйте равенство $\chi(t) = U_t(x)$ и групповой закон.

4°. Покажите, что инфинитезимальная образующая $X(x)$ — гладкое векторное поле.

Рассмотрим задачу отыскания группы U_t по заданному гладкому векторному полю $X(x)$. Будем искать орбиту $\chi(t) = \chi(t, x_0)$ из условия (7). В локальных координатах имеем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

где $(x_1(t), \ldots, x_n(t))$ — координатное задание пути χ, а $X_1, \ldots, X_n$ — координаты векторной части касательного вектора $X(x)$ (см. (2) и (5)). Функции $X_i(x_1, \ldots, x_n)$ гладко зависят от $x_1, \ldots, x_n$. Для отыскания орбиты (точнее, той же части, которая лежит в карте), необходимо найти решение системы дифференциальных уравнений (8), удовлетворяющее условию $x_1(0) = x_1^0, \ldots, x_n(0) = x_n^0$, где $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — координаты точки x^0. Используя теорию обыкновенных дифференциальных уравнений, можно получить единственное решение $\chi(t) = \chi(t, x)$ для достаточно малого интервала $-\varepsilon < t < +\varepsilon$ и x из некоторой окрестности точки x^0, причем $\chi(t, x)$ гладко зависит от t, x. Но чтобы построить группу U_t, необходимо продолжить решение $\chi(t, x)$ на всю ось $-\infty < t < +\infty$ для любого $x \in M^n$. Это не всегда можно сделать (пример : уравнение $y' = y^2$ на $\mathbb{R}^1$). Однако если M^n компактно, то искомое продолжение существует, что несложно проверяется методами теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Из этой теории вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Если M^n — компактное гладкое многообразие и X — гладкое векторное поле, то оно является инфинитезимальной образующей однопараметрической группы диффеоморфизмов, гладко зависящей от параметра.*

Отметим, что орбиты часто называют интегральными кривыми векторного поля.

Пример 1. Пусть $M^{2n} = TQ^n$ (случай, рассматриваемый в механике, где Q^n — конфигурационное пространство, которое будем считать гладким многообразием). Пусть локальные координаты в Q^n — $(q_1, \ldots, q_n)$, в TQ^n — $(q_1, \ldots, q_n; v_1, \ldots, v_n)$.

Векторное поле на TQ^n вида (векторная компонента)

$$L_{q,v} = v_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \ldots + v_n \frac{\partial}{\partial q_n} + \alpha_1(q, v) \frac{\partial}{\partial v_1} + \ldots + \alpha_n(q, v) \frac{\partial}{\partial v_n}$$

с гладкими функциями $\alpha_1(q, v), \ldots, \alpha_n(q, v)$ называется *специальным*. Интегральные кривые этого поля описываются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = v_i, \quad \frac{dv_1}{dt} = \alpha_i(q_1, \ldots, q_n; v_1, \ldots, v_n), \quad i = 1, \ldots, n,$$

которая эквивалентна системе второго порядка

$$\frac{d^2q_i}{dt^2} = \alpha_i\left(q_1, \ldots, q_n; \frac{dq_1}{dt}, \ldots, \frac{dq_n}{dt}\right), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Классическая механика оперирует уравнениями типа (9).

Упражнение 5°. Найдите $\pi_* L_{q,v}$, где $\pi\colon TQ^n \to Q^n$ — проекция.

4. Алгебра Ли векторных полей. Пусть $C^\infty(M^n)$ — множество всех гладких отображений $f\colon M^n \to \mathbb{R}^1$. Гладкое векторное поле X на M^n определяет отображение $C^\infty(M^n) \to C^\infty(M^n)$ по правилу $f \mapsto X(f)$, где $X(f)(x) = X(x)(f)$ для всякой точки x из M^n. Если (в локальных координатах) $X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, то $X(f)(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}$. Очевидно, это линейное отображение векторного пространства $C^\infty(M^n)$.

Если X, Y — два векторных поля, то определяется их произведение — коммутатор $[X, Y]$ — формулой

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)).$$

Упражнение 6°. Убедитесь, что $[X, Y]$ — векторное поле, и вычислите его в локальных координатах.

Очевидно, что множество всех векторных полей на M^n образует векторное пространство (над полем $\mathbb{R}^1$) с естественными операциями $X + Y$ и $\alpha \cdot X$. Коммутатор $[X, Y]$ линейно зависит от множителей X, Y. Таким образом, множество всех векторных полей на M^n является алгеброй.

Упражнение 7°. Покажите, что для любых векторных полей X, Y, Z на M^n справедливы равенства:

1) $[X, Y] = -[Y, X]$ (антисимметричность);

2) $[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0$ (тождество Якоби).

Таким образом, множество всех векторных полей на M^n является алгеброй Ли.

Множество всех векторных полей на гладком многообразии является не только векторным пространством, но и обладает структурой модуля над кольцом гладких функций на M^n. Действительно, для $f \in C^\infty(M^n)$ определено произведение $f \cdot X$, являющееся векторным полем: $(f \cdot X)(x) = f(x) \cdot X(x)$; ясно, что это гладкое поле, линейно зависящее и от f, и от X.

Изучение строения алгебр Ли векторных полей — одно из направлений современной топологии.

5. Ковекторные поля. Гладкое отображение $A\colon M^n \to T^*M^n$, при котором $A(x)$ принадлежит $T_x^*M^n$ — слою над точкой x, называется *гладким ковекторным полем на* M^n.

В локальных координатах поле A задается в виде

$$A(x) = (x_1, \ldots, x_n;\ a_1(x)dx_1 + \ldots + a_n(x)dx_n),$$

где $a_i(x)$ — гладкие функции от координат $(x_1, \ldots, x_n)$ точки x.

Если $f \in C^\infty(M^n)$, то $A(x) = (df)_x$ является ковекторным полем на M^n, гладким, так как в локальных координатах ковекторная часть $(df)_x$ имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n,$$

и координаты $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ этого ковектора — гладкие функции.

Пример 2. Пусть $M^{2n} = T^*Q^n$, где Q^n — конфигурационное пространство механической системы. Пусть $(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots$ $\ldots, p_n)$ — локальные координаты на T^*Q^n, где $(p_1, \ldots, p_n)$ — координаты вектора в точке $(q_1, \ldots, q_n) \in Q^n$. Если $H\colon T^*Q^n \to \mathbb{R}^1$ — гладкая функция, то

$$dH = \frac{\partial H}{\partial q_1} dq_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n} dq_n + \frac{\partial H}{\partial p_1} dp_1 + \ldots + \frac{\partial H}{\partial p_n} dp_n$$

— ковекторное поле на многообразии T^*Q^n. Образуем векторное поле на этом же многообразии:

$$L = -\frac{\partial H}{\partial p_1} \frac{\partial}{\partial q_1} - \ldots - \frac{\partial H}{\partial p_n} \frac{\partial}{\partial q_n} + \frac{\partial H}{\partial q_1} \frac{\partial}{\partial p_1} + \ldots + \frac{\partial H}{\partial q_n} \frac{\partial}{\partial p_n}.$$

Интегральные кривые $(q_1(t), \ldots, q_n(t); p_1(t), \ldots, p_n(t))$ поля L удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

В механике выбирают функцию H, равную сумме кинетической и потенциальной энергий, и систему (10) называют *уравнениями движения в форме Гамильтона.*

§ 9. Расслоения и накрытия

1. Подготовительные примеры. Во многих задачах естественным образом возникают пространства, «склеенные» из прямых произведений. Такое пространство представляет собой непрерывную совокупность пространств — слоев, гомеоморфных друг другу и индексированных точками пространства — базы. Мы коснемся лишь самых первых понятий теории таких пространств; эта теория сейчас продвинута очень далеко. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть M^n — гладкое многообразие, TM^n — касательное расслоение, $\pi\colon TM^n \to M^n$ — проекция касательного расслоения на многообразие. Ясно, что для всякой точки $x \in M^n$ слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$ и, более того, для координатной окрестности U точки x имеем гомеоморфизм $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (см. § 6). Иногда, как, например, в случае $M^n = S^1$, имеет место гомеоморфизм $TM^n \simeq M^n \times \mathbb{R}^n$. Однако в общем случае это не так. (Например, для $M^n = S^2$.)

Касательное расслоение устроено «локально по x» как прямое произведение $U \times \mathbb{R}^n$, что является, конечно, следствием его определения. Наличие подобной структуры у сферы S^3 является более неожиданным и связано со свойствами комплексных чисел. Построим пример отображения S^3 в S^2, для которого прообраз любой точки гомеоморфен окружности. Рассмотрим S^3 как сферу в $\mathbb{C}^2$, т. е.

$$S^3 = \{(z_1, z_2)\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

а сферу S^2 — как расширенную комплексную плоскость (z-сферу). Формула $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$ определяет отображение $\pi\colon S^2 \to S^2$. Для $\lambda = t^{i\alpha}$ имеем $\pi(\lambda z_1, \lambda z_2) = \pi(z_1, z_2)$, поэтому $\pi^{-1}(z) \simeq S^1$ для любого $z \in S^2$. Напомним, что z-сфера S^2 имеет структуру C^∞-многообразия с локальными координатами z на области $U_1 = S^2 \backslash \infty$ и $1/z$ на области $U_2 = S^2 \backslash 0$ (см. § 2).

10*