Интегральные кривые $(q_1(t), \ldots, q_n(t); p_1(t), \ldots, p_n(t))$ поля L удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{10}$$

В механике выбирают функцию H, равную сумме кинетической и потенциальной энергий, и систему (10) называют *уравнениями движения в форме Гамильтона.*

§ 9. Расслоения и накрытия

1. Подготовительные примеры. Во многих задачах естественным образом возникают пространства, «склеенные» из прямых произведений. Такое пространство представляет собой непрерывную совокупность пространств — слоев, гомеоморфных друг другу и индексированных точками пространства — базы. Мы коснемся лишь самых первых понятий теории таких пространств; эта теория сейчас продвинута очень далеко. Рассмотрим некоторые примеры.

Пусть M^n — гладкое многообразие, TM^n — касательное расслоение, $\pi\colon TM^n \to M^n$ — проекция касательного расслоения на многообразие. Ясно, что для всякой точки $x \in M^n$ слой $\pi^{-1}(x)$ гомеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$ и, более того, для координатной окрестности U точки x имеем гомеоморфизм $\pi^{-1}(U) \simeq U \times \mathbb{R}^n$ (см. § 6). Иногда, как, например, в случае $M^n = S^1$, имеет место гомеоморфизм $TM^n \simeq M^n \times \mathbb{R}^n$. Однако в общем случае это не так. (Например, для $M^n = S^2$.)

Касательное расслоение устроено «локально по x» как прямое произведение $U \times \mathbb{R}^n$, что является, конечно, следствием его определения. Наличие подобной структуры у сферы S^3 является более неожиданным и связано со свойствами комплексных чисел. Построим пример отображения S^3 в S^2, для которого прообраз любой точки гомеоморфен окружности. Рассмотрим S^3 как сферу в $\mathbb{C}^2$, т. е.

$$S^3 = \{(z_1, z_2)\colon\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\},$$

а сферу S^2 — как расширенную комплексную плоскость (z-сферу). Формула $\pi(z_1, z_2) = z_1/z_2$ определяет отображение $\pi\colon S^2 \to S^2$. Для $\lambda = t^{i\alpha}$ имеем $\pi(\lambda z_1, \lambda z_2) = \pi(z_1, z_2)$, поэтому $\pi^{-1}(z) \simeq S^1$ для любого $z \in S^2$. Напомним, что z-сфера S^2 имеет структуру C^∞-многообразия с локальными координатами z на области $U_1 = S^2 \backslash \infty$ и $1/z$ на области $U_2 = S^2 \backslash 0$ (см. § 2).

10*

Рассмотрим прямые произведения $U_1 \times S^1$, $U_2 \times S^1$. Оказывается, что множества $\pi^{-1}(U_1)$, $\pi^{-1}(U_2)$ гомеоморфны соответственно $U_1 \times S^1$, $U_2 \times S^2$. Покажем это. Определим отображение $\varphi\colon U_1 \to S^3$ формулой

$$\varphi(z) = \left(\frac{z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}}\right);$$

очевидно, $\pi\varphi = 1\big|_{U_1}$ и множество $\pi^{-1}(z)$, $z \in U_1$, состоит из точек вида $\lambda\varphi(z)$, где $\lambda = e^{ia}$. Определим отображение $\tilde{\varphi}\colon U_1 \times S^1 \to S^3$ формулой

$$\tilde{\varphi}(z, \lambda) = \left(\frac{\lambda z}{\sqrt{1+|z|^2}}, \frac{\lambda}{\sqrt{1+|z|^2}}\right), \quad z \in U_1, \quad \lambda \in S^1.$$

Ясно, что $\pi^{-1}(U_1) = \tilde{\varphi}(U_1 \times S^1)$ и диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_1 \times S^1 \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_1) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_1 & \end{tikzcd}$$

где pr_1 — проекция прямого произведения на первый сомножитель, коммутативна. Аналогично определим отображение $\tilde{\psi}\colon U_2 \times S^1 \to S^3$ формулой

$$\tilde{\psi}(1/z, \lambda) = \left(\frac{\lambda \cdot (1/z)}{\sqrt{1+|1/z|^2}}, \frac{\lambda \cdot 1}{\sqrt{1+|1/z|^2}}\right), \quad 1/z \in U_2, \quad \lambda \in S^1,$$

причем $\pi^{-1}(U_2) = \tilde{\psi}(U_2 \times S^1)$. Ясно, что коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} U_2 \times S^1 \arrow[rr, "\tilde{\psi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_2) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_2 & \end{tikzcd}$$

Таким образом, отображение π локально (над координатными окрестностями S^2) устроено как проекция прямого произведения. Однако сфера S^3 не гомеоморфна прямому произведению $S^2 \times S^1$ (фундаментальные группы этих пространств не изоморфны).

Описанное отображение называется расслоением Хопфа; оно замечательно во многих отношениях. Так, например, расслоение Хопфа определяет образующий элемент группы $\pi_3(S^2) \simeq \mathbb{Z}$. Отметим, что для любых двух точек $u, v \in S^2$ окружности $\pi^{-1}(u)$ и $\pi^{-1}(v)$ зацеплены в S^3 (рис. 106).

2. Определение расслоения. Рассмотренные в п. 1 примеры естественно приводят нас к следующему определению.

Определение 1. *Локально тривиальным расслоением* называется четверка (E, B, F, p), где E, B, F — топологические пространства, p — сюръективное отображение E на B, причем для каждого $x \in B$ существет окрестность U точки x и гомеоморфизм φ_U: $p^{-1}(U) \to U \times F$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} P^{-1}(U) \arrow[rr, "\varphi_U"] \arrow[dr, "p"'] & & U \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & U & \end{tikzcd} \qquad (1)$$

где pr — естественная проекция, коммутативна.

Из определения вытекает, что для всякой точки x из U прообраз $p^{-1}(x)$ гомеоморфен пространству F, он называется *слоем* над точкой x.

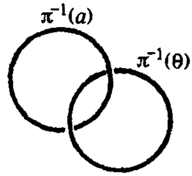

Рис. 106

Пространства E, B, F называются соответсвенно *пространством, базой* и *слоем* расслоения, а отображение p — *проекцией* расслоения. Окрестности U, участвующие в определении 1, называются *координатными окрестностями*, гомеоморфизмы φ_U — *координатными* или *распрямляющими гомеоморфизмами.*

Хотя в топологии рассматривают и более широкий класс расслоений, чем локально тривиальные расслоения, всюду ниже мы будем называть расслоениями только локально тривиальные расслоения.

Расслоение называется *тривиальным*, если существует гомеоморфизм φ_B: $E \to B \times F$ такой, что коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "\varphi_B"] \arrow[dr, "p"'] & & B \times F \arrow[dl, "\mathrm{pr}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Заметим, что касательное расслоение TM^n можно рассматривать как пространство локально тривиального расслоения с базой M^n, проекцией $p = \pi$ — проекцией касательного пространства на многообразие M^n, и слоем $\mathbb{R}^n$. В качестве окрестностей $U \subset M^n$ служат координатные окрестности многообразия M^n.

Рассмотренное выше отображение расслоения Хопфа является проекцией локально тривиального расслоения, пространством которого является S^3, базой — S^2, слоем — S^1.

Приведем еще ряд примеров локально тривиальных расслоений.

Пример 1. Лист Мёбиуса M (факторпространство прямого произведения $[0, 1]\times[-1, 1]$ по отношению эквивалентности $(0, y)\sim(1, -y)$) является пространством расслоения с базой S^1 («средняя» линия) и слоем $[-1, 1]$.

Проекция pr: $[0, 1]\times[-1, 1]\to[0, 1]$, действующая по правилу $\mathrm{pr}\,(x, y)=x$, индуцирует факторотображение $p\colon M\to S^1$ — проекцию этого расслоения.

Пример 2. Прямое произведение $X\times Y$ топологических пространств X, Y образует пространство расслоения с естественной проекцией pr: $X\times Y\to X$, слоем Y и базой X.

Пример 3. Сфера S^n является пространством расслоения с базой $\mathbb{R}P^n$, слоем, состоящим из двух точек (дискретное множество), и проекцией, сопоставляющей точке $x\in S^n$ ее класс эквивалентности $\{x, -x\}\in\mathbb{R}P^n$ (см. § 5 гл. II).

Сфера S^{2n+1} является пространством расслоения с базой $\mathbb{C}P^n$, слоем S^1 и проекцией, сопоставляющей точке $x\in S^{2n+1}\subset\mathbb{C}^{n+1}$ ее класс эквивалентности в $\mathbb{C}P^n$ (см. § 5 гл. II).

Упражнения. 1°. Покажите, что касательное расслоение многообразия M^n тривиально тогда и только тогда, когда существуют n (непрерывных) векторных полей на M^n, линейно независимых в каждой точке $x\in M^n$.

2°. Покажите, что локально тривиальное расслоение над отрезком тривиально.

Отображение $s\colon B\to E$, удовлетворяющее условию $ps=1_B$, называется *сечением* расслоения (E, B, F, p).

Упражнения. 3° . Покажите, что существование сечения является необходимым условием тривиальности расслоения.

4°. Существуют ли сечения расслоения Хопфа? (Воспользуйтесь тем, что $\pi_2(S^3)=0$ и $ps=1_{S^2}$.)

5°. Приведите пример нетривиального расслоения, у которого существует сечение.

Установим некоторое отношение между отображениями в пространство расслоения и в его базу.

Определение 2. Отображение $\Psi\colon X\to E$ называется *поднятием отображения* $\Phi\colon X\to B$, если для всякой точки $x\in X$ выполняется равенство $p\Psi(x)=\Phi(x)$. Говорят также, что отображение Ψ накрывает отображение Φ.

Введенное отношение характеризуется коммутативностью следующей диаграммы:

$$\begin{tikzcd} & E \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[ur, "\Psi"] \arrow[r, "\Phi"'] & B \end{tikzcd} \tag{2}$$

Упражнение 6°. Покажите, что если у расслоения есть сечение, то для всякого отображения в базу существует поднятие этого отображения.

Приведем необходимое условие существования поднятия отображения в терминах функторов гомотопических групп (см. § 3 гл. III).

Теорема 1. *Пусть* (E, B, F, p) — *локально тривиальное расслоение со слоем* F, *пространством* E *и базой* B, X — *топологическое пространство. Для того чтобы у отображения* $\Phi: X \to B$ *существовало поднятие* Ψ, *удовлетворяющее условию* $\Psi(x_0) = e_0$, *где* $x_0 \in X$, $e_0 \in E$, $p(e_0) = b_0 = \Phi(x_0)$, x_0, e_0, b_0 *фиксированы, необходимо, чтобы*

$$\Phi_n(\pi_n(X, x_0)) \subset p_n(\pi_n(E, e_0)) \tag{3}$$

при всех $n \geqslant 1$.

Доказательство. Если такое поднятие Ψ существует, то диаграмма (2) коммутативна. Применяя функторы гомотопических групп, получаем коммутативные диаграммы (при всех $n \geqslant 1$)

$$\begin{tikzcd} & \pi_n(E, e_0) \arrow[d, "p"] \\ \pi_n(X, x_0) \arrow[ur, "\Psi_n"] \arrow[r, "\Phi_n"'] & \pi_n(B, b_0) \end{tikzcd}$$

из которых следуют требуемые включения. ∎

Локально тривиальные расслоения обладают следующим важным свойством.

Свойство накрывающей гомотопии. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение, X — хаусдорфово паракомпактное топологическое пространство, $\Phi: X \times I \to B$ — гомотопия и пусть $f: X \to E$ — поднятие отображения $\Phi\big|_{X \times 0}$, т. е. $pf = \Phi\big|_{X \times 0}$. Тогда существует единственное поднятие $\Psi: X \times I \to E$ гомотопии Φ, удовлетворяющее условию $\Psi\big|_{X \times 0} = f$.

Это утверждение будет доказано для частного случая в п. 4.

3. Векторные расслоения. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение. Предположим, что U и V — координатные окрестности точки $x \in B$. Можно определить гомеоморфизм $g_V^U(x)$ пространства F формулой

$$g_V^U(x)h = \varphi_V \varphi_U^{-1}(x, h), \quad x \in U \cap V, \quad h \in F; \quad g_U^V(x) = 1_F.$$

Если W — третья окрестность точки x, то справедливы равенства

$$g_W^U(x) = g_W^V(x) g_V^U(x).$$

Таким образом, для каждой точки $x \in U \cap V$ определен гомеоморфизм $g_V^U(x)$, т. е. задано отображение g_V^U: $U \cap V \to H(F)$ множества $U \cap V$ в группу $H(F)$ гомеоморфизмов пространства F; отображения g_V^U называются *координатными преобразованиями*. Если F локально компактно и топология в $H(F)$ индуцирована вложением $H(F)$ в пространство $C(F, F)$ с компактно открытой топологией, то координатные преобразования, как легко видеть, непрерывны (см. упр. 11 § 1 гл. III).

Определение 3. *Векторным расслоением* называется локально тривиальное расслоение (E, B, F, p), слой F которого является конечномерным векторным пространством и координатные преобразования g_V^U которого являются непрерывными отображениями в группу обратимых линейных преобразований пространства F (т. е. при U и V фиксированных $g_V^U(x)$ — непрерывно зависящее от $x \in U \cap V$ семейство обратимых линейных операторов).

Упражнение 7°. Покажите, что касательное расслоение является векторным расслоением.

Определение 4. *Морфизмом локально тривиального расслоения* (E, B, F, p) *в локально тривиальное расслоение* (E', B', F', p') называется пара непрерывных отображений H: $E \to E'$, h: $B \to B'$ таких, что $hp = p'H$.

Последнее равенство означает, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{H} & E' \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p'} \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

коммутативна (слой переходит в слой).

Это определение превращает совокупность локально тривиальных расслоений в категорию.

Определение 5. Пусть (E, B, F, p), (E', B', F', p') — векторные расслоения, слои которых F и F' — векторные пространства над одним и тем же полем. Пусть (H, h) — морфизм (E, B, F, p) в (E', B', F', p'). Морфизм (H, h) называется *морфизмом векторных расслоений*, если для любой точки $x \in B$ суперпозиция

$$F \xrightarrow{\varphi_x^{-1}} p^{-1}(x) \xrightarrow{H} (p')^{-1}(h(x)) \xrightarrow{\varphi'_{h(x)}} F'$$

является линейным отображением, где φ_x ($\varphi'_{h(x)}$) — гомеоморфизмы слоя $p^{-1}(x)$ ($(p')^{-1}(h(x))$) и векторного пространства F (F'), возникающие в коммутативной диаграмме определения 1.

Упражнения. 8°. Проверьте, что векторные расслоения и их морфизмы образуют категорию.

9°. Проверьте, что, сопоставляя многообразию касательное расслоение, а гладкому отображению многообразий — касательное отображение расслоений, мы определяем ковариантный функтор из категории гладких многообразий в категорию векторных расслоений (над полем $\mathbb{R}$).

4. Накрытия. Остановимся подробнее на одном специальном классе локально тривиальных расслоений.

Рассмотрим окружность $S^1 = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ и определим отображение $p: \mathbb{R}^1 \to S^1$ формулой $p(t) = e^{2\pi i t}$. Поскольку $p(t_1) = p(t_2)$ тогда и только тогда, когда $t_1 - t_2 = k$, $k \in \mathbb{Z}$, то прообраз $p^{-1}(z)$ всякой точки $z \in S^1$ гомеоморфен множеству целых чисел $\mathbb{Z}$ с дискретной топологией. Для всякой точки $z \in S^1$ отображение p гомеоморфно отображает каждую связную компоненту множества $p^{-1}(S^1 \backslash z) = \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$ на $S^1 \backslash z$. Многозначное отображение $p^{-1}: S^1 \backslash z \to \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$, $p^{-1}(u) = (1/2\pi i)\ln u$, имеет счетное число однозначных ветвей, одну из которых обозначим через φ.

Определим гомеоморфизм $\tilde{\varphi}: (S^1 \backslash z) \times \mathbb{Z} \to \mathbb{R}^1 \backslash p^{-1}(z)$ формулой $\tilde{\varphi}(u, k) = \varphi(u) + k$. Получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(S^1 \backslash z) \times \mathbb{Z} \arrow[rr, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & p^{-1}(S^1 \backslash z) \arrow[dl, "p"] \\
& S^1 \backslash z &
\end{tikzcd}$$

Систему множеств $\{S^1 \backslash z\}_{z \in S^1}$ можно принять за систему координатных окрестностей, так что четверка $(\mathbb{R}^1, S^1, \mathbb{Z}, p)$ является локально тривиальным расслоением, слой которого $\mathbb{Z}$ дискретен. Такие расслоения часто возникают в задачах анализа.

Определение 6. Локально тривиальное расслоение (E, B, F, p) называется *накрытием*, если пространство E и база B расслоения линейно связны, а слой F — пространство с дискретной топологией.

Часто вместо четверки (E, B, F, p) там, где это не вызывает недоразумений, пишут $p: E \to B$ и называют накрытием отображение p. Слой $p^{-1}(x)$ над каждой точкой накрытия гомеоморфен пространству F с дискретной топологией, следовательно, сам является дискретным пространством.

В определении накрытия (а также локально тривиального расслоения с линейно связной базой) можно ослабить требования на гомеоморфизм φ_U, предполагая, что φ_U — гомеоморфизм на $U \times F_U$, где F_U — пространство (с дискретной топологией для накрытия), зависящее от координатной окрестности U. При таком определении, очевидно, $p^{-1}(x) \sim F_U$ (биекция, соответственно гомеоморфизм) для всякого $x \in U$. Но оказывается, $F_U \sim F_V$ (биекция, гомеоморфизм) для любых координатных окрестностей U, V, и если положить $F = p^{-1}(x_*)$, где x_* — фиксированная точка из B, то придем к определению 6 (или 1) (см. ниже замечание после доказательства леммы 1).

Пример 4. Расслоение сферы S^n над проективным пространством $\mathbb{R}P^n$ является накрытием, слой которого состоит из двух точек.

Пример 5. Отображение $p: S^1 \to S^1$ (или $p: \mathbb{C}\backslash 0 \to \mathbb{C}\backslash 0$), задаваемое соответствием $z \mapsto z^n$, является накрытием, слой которого состоит из n точек.

Накрытие, слой которого состоит из n точек, называется n-листным накрытием.

Заметим, что для координатной окрестности U накрытия (E, B, F, p) прообраз $p^{-1}(U)$ гомеоморфен произведению $U \times F$, состоящему из непересекающихся «листов» — открытых множеств $U \times \alpha$, $\alpha \in F$, следовательно, сам состоит из непересекающихся «листов» — открытых множеств $W_\alpha = \varphi_U^{-1}(U \times \alpha)$, гомеоморфных U; гомеоморфизмами служат $p_\alpha: W_\alpha \to U$ — сужения p на W_α, что следует из соотношения $p = \mathrm{pr}\ \varphi_U$, выражающего коммутативность диаграммы 1.

Таким образом, проекция накрытия $p: E \to B$ является локальным гомеоморфизмом с дискретным, гомеоморфным слою F прообразом $p^{-1}(x)$ над каждой точкой $x \in B$.

Однако обратное неверно: не для всякого локального гомеоморфизма $p: E \to B$ можно построить покрытие пространства B координатными окрестностями U (например, для отображения $p: (a, b) \to S^1$ числового интервала на окружность, задаваемого формулой $p(t) = (\cos t, \sin t)$).

Говорят, что точки из слоя $p^{-1}(x)$ лежат «над» точкой x, а листы W_α «над» U; указанное выше свойство проекции накрытия $p: E \to B$ позволяет «поднимать» подмножества $A \subset U$ в лист W_α, рассматривая прообразы $p_\alpha^{-1}(A)$, а также «поднимать» отображения, пути, гомотопии в X. В соответствии с определением 2 путь $f: I \to E$ называется поднятием пути $g: I \to B$ (накрывающим путь g), если $pf = g$.

Лемма 1. *Пусть $p: E \to B$ — накрытие. Тогда верны следующие утверждения:* 1) *всякий путь γ в B, начинающийся в точке $b_0 \in B$, имеет единственный начинающийся в произвольной фиксированной точке $e_0 \in p^{-1}(b_0)$ накрывающий путь $\tilde{\gamma}$ в E;* 2) *если*

$\gamma = \gamma_1\gamma_2$ — *произведение путей* γ_1, γ_2 *в* B, *то накрывающий путь* $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_2 \cdot \tilde{\gamma}_2$, *где* γ_1, γ_2 *накрывают соответственно* γ_1, γ_2, *причем* $\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(0)$; 3) *если* $\gamma = \gamma_1^{-1}$ — *путь, обратный* γ_1, *то* $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_1^{-1}$, *причем* $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}_1(1)$.

Доказательство. Пусть путь γ задан отображением $\gamma\colon I \to B$, $I = [0, 1]$, $\gamma(0) = b_0$. Каждая точка пути $\gamma(t)$ принадлежит некоторой координатной окрестности U_t, и найдется такая связная окрестность (т. е. интервал) Ω_t точки $t \in I$, что $\gamma(\Omega_t) \in U_t$. Из открытого покрытия $\{\Omega_t\}$ отрезка I выделим конечное покрытие $\{\Omega_{s_i}\}_1^k$. Пусть δ — лебегово число покрытия $\{\Omega_{s_i}\}_1^k$. Разобъем отрезок I на отрезки $\Delta_i = [t_{i-1}, t_i]$ длины, меньшей δ, точками деления t_i, $i = 0, \ldots, N$, $t_N = 1$. Тогда $\gamma(\Delta_i)$ лежит в некоторой координатной окрестности U_i, $i = 1, \ldots, N$. Следовательно, каждый участок γ_i пути γ, задаваемый отображением $\gamma_i\colon \Delta_i \to B$, допускает поднятие $\tilde{\gamma}_i$ в лист W_{α_i}, задаваемое отображением $f_i = p_{\alpha_i}^{-1}\gamma_i\colon \Delta_i \to W_{\alpha_i}$, где $p_{\alpha_i}\colon W_{\alpha_i} \to \to U_i$ — гомеоморфизм на координатную окрестность U_i. В качестве W_{α_1} выберем лист, содержащий точку $e_0 \in p^{-1}(b_0)$, и поднимем участок пути γ_1, тогда $\tilde{\gamma}_1$ начинается в точке e_0. Если $W_{\alpha_{i-1}}$ уже выбран и участок пути γ_{i-1} поднят, то за W_{α_i} выберем лист, содержащий конечную точку $f_{i-1}(t_{i-1})$ участка пути $\tilde{\gamma}_{i-1}$, лежащую над точкой $\gamma(t_{i-1})$. Тогда участок пути $\tilde{\gamma}_i$ имеет начало в точке $f_{i-1}(t_{i-1})$. Таким образом поднимем все участки γ_i, $i = 1, \ldots, N$, пути γ. Поскольку отображения $f_i\colon \Delta_i \to E$, $i = 1, \ldots, N$, согласованы на общих концах соседних промежутков Δ_i, их можно объединить в отображение $f\colon I \to E$, $f(t) = f_i(t)$ при $t \in \Delta_i$. Отображение f и определяет путь $\tilde{\gamma}$, накрывающий путь γ. Единственность накрывающего пути следует из того, что p — локальный гомеоморфизм. Этим доказано утверждение 1). Утверждения 2), 3) очевидны. ■

Замечание. Конструкция координатных окрестностей U_i, $i = 1, \ldots, N$, покрывающих путь $\gamma\colon I \to B$, позволяет доказать биективность слоев F_U над координатными окрестностями, где гомеоморфизм φ_U действует из $p^{-1}(U)$ на $U \times F_U$ (см. определение 6 накрытия и последующее обсуждение). Это очевидно, если $U \subset \subset V \neq \varnothing$, так как для $x \in U \cap V$ имеем $p^{-1}(x) \sim F_U$ и $p^{-1}(x) \sim F_V$. Если $U \cap V = \varnothing$, то, выбрав точки $x \in U$, $y \in V$, соединим их путем $\gamma\colon I \to B$, используя линейную связность B. Для указанного покрытия $\{U_i\}$ слои F_{U_i} гомеоморфны (в дискретной топологии), откуда следует $p^{-1}(x) \sim p^{-1}(y)$ и $F_U \sim F_V$.

Опираясь на доказанную лемму, теперь нетрудно доказать для случая накрытий теорему о накрывающей гомотопии, упомянутую в п. 2.

Теорема 2 (свойство накрывающей гомотопии). *Пусть* (E, B, F, p) *— накрытие,* X *— топологическое пространство,* $f\colon X \to E$ *— отображение и* $\Phi\colon X \times I \to B$ *— такая гомотопия, что* $pf = \Phi\big|_{X\times 0}$. *Тогда существует единственное поднятие* Ψ *гомотопии* Φ, *т. е. такая гомотопия* $\Psi\colon X \times I \to E$, *где* $\Psi\big|_{X\times 0} = f$ *и* $p\Psi = \Phi$.

Доказательство. Гомотопия $\Phi\colon X \times I \to B$ для всякого $x \in X$ задает путь $g_x\colon I \to B$, где $g_x(t) = \Phi(x, t)$, $t \in I$. Точка $f(x)$ лежит над точкой $g_x(0) = \Phi(x, 0)$. Согласно лемме 1 путь g_x единственным образом поднимается в E, $\tilde{g}_x\colon I \to E$, с условием $\tilde{g}_x(0) = f(x)$. Положим $\Psi(x, t) = \tilde{g}_x(t)$. Таким образом, имеем отображение $\Psi\colon X \times I \to E$. Оно накрывает отображение Φ, так как

$$p\Psi(x, t) = p\tilde{g}_x(t) = g_x(t) = \Phi(x, t), \quad (x, t) \in X \times I.$$

При $t = 0$, очевидно, $\Psi(x, 0) = f(x)$, т. е. $\Psi\big|_{X\times 0} = f$.

Следующим упражнением завершается доказательство теоремы.

Упражнение 10°. Докажите, что отображение $\Psi\colon X \times I \to E$ непрерывно.

Лемма о поднятии пути в накрывающее пространство и теорема о накрывающей гомотопии позволяют изучить связь между фундаментальными группами базы B и накрывающего пространства E. Вначале сформулируем прямые геометрические следствия указанных предложений.

Лемма 2. *Пусть* $p\colon E \to B$ *— накрытие,* $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0) \in B$ *— отмеченные точки. Тогда верны утверждения:*

1) *если* α *— замкнутый путь в* E *с началом в точке* e_0, *гомотопный* * *постоянному, то* $\beta = p\alpha$ *— замкнутый путь с началом в точке* b_0 *и также гомотопен постоянному;*

2) *если* α *— путь в* E *с началом в точке* e_0, *накрывающий замкнутый путь* β, *то гомотопия пути* β *поднимается в гомотопию пути* α *с фиксированными концами;*

3) *если* α *— некоторый путь в* E *с началом в точке* e_0, *накрывающий замкнутый путь* β, *гомотопный постоянному пути, то* α *тоже замкнут и гомотопен постоянному пути.*

Доказательство. Утверждение 1) очевидно вследствие непрерывности отображения p. Докажем утверждение 2). Пусть $\beta\colon I \to B$, $\beta(0) = \beta(1) = b_0$ — замкнутый путь в B, а $f_t\colon I \to B$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $f_0 = \beta$, — его гомотопия. Обозначим $\Psi_t\colon I \to E$, $0 \leqslant t \leqslant 1$,

* Как и в гл. III, здесь рассматриваются гомотопии путей с фиксированными концами.

$\Psi_0 = \alpha$ — поднятие гомотопии f_t: $p\Psi_t = f_t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Так как концы пути f_t неподвижны, т. е. $f_t(0) = f_t(1) = b_0$ при всех t, то концы $\Psi_t(0)$, $\Psi_t(1)$ пути Ψ_t принадлежат $p^{-1}(b_0)$ при всех t и непрерывно зависят от t. В силу дискретности топологии слоя $p^{-1}(b_0)$ концы пути $\Psi_t(0)$, $\Psi_t(1)$ постоянны, т. е. гомотопия пути α проходит при закрепленных концах $\alpha(0) = e_0$, $\alpha(1)$. Наконец, докажем утверждение 3). Пусть f_t — гомотопия пути β, а Ψ_t — гомотопия пути α, накрывающая f_t. По условию f_1 — постоянное отображение и $f_1(I) = b_0$, откуда $\Psi_1(I) \subset p^{-1}(b_0)$, т. е. Ψ_1 — отображение в слой над b_0. Образ $\Psi_1(I)$ отрезка I — связное множество, поэтому в силу дискретности топологии слоя $\Psi_1(I) = e_0' \in p^{-1}(b_0)$, в частности, $\Psi_1(0) = \Psi_1(1) = e_0'$. По утверждению 2) гомотопия Ψ_t проходит при неподвижных концах, т. е. $\Psi_t(1) = \alpha(1)$, $\Psi_t(0) = \alpha(0)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Следовательно, $\alpha(1) = \alpha(0) = e_0'$, $\Psi_1(I) = e_0'$, т. е. путь α замкнут и гомотопен постоянному пути. ■

Изучим связь между фундаментальными группами пространства накрытия и базы.

Проекция $p\colon E \to B$ индуцирует гомоморфизм фундаментальных групп $\pi_1(E)$ и $\pi_1(B)$ (см. § 3 гл. III). Действие этого гомоморфизма описывается следующей теоремой.

Теорема 3. *Гомоморфизм p_*: $\pi_1(E) \to \pi_1(B)$ фундаментальных групп, индуцированный проекцией накрытия, является мономорфизмом.*

Доказательство. Пусть $x_0 \in E$, $b_0 \in B$ — отмеченные точки, причем $p(x_0) = b_0$; пусть $\pi_1(E, x_0)$, $\pi_1(B, b_0)$ — фундаментальные группы и p_*: $\pi_1(E, x_0) \to \pi_1(B, b_0)$ — гомоморфизм, индуцированный проекцией $p\colon E \to B$. Рассмотрим прообраз $p_*^{-1}(e)$ единицы группы $\pi_1(B, b_0)$. Достаточно показать, что $p_*^{-1}(e) = e'$, где e' — единица группы $\pi_1(E, x_0)$. Если $[\alpha]^* \in p_*^{-1}(e)$, то α накрывает путь $\beta = p\alpha$, гомотопный постоянному в B. Согласно утверждению 3 путь α также гомотопен постоянному (в E), следовательно, $[\alpha] = e'$. ■

Из теоремы 3 следует, таким образом, что группа $\pi_1(E)$ изоморфна подгруппе группы $\pi_1(B)$ (именно подгруппе $N = p_*(\pi_1(E))$. Рассмотрим смежные классы (например, правые) группы $\pi_1(B)$ по подгруппе N. Имеет место важная теорема.

Теорема 4. *Для всякого накрытия $p\colon E \to B$ слой $p^{-1}(b_0)$ находится в биективном соответствии с множеством смежных классов группы $\pi_1(B)$ по подгруппе N.*

Доказательство. Гомотопическому классу $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ сопоставим точку $x_\beta \in p^{-1}(b_0)$ по следующему правилу: поднимем путь β в путь α в E с началом в точке x_0 (лемма о поднятии пути) и положим $x_\beta = \alpha(1)$; согласно лемме 2 (утверждение 2)) конец пути α не зависит от выбора представителя $\beta \in [\beta]$, следовательно, определено отображение $\pi_1(B, b_0) \to p^{-1}(b_0)$, $[\beta] \mapsto x_\beta$. Если $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ принадлежат одному смежному классу, то $[\beta_1]\cdot[\beta_2]^{-1} \in$ $\in p_*(\pi_1(E, x_0))$; тогда петля $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ с началом в b_0 гомотопна некоторой петле $p\alpha$, где α — петля в E с началом в x_0. Обозначим α' поднятие петли $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ с началом в x_0 и заметим, что петли α и α' гомотопны при фиксированных концах (утверждение 2) леммы 2), следовательно, α' — замкнутая петля, накрывающая петлю $\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$. Но $\alpha' = \tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ по лемме 1 (утверждения 2), 3)). Замкнутость пути $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ означает, что начало пути $\tilde{\beta}_1$ совпадает с началом пути $\tilde{\beta}_2$, а конец пути $\tilde{\beta}_1$ — с концом пути $\tilde{\beta}_2$. Следовательно, $x_{\beta_1} = x_{\beta_2}$. Таким образом, отображение $[\beta] \mapsto x_\beta$ постоянно на каждом смежном классе. При этом разным смежным классам соответствуют разные образы. Действительно, в предположении противного найдутся $[\beta_1]$ и $[\beta_2]$ из разных смежных слассов, но $x_{\beta_1} = x_{\beta_2}$; последнее означает, что концы (и начала) поднятий $\tilde{\beta}_1$, $\tilde{\beta}_2$ совпадают, следовательно, $\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}$ — петля в E с началом в точке x_0, $p(\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}) = \beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$ — петля (с началом в точке b_0), откуда следует, что гомотопический класс $[\beta_1 \cdot \beta_2^{-1}] = [\beta_1]\cdot[\beta_2]^{-1} = p_*[\tilde{\beta}_1 \cdot \tilde{\beta}_2^{-1}]$ этой петли принадлежит $p_*(\pi_1(E, x_0))$, т. е. $[\beta_1]$, $[\beta_2]$ из одного смежного класса вопреки предположению. Наконец, остается показать, что любая точка $\tilde{x} \in p^{-1}(b_0)$ является образом x_β для некоторого $[\beta]$. Рассмотрим путь α, идущий в E из точки x_0 в точку $\tilde{x}$ (используя условие линейной связности E), и положим $\beta = p\alpha$; β — замкнутый путь в B с началом в точке b_0, путь α является его поднятием, следовательно, $x_\beta = \tilde{x}$. ■

Следствие. *Если пространство накрытия $p\colon E \to B$ односвязно, т. е. $\pi_1(E) = 0$, то слой F и фундаментальнаягруппа $\pi_1(B)$ находятся в биективном соответствии.*

Доказательство. Фиксируем $x_0 \in E$, $p(x_0) = b_0$ и рассмотрим $\pi_1(E, x_0) = e'$, $\pi_1(B, b_0)$. Имеем $p_*(\pi_1(E, x_0)) = e$, следовательно, множество смежных классов совпадает с множеством $\pi_1(B, b_0)$. Таким образом, $\pi_1(B, b_0) \sim p^{-1}(b_0) \sim F$ (эквивалентность — биекция).

Определение 7. Накрытие (E, B, F, p) называется *универсальным*, если пространство E односвязно, т. е. $\pi_1(E) = 0$. Пространство E в этом случае называется *универсальным накрывающим пространством.*

Знание универсальных накрытий для некоторых пространств полезно для вычисления фундаментальной группы $\pi_1(B)$.

Пример 6. Накрытие $p: \mathbb{R}^1 \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi it}$, $F = \mathbb{Z}$. Мы уже знаем (§ 3 гл. III), что $\pi_1(\mathbb{R}^1) = 0$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \sim \mathbb{Z}$ (сравните с § 4 гл. III).

Пример 7. Накрытие $p: S^n \to \mathbb{R}P^n$ со слоем $F \sim \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$. Имеем $\pi_1(S^n) = 0$, $n \geqslant 2$, откуда $\pi_1(\mathbb{R}P^n) \sim \mathbb{Z}_2$.

Однако полученные результаты неполны. Установив биекцию группы $\pi_1(B)$ с некоторой группой, мы не можем быть уверены в том, что биекция сохраняет групповые операции, т. е. является гомоморфизмом групп. Усилим теорему 4 и следствие в этом направлении, предположив, что в накрывающем пространстве E задано действие некоторой группы G, согласованное со структурой накрытия.

Будем рассматривать группу G, действующую (слева) на пространстве E, и будем для краткости отождествлять элемент $g \in G$ с соответствующим гомеоморфизмом $h_g: E \to E$ (см. § 5 гл. II).

Определение 8. Говорят, что группа G *действует разрывно* (или что G — *разрывная группа преобразований*), если орбита O_y любой точки $y \in E$ является дискретным подпространством.

Определение 9. Группа преобразований G, действующая в E разрывно, называется *вполне разрывной*, если для всякой точки $y \in E$ найдется такая окрестность $U(y)$ точки y, называемая ниже *элементарной*, что образы $g(U)$, $g \in G$, попарно не пересекаются.

Определение 10. Говорят, что группа G *действует в E свободно* (или *без неподвижных точек*), если $g(y) \neq y$ для всякого $y \in E$, каков бы ни был элемент $g \in G$, $g \neq e$.

Очевидно, что вполне разрывная группа преобразований G действует свободно. Если E хаусдорфово, группа G конечна и действует свободно, то G — вполне разрывная группа (проверьте!).

Пусть G — вполне разрывная группа преобразований пространства E. Рассмотрим пространство орбит $E/G = B$ и естественную проекцию $p: E \to B$ (см. § 5 гл. II).

Лемма 3. *Пусть E — линейно связное пространство, а G — вполне разрывная группа преобразований в E. Тогда p: $E \to E/G = B$ является накрытием со слоем $p^{-1}(b)$, $b \in B$, равным орбите O_y точки y, $p(y) = b$.*

Доказательство. По определению пространства орбит проекция p — непрерывное отображение и $p^{-1}(b) = O_y$, если $p(y) = b$, причем $O_y \sim G$. Линейная связность пространства $p(E) = B$ следует из линейной связности E и непрерывности p. Остается построить координатные окрестности в B. Пусть $U(y)$ — элементарная окрестность точки $y \in E$, $b = O_y$ — орбита точки y и $V(b)$ — открытая окрестность точки $b \in B$, состоящая из всех орбит O_z, $z \in U_y$, проходящих через окрестность $U(y)$. Для вполне разрывной группы G и элементарной окрестности $U(y)$ имеем $p^{-1}(V) = \bigcup_{g\in G} g(U)$, причем $g(U)$ открыты в E и не пересекаются. Образ $g(U)$ — это «лист» W_g над V накрытия $p: E \to B$. Действительно, $p^{-1}(V) = \bigcup_{g\in G} W_g$, при этом W_g гомеоморфен V, так как сужение $p_g = p\big|_{W_g}: W_g \to V$ — гомеоморфизм в силу биективности и открытости отображения p_g. Окрестность $V(b)$ является координатной, так как определен гомеоморфизм $\varphi_V: p^{-1}(V) \to V\times G$ (G рассматривается с дискретной топологией), задаваемый на открытых непересекающихся множествах W_g отображениями p_g: $W_g \to V\times g$ для всякого $g \in G$. ■

Пример 8. Накрытие $p: S^{2n+1} \to L(k, k_1, \ldots, k_n)$ сферы над обобщенным линзовым пространством, определяемое проекцией комплексной сферы $S^n_{\mathbb{C}}$ (гомеоморфной S^{2n+1}) на факторпространство орбит $L(k, k_1, \ldots, k_n)$ по действию группы $\mathbb{Z}_k$ (см. § 5 гл. II). Слой этого накрытия совпадает с орбитой группы $\mathbb{Z}_k$, т. е. состоит из k элементов. Так как $\pi_1(S^{2n+1}) = 0$, то $\pi_1(L) \sim \mathbb{Z}_k$.

Пример 9. Рассмотрим $E = \mathbb{R}^n$ как абелеву группу; она содержит подгруппу $\mathbb{Z}^n$ всех векторов с целочисленными координатами. Факторгруппа $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$, наделенная фактортопологией, называется n-мерным тором T^n. Факторотображение $p: \mathbb{R}^n \to T^n$ является накрытием со слоем $\mathbb{Z}^n$. Так как $\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0$, то заключаем $\pi_1(T^n) \sim \mathbb{Z}^n$.

Для накрытий $p: E \to E/G = B$ верна

Лемма 4. *В условиях леммы 3 подгруппа $N = p_*(\pi_1(E, e_0))$ фундаментальной группы $\pi_1(B, b_0)$, где $p(e_0) = b_0$, является нормальным делителем.*

Доказательство. Пусть $[\beta] \in N$, $[\beta_1] \in \pi_1(B, b_0)$. Проверим, что $[\gamma] = [\beta_1]^{-1}\cdot[\beta]\cdot[\beta_1] \in N$. Поднимем путь $\gamma = \beta_1^{-1}\cdot\beta\cdot\beta_1$ в путь $\tilde\gamma = \tilde\beta_1^{-1}\cdot\tilde\beta\cdot\tilde\beta_1$, где $[\tilde\beta] \in \pi_1(E, e_0)$, $\tilde\beta_1$ идет из точки e_0 в точку e_1, $p(e_1) = b_0$, $\tilde\beta_1^{-1}$ идет из точки e_1 в точку e_0. Следовательно, $\tilde\gamma$ — петля в точке e_1, и $p\tilde\gamma = \gamma$. Так как слой $p^{-1}(b_0)$ является орбитой O_{e_1} группы G, то найдется элемент $g_1 \in G$ такой, что $g_1(e_1) = e_0$. Гомеоморфизм g_1 отображает петлю $\tilde\gamma$ в петлю $g_1\tilde\gamma$ в точке e_0, так что $[g_1\tilde\gamma] \in \pi_1(E, e_0)$. Путь $g_1\tilde\gamma$ накрывает путь γ, так как отображение p постоянно на орбитах группы G, следовательно, $p(g_1\tilde{\gamma}) = \gamma$ и $[\gamma] = p_*([g_1\tilde{\gamma}])$, т. е. $[\gamma] \in N$. ■

Накрытия, у которых подгруппа $N = p_*(\pi_1(E, e_0))$ является нормальным делителем, называют *регулярными*.

Для регулярных накрытий множество смежных классов группы $\pi_1(B, b_0)$ по подгруппе N является факторгруппой.

Прежде чем перейти к вычислению $\pi_1(F/G)$, введем важное понятие группы монодромии накрытия.

Пусть p: $E \to B$ — накрытие и $b_0 \in B$ — фиксированная точка в базе. Определим действие группы $\pi_1(B, b_0)$ в слое $p^{-1}(b_0) \sim F$. Пусть $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ и $e_\alpha \in p^{-1}(b_0)$ — произвольная точка слоя над b_0, занумерованная элементом $\alpha \in F$. Пусть $\tilde{\beta}$ — поднятие пути β в точку e_α; положим $e_{\alpha'} = \tilde{\beta}(1)$, где α' — элемент слоя, содержащий $\tilde{\beta}(1)$. Мы уже знаем, что $\tilde{\beta}(1)$ не зависит от выбора пути β из класса $[\beta]$, но зависит от класса $[\beta]$. Таким образом, класс $[\beta]$ определяет отображение σ_β: $p^{-1}(b_0) \to p^{-1}(b_0)$ по правилу $e_\alpha \mapsto e_{\alpha'}$ (или отображение σ_β: $F \to F$ по правилу $\alpha \mapsto \alpha'$). ■

Легко видеть, что отображение σ_β биективно накрывает пространство $p^{-1}(b_0)$.

Очевидны равенства: $\sigma_{\beta_1, \beta_2} = \sigma_{\beta_2}\sigma_{\beta_1}$, $\sigma_\beta = 1_F$, если $\beta \in e$ (единице $\pi_1(B, b_0)$), $\sigma_{\beta^{-1}} = \sigma_\beta^{-1}$, следующие из леммы 1 о поднятии путей.

Эти равенства означают, что соответствие σ: $[\beta] \mapsto \sigma_\beta$ является представлением группы $\pi_1(B, b_0)$ «гомеоморфизмами», т. е. «перестановками» дискретного пространства $p^{-1}(b_0)$ (или F). Это представление σ называется *монодромией накрытия*, а множество перестановок $\{\sigma_\beta\}$, $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ — *группой монодромии накрытия.*

Таким образом, монодромия σ — это гомоморфизм * группы $\pi_1(B, b_0)$ в группу всех перестановок слоя.

Из теоремы 3 следует, что точка $e_\alpha \in p^{-1}(b_0)$ является неподвижной для тех и только тех перестановок σ_β, для которых $[\beta] \in p_*(\pi_1(E, e_\alpha))$. Как говорят, $p_*(\pi_1(e_\alpha))$ — стационарная подгруппа точки e_α в группе $\pi_1(B, b_0)$, действующей на слое $p^{-1}(b_0)$. Более того, $\sigma_\beta(e_\alpha) = \sigma_{\beta'}(e_\alpha)$ в том и только том случае, когда $[\beta']$ принадлежит $p_*(\pi_1(E, e_\alpha))[\beta]$ — смежному классу, содержащему элемент $[\beta]$ (откуда немедленно следует и теорема 4). Для различных точек e_α, $e_{\alpha'} \in p^{-1}(b_0)$ подгруппы $p_*(\pi_1(E, e_\alpha))$, $p_*(\pi_1(E, e_{\alpha'}))$ сопряжены

* Более строго было бы назвать монодромию «антигомоморфизмом»; если же изменить порядок записи умножения в $\pi_1(B, b_0)$ или в группе всех перестановок слоя, то монодромия станет «настоящим» гомоморфизмом.

относительно того элемента $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$, для которого $\sigma_\beta(e_\alpha) = e_{\alpha'}$; действительно, если $\tilde\beta$ — соответствующий накрывающий путь, то соответствие $\gamma \mapsto \gamma' = \tilde\beta^{-1}\cdot\gamma\cdot\tilde\beta$, где $[\gamma] \in \pi_1(E, e_\alpha)$, устанавливает изоморфизм между $\pi_1(E, e_\alpha)$ и $\pi_1(E, e_{\alpha'})$, переводящийся мономорфизмом p_* в изоморфизм $p_*(\pi_1(E, e_\alpha)) \to$ $\to [\beta]^{-1}p_*(\pi_1(E, e_\alpha))[\beta] = p_*(\pi_1(E, e_{\alpha'}))$.

Вычислим группу монодромии $\{\sigma_\beta\}$ для накрытия $p\colon E \to E/G = B$, порожденного вполне разрывной группой преобразований G.

Лемма 5. *Группа монодромии накрытия $p\colon E \to E/G = B$, порожденного вполне разрывной группой преобразований линейно связного пространства E, изоморфна G.*

Доказательство. Пусть $e_0 \in E$, $b_0 = p(e_0)$ — отмеченные точки. Имеем $p^{-1}(b_0) = O_{e_0}$, где O_{e_0} — орбита точки e_0 группы G, т. е. множество точек $\{g(e_0)\}$, $g \in G$. Пусть $[\beta] \in \pi_1(B, b_0)$ и σ_β — соответствующее преобразование монодромии. Тогда найдется $g_\beta \in G$ такой, что $\sigma_\beta(e_0) = g_\beta(e_0)$, откуда $\sigma_\beta(g(e_0)) = g(\sigma_\beta(e_0))$ для $\forall g \in G$. Соответствие $\sigma_\beta \to g_\beta$ задает гомоморфизм группы монодромии в группу G. Действительно, если $\sigma_{\beta_2}\cdot\sigma_{\beta_1}$ — суперпозиция σ_{β_1} и σ_{β_2}, то $(\sigma_{\beta_2}\cdot\sigma_{\beta_1})e_0 = \sigma_{\beta_2}(g_{\beta_1}e_0) = g_{\beta_1}(g_{\beta_2}e_0) = (g_{\beta_1}g_{\beta_2})e_0$, следовательно, $\sigma_{\beta_2}\cdot\sigma_{\beta_1} \mapsto g_{\beta_1}\cdot g_{\beta_2}$.

Далее, перестановка $\sigma_\beta^{-1} = \sigma_{\beta^{-1}}$ соответствует g_β^{-1}, а тождественная перестановка $\sigma_\beta = 1_{O_{e_0}}$ ($[\beta] = e$) соответствует $g_\beta = e_G$ — единице группы G. Покажем, что гомоморфизм $\sigma_\beta \mapsto g_\beta$ есть мономорфизм группы монодромии в группу G. Действительно, если $g_\beta = e_G$, то $\sigma_\beta(ge_0) = ge_Ge_0 = ge_0$ для всякого $g \in G$ и, следовательно, σ_β — тождественное отображение слоя O_{e_0}.

Эпиморфность гомоморфизма $\sigma_\beta \mapsto g_\beta$ следует из линейной связности E, позволяющей соединить некоторым путем α точку e_0 с точкой g_*e_0, где $g_* \in G$ произвольно, так что α является поднятием петли $\beta_* = p\alpha$ и $\sigma_{\beta_*}e_0 = \alpha(1) = g_*(e_0)$, следовательно, $\sigma_{\beta_*} \mapsto g_*$. Таким образом, установлен изоморфизм группы монодромии с группой G.∎

Теперь нетрудно доказать основную теорему.

Теорема 5. *Для накрытия $p\colon E \to E/G = B$, порожденного вполне разрывной группой преобразований G линейно связного пространства E, факторгруппа группы $\pi_1(B, b_0)$ по нормальному делителю $p_*(\pi_1(E, e_0))$, $p(e_0) = b_0$, изоморфна группе G.*

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $s\colon \pi_1(B, b_0) \to G$, задаваемый композицией гомоморфизма группы $\pi_1(B, b_0)$ в группу монодромии накрытия и изоморфизма группы монодромии в группу G, т. е. гомоморфизм, задаваемый соответствием $[\beta]\mapsto\sigma_\beta\mapsto g_\beta$. Прообраз $s^{-1}(e_G)$ состоит из тех классов $[\beta]$, для которых $g_\beta = e_G$, т. е. σ_β — тождественное преобразование слоя $p^{-1}(b_0)$. Следовательно, $s^{-1}(e_G) = p_*(\pi_1(E, e_0))$, и факторгомоморфизм $\widehat{s}$: $\pi_1(B, b_0)/p_*(\pi_1(E, e_0)) \to G$ — изоморфизм.■

Следствие. *Если накрытие* $p\colon E \to E/G = B$ *универсально, то группа* $\pi_1(B)$ *изоморфна группе* G.

Вернемся к примерам 6, 7, 8, 9.

Универсальное накрытие $p\colon \mathbb{R}^1 \to S^1$, $p(t) = e^{2\pi i t}$, порождено вполне разрывной группой преобразований трансляций $t \mapsto t + n$, $n \in \mathbb{Z}$, оси $\mathbb{R}^1$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ (изоморфизм). Группа монодромии также $\mathbb{Z}$ и действует на слое $F \sim \mathbb{Z}$ трансляциями $m \mapsto m + n$.

Универсальное накрытие $p\colon S^n \to \mathbb{R}\mathrm{P}^n$, $n \geqslant 2$, порождено вполне разрывной группой преобразований $\mathbb{Z}_2$ с образующей $a\colon S^n \to S^n$, действующей по правилу $a(x) = -x$, следовательно, $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$, $n \geqslant 2$. Группа монодромии есть $\mathbb{Z}_2$ и действует на слое $F = p^{-1}(b_0) = \{x_0, -x_0\}$, $x_0 \in S^n$; для образующей σ имеем $\sigma(x_0) = -x_0$, $\sigma(-x_0) = x_0$, т. е. σ переставляет точки слоя. Соответствующий элементу σ образующий элемент группы $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n, b_0)$ образован гомотопическим классом пути $p\gamma$, где γ — путь на S^n, соединяющий точки x_0, $-x_0$.

Универсальное накрытие p: $S^{2n+1} \to L(k; k_1, \ldots, k_n)$ порождено вполне разрывным действием группы $\mathbb{Z}_k$ с образующей a: $S^{2n+1} \to S^{2n+1}$. Следовательно, $\pi_1(L) \simeq \mathbb{Z}_k$, группа монодромии также $\mathbb{Z}_k$ и действует на слое; ее образующая соответствует образующей $[\gamma] \in \pi_1(L)$, где γ — проекция пути в S^{2n+1}, соединяющего точку x_0 с точкой $a(x_0)$ (найдите a, $a(x_0)$, основываясь на п. 3 § 5 гл. II).

Универсальное накрытие $p\colon \mathbb{R}^n \to T^n$ порождено вполне разрывным действием группы $\mathbb{Z}^n$ с образующими a_i, действующими по правилу

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + 1, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$
$$i = 1, \ldots, n.$$

Следовательно, $\pi_i(T^n) \simeq \mathbb{Z}^n$, а образующие $[\gamma_i]$, $i = 1, \ldots, n$, группы $\pi_1(T^n)$ содержат петли γ_i, полученные проекцией p из путей в $\mathbb{R}^n$, соединяющих точку 0 с точками $a_i(0)$. Группа монодромии действует на слой $F \sim \mathbb{Z}^n$, ее образующие σ_{a_i}, $i = 1, \ldots, n$, действуют на целочисленные векторы из $\mathbb{Z}^n$ по правилу

$$(k_1, \ldots, k_n) \mapsto (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \ldots, k_n).$$

Для изучения универсальных накрытий на базу накрытия необходимо наложить более сильные условия, чем линейная связность. Введем следующие определения.

Определение 11. Топологическое пространство X называется *локально линейно связным*, если для каждой точки $x \in X$ существует

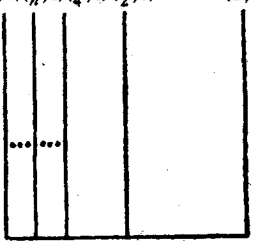

Рис. 107

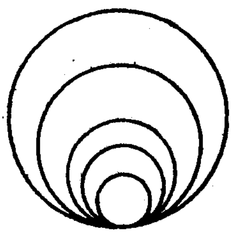

Рис. 108

база открытых линейно связных окрестностей. Если окрестности базы дополнительно обладают свойством односвязности, то пространство называется *локально односвязным*.

Нетрудно привести примеры локально линейно связных и локально односвязных пространств (например, евклидовы пространства $\mathbb{R}^n$ или многообразия). Локально односвязное пространство не обязано быть односвязным — например окружность S^1. На рис. 107 изображено пространство («гребенка»), которое линейно связно, но не обладает свойствами локальной линейной связности (а следовательно, и локальной односвязности). Рис. 108, изображающий бесконечную последовательность окружностей радиусов $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, имеющих общую точку касания, иллюстрирует линейно связное и локально линейно связное, но не локально односвязное пространство.

Однако для дальнейших построений достаточно предполагать выполнение более слабого условия, чем локальная односвязность пространства. Это условие содержится в следующем определении.

Определение 12. Топологическое пространство X называется *полулокально односвязным*, если для всякой точки $x \in X$ существует окрестность, в которой любые два пути с общими концами гомотопны по крайней мере во всем пространстве (или, эквивалентным образом, в которой любая петля стягиваема по крайней мере во всем пространстве).

Нетрудно видеть, что если пространство X локально линейно связно и полулокально односвязно, то в каждой точке $x \in X$ существует база открытых линейно связных окрестностей, обладающих тем свойством, что любые два пути с общими концами в окрестности из этой базы гомотопны во всем пространстве X.

Примером полулокально односвязного, но не локально односвязного пространства может служить конус над пространством, изображенным на рис. 108.

Заметим еще, что связное и локально линейно связное пространство является линейно связным.

Термин «универсальное накрытие» связан с тем, что односвязное пространство, накрывающее B, является накрывающим пространством над любым другим пространством, накрывающим B. Более точно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть* $(\tilde E, B, \tilde F, \tilde p)$ — *универсальное накрытие над связным, локально линейно связным пространством* B. *Для любого накрытия* (E, B, F, p) *над* B *существует сюръективное отображение* $f\colon \tilde E \to E$ *такое, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \tilde E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\tilde p"'] & & E \arrow[dl, "p"] \\ & B & \end{tikzcd} \tag{4}$$

коммутативна. При этом отображение f *является проекцией накрытия* $(\tilde E, E, F', f)$, *слой* F' *которого — дискретное пространство, находящееся в биективном соответствии с группой* $\pi_1(E)$.

Доказательство. Проведем его в несколько этапов.

1. Отображение f строится следующим образом. Пусть $b_0 \in B$, $e_0 \in p^{-1}(b_0) \subset E$, $\tilde e_0 \in \tilde p^{-1}(b_0) \subset \tilde E$. Построим отображение f как поднятие отображения $\tilde p\colon \tilde E \to B$, удовлетворяющее условию $f(\tilde e_0) = e_0$. Для произвольной точки $x \in \tilde E$ рассмотрим путь $\gamma\colon I \to \tilde E$ с началом в $\tilde e$ и концом в x. Согласно лемме 1 существует единственное поднятие $\xi_\gamma\colon I \to E$ пути $\tilde p\gamma\colon I \to B$, $\xi_\gamma(0)6 = e_0$. Положим $f(x) = \xi_\gamma(1)$. Поскольку пространство $\tilde E$ односвязно, отображение f определено корректно. Действительно, любые два пути, γ, ω, в $\tilde E$ из x в y гомотопны (с фиксированными концами), следовательно, гомотопны их проекции $\tilde p\gamma$, $\tilde p\omega$ в B и поднятия последних ξ_γ, ξ_ω (с общим началом) в E. Согласно лемме 2 ξ_γ и ξ_ω имеют общий конец. Коммутативность диаграммы (4) очевидна.

Отображение f является непрерывным и, более того, локальным гомеоморфизмом. Это легко увидеть для достаточно малых окрестностей точек $\tilde e_0$ и e_0, именно, листов $\tilde W_\alpha$, W_β, лежащих в $\tilde E$, E над линейно связной координатной окрестностью V. Действительно, для путей γ, лежащих в окрестности $\tilde W_\alpha$, получим $\xi_\gamma = (p_\beta^{-1}\tilde p_\alpha)\gamma$, следовательно, отображение $f\big|_{\widetilde{W}_\alpha} = p_\beta^{-1}\widetilde{p}_\alpha$ — локальный гомеоморфизм. Чтобы убедиться в этом факте для любой пары точек $x \in \widetilde{E}$, $y \in E$, где $f(x) = y$, достаточно заметить, что x, y можно принять за новые отмеченные точки $\widetilde{e}_0$, e_0, и отображение f при этом не изменится (проверку этого предоставим читателю).

2. Покажем сюръективность f. Пусть y — произвольная точка из E, рассмотрим путь $\gamma\colon I \to E$ с началом в e_0 и концом в y. Для пути $p\gamma\colon I \to B$ существует единственное поднятие $\eta_\gamma\colon I \to \widetilde{E}$ с началом в $\widetilde{e}_0$ и концом в некоторой точке $x = \eta_\gamma(1)$. Тогда пути $f\eta_\gamma$ и γ имеют общее начало и накрывают один и тот же путь $p\gamma$ в B. Поэтому $f\eta_\gamma(1) = \gamma(1)$, т. е. $f(x) = y$, что и означает сюръективность f.

3. Покажем, что $f\colon \widetilde{E} \to E$ — проекция накрытия. Для произвольной точки $e \in E$ рассмотрим пересечение $\Omega = U \cap V$ содержащих точку $p(e)$ координатных окрестностей U и V для накрытий $(\widetilde{E}, B, \widetilde{F}, \widetilde{p})$ и (E, B, F, p) соответственно. Окрестность Ω является координатной для обоих рассматриваемых накрытий; без ограничения общности ее можно считать линейно связной. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \widetilde{p}^{-1}(\Omega) \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\widetilde{p}"'] & & p^{-1}(\Omega) \arrow[dl, "p"] \\ & \Omega & \end{tikzcd}$$

В ней сужение отображения f на любой лист $\widetilde{W}_\alpha$ из $\widetilde{p}^{-1}(\Omega)$ есть гомеоморфизм

$$f\big|_{\widetilde{W}_\alpha}\colon \widetilde{W}_\alpha \to W_\beta, \quad f_{\widetilde{W}_\alpha} = p_\beta^{-1}\widetilde{p}_\alpha,$$

где $W_\beta = f(\widetilde{W}_\alpha)$ — лист из $p^{-1}(\Omega)$.

Возьмем лист W_β, содержащий некоторую точку e. Множество тех листов $\widetilde{W}_\alpha$, из которых состоит прообраз $f^{-1}(W_\beta)$, обозначим F'_β; $\widetilde{W}_\alpha \in \widetilde{F}_\beta$ — это компоненты связности прообраза $f^{-1}(W_\beta)$. Наделим множество F'_β дискретной топологией. Определим отображение

$$\psi_{W_\beta}\colon f^{-1}(W_\beta) \to W_\beta \times F'_\beta$$

формулой

$$\psi_{W_\beta}(x) = (f(x), c(x)),$$

где $c(x)$ — содержащая точку $f(x)$ компонента связности, играющая роль «номера листа». Очевидно, ψ_{W_β} — локальный гомеоморфизм и биекция, а следовательно, — гомеоморфизм.

Тем самым для произвольной точки $e \in E$ построены координатная окрестность W_β и координатный гомеоморфизм ψ_{W_β} (коммутативность соответствующей диаграммы очевидна). В силу замечания об определении накрытия слой F'_β с точностью до биекции не зависит от выбора точки e и координатной окрестности $W_\beta \subset E$.

4. Итак, $f: \tilde{E} \to E$ — накрытие. Поскольку оно универсально ($\pi_1(\tilde{E}) = 0$), его слой F' находится в биективном соответствии с группой $\pi_1(E)$.■

Следствие. *Два любых универсальных накрытия,* (E_1, B, F_1, p_1) *и* (E_2, B, F_2, p_2), *над связным, локально линейно связным пространством B эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм* $f: E_1 \to E_2$ *такой, что диагоамма*

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p_1"'] & & E_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Доказательство. Локальный гомеоморфизм, устанавливаемый теоремой 6, является биекцией в силу теоремы 4.■

Переходим к теореме существования универсального накрытия.

Теорема 7. *Пусть X — связное, локально линейно связное, полулокально односвязное пространство. Тогда существует универсальное накрытие над X.*

Доказательство. Заметим вначале, что если в базе накрытия гомотопируется с фиксированными концами некоторый путь, то накрывающий путь также гомотопируется с фиксированными концами. Следовательно, точкам e односвязного накрывающего пространства биективно соответствуют гомотопические классы путей в базе с началами в отмеченной точке x_0 и с концами в проекциях $p(e)$ точек e. Это свойство позволяет «обра́тить конструкцию» и восстанавливать односвязное накрывающее пространство по гомотопическим классам путей базы.

Итак, пусть x_0 — фиксированная точка в X. Рассмотрим некоторый гомотопический класс $[\gamma_x]$ путей γ_x в X с началом в точке x_0 и с концом в некоторой точке $x \in X$. Множество $\Gamma(x)$ всех таких классов при фиксированном x будет служить слоем над точкой x, а объединение $E = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$ всех слоев — пространством накрытия. Проекция $p: E \to X$ определяется естественным образом: классу $[\gamma_x]$ проекция p сопоставляет точку x. Очевидно, что $p^{-1}(x) = \Gamma(x)$.

В первую очередь построим топологию E. Для каждой точки $[\gamma_x] \in E$ зададим базу открытых окрестностей $\{\Omega_U([\gamma_x])\}$ следующим образом. Пусть U — произвольная открытая линейно связная окрестность точки x. В качестве окрестности точки $[\gamma_x]$ возьмем $\Omega_U([\gamma_x])$ — множество гомотопических классов $[\gamma_y]$ тех путей γ_y из x_0 в $y \in U$, которые являются произведениями $\gamma_y = \gamma_x \cdot \beta_y$ некоторого пути из класса $[\gamma_x]$ на путь β_y из x в y, лежащий в U; $[\gamma_y]$ зависит лишь от $[\gamma_x]$ и гомотопического класса $[\beta_y]$ пути β_y. Окрестность $\Omega_U([\gamma_x])$ является «открытой», т. е. окрестностью каждой своей точки: $\Omega_U([\gamma_y]) = \Omega_U([\gamma_x])$, если $[\gamma_y] \in \Omega_U([\gamma_x])$. Действительно, $\gamma_y = \gamma_x \cdot \beta_y$, $\gamma_y \cdot \beta_y^{-1} \sim \gamma_x \cdot (\beta_y \cdot \beta_y^{-1})$, и так как $\beta_y \cdot \beta_y^{-1}$ — петля в точке x, гомотопная постоянному пути, то $\gamma_x \sim \gamma_y \cdot \beta_y^{-1}$ (гомотопия с фиксированными концами). Поскольку $\beta_y^{-1} = \beta_x$ — путь в U из y в x, получаем $\gamma_x \sim \gamma_y \cdot \beta_x$. Если теперь $[\gamma_z] \in \Omega_U([\gamma_x])$, то $\gamma_z = \gamma_x \cdot \beta_z \sim \gamma_y \cdot (\beta_x \cdot \beta_z)$; если же $[\gamma_z] \in \Omega_U([\gamma_y])$, то $\gamma_z = \gamma_y \cdot \beta'_z \sim \gamma_x \cdot (\beta_y \cdot \beta'_z)$; отсюда делаем вывод о совпадении окрестностей $\Omega_U([\gamma_x])$, $\Omega_U([\gamma_y])$. Проведенные рассуждения иллюстрирует рис. 109.

Заметим, что в силу полулокальной односвязности пространства X существует такая линейно связная открытая окрестность V точки x, для которой гомотопический класс произведения $\gamma_y = \gamma_x \cdot \beta_y$ не зависит от выбора пути β из x в y. Окрестность V будет служить координатной окрестностью конструируемого накрытия. Окрестности Ω_V также образуют базу окрестностей точки γ_x.

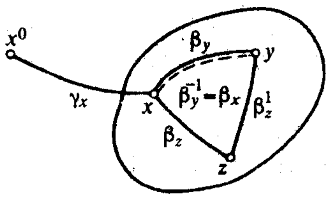

Рис. 109

Теперь проверим непрерывность отображения p. Для этого достаточно убедиться, что $p^{-1}(U)$ открыто для всякой линейно связной открытой окрестности U точки x. Пусть $[\gamma_y] \in p^{-1}(U)$. Тогда $[\gamma_y]$ содержится в $p^{-1}(U)$ вместе с некоторой своей окрестностью, именно, окрестностью $\Omega_U([\gamma_y])$, т. е. $p^{-1}(U)$ открыто.

Далее покажем, что p — локальный гомеоморфизм. Для этого выберем «координатную окрестность» V точки $x \in X$ и окрестность $\Omega_V([\gamma_x])$ некоторой фиксированной точки $[\gamma_x]$ слоя $\Gamma(x)$. Если $[\gamma_y]$ — произвольная точка из этой окрестности, то $\gamma_y = \gamma_x \cdot \beta_y$, причем всевозможные пути β_y (из x в y в V) в силу полулокальной односвязности попадают в единственный гомотопический класс $[\beta_y]$. Следовательно, соответствие $[\gamma_y] \mapsto y$, задающее отображение p: $\Omega_V([\gamma_x]) \to V$, биективно. Более того, отображение $p\big|_{\Omega_V}$:

$\Omega_V([\gamma_x]) \to V$ — гомеоморфизм, так как оно непрерывно (как сужение непрерывного отображения p: $E \to X$ на открытое множество) и открыто (так как $p(\Omega_W([\gamma_y]) = W$ для любой «координатной окрестности» $W \subset V$ точки y и $[\gamma_y] \in \Omega_V([\gamma_x])$) (рис. 110).

Таким образом, p — локальный гомеоморфизм между E и X, при этом для «координатной окрестности» точки $x \in X$ имеем $p^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\alpha\in\Gamma(x)} W_\alpha$, где при $\alpha = [\gamma_x]$ $W_\alpha = \Omega_V([\gamma_x])$ и $p_\alpha = p\Big|_{W_\alpha}: W_\alpha \to V$ — гомеоморфизмы; каждое W_α открыто в E и линейно связно. Более того, при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ $W_{\alpha_1} \cap W_{\alpha_2} = \varnothing$. Действительно, в предположении противного найдутся негомотопные пути γ_x^1, γ_x^2 и путь γ_z, $z \in V$, такие, что $[\gamma_z]$ лежит в пересечении окрестностей $\Omega_V([\gamma_x^1])$, $\Omega_V([\gamma_x^2])$. По предыдущему $\gamma_z \sim \gamma_x^1 \cdot \beta_z$, $\gamma_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z'$ (гомотопии с фиксированными концами). Так как $\beta_z' \sim \beta_z$ в силу полулокальной односвязности X, то $\gamma_z \sim \gamma_x^1 \cdot \beta_z$, $\gamma_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z$, т. е. $\gamma_x^1 \cdot \beta_z \sim \gamma_x^2 \cdot \beta_z$; умножив обе части последнего соотношения на β_z^{-1} и учитывая, что петля $\beta_z \cdot \beta_z^{-1}$ гомотопна постоянной, получим $\gamma_x^1 \sim \gamma_x^2$, в противоречии с исходным предположением.

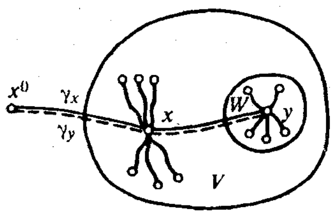

Рис. 110

Таким образом, $p^{-1}(V)$ распадается в объединение непересекающихся листов W_α, открытых, линейно связных в E (и гомеоморфных V), где α пробегает слой $\Gamma(x)$.

Теперь естественно определить координатный гомеоморфизм φ_V: $p^{-1}(V) \to V \times \Gamma(x)$, приняв за «координаты» точки $[\gamma_y] \in p^{-1}(V)$ «номер» листа W_α, которому она принадлежит, и точку $y \in V$ — проекцию точки $[\gamma_y]$ при гомеоморфизме $p_\alpha = p\Big|_{W_\alpha}: W_\alpha \to V$; таким образом, положим $\varphi_V([\gamma_y]) = (y, [\gamma_x])$, если $[\gamma_y] \in \Omega_V([\gamma_x])$. Из вышеизложенного очевидно, что определение отображения φ_V корректно. Остается показать, что φ_V — гомеоморфизм открытого множества $p^{-1}(V)$ в E и топологического произведения $V \times \Gamma(x)$, где $\Gamma(x)$ рассматривается с дискретной топологией.

Биективность φ_V следует очевидным образом из вышеприведенных построений. Непрерывность φ_V следует из непрерывности двух отображений, p: $p^{-1}(V) \to V$, $p([\gamma_y]) = y$, и q_V: $p^{-1}(V) \to \Gamma(x)$, $q_V([\gamma_y]) = [\gamma_x]$, участвующих в определении φ_V. Непрерывность p установлена ранее, а непрерывность q_V следует из того, что q_V локально постоянно (на каждом листе $W_\alpha = \Omega_V([\gamma_x]))$. Непрерывность φ_V^{-1} является следствием дискретности топологии слоя $\Gamma(x)$ и того, что $p_\alpha\colon W_\alpha \to V$ — гомеоморфизм. Действительно, базу открытых окрестностей точки $\{y \times \alpha\} \in V \times \Gamma(x)$ образуют множества $S(y) \times \alpha$, где $S(y) \subset V$ — линейно связная открытая окрестность точки y, и прообраз $\varphi_V^{-1}(S(y) \times \alpha)$ равен $p_\alpha^{-1}(S(y))$ — открытому подмножеству в W_α.

Таким образом, φ_V — гомеоморфизм. Коммутативность диаграммы, требуемой в определении координатного гомеоморфизма, очевидна.

Убедимся в линейной связности пространства E. Для этого достаточно показать, что произвольную точку $[\gamma_x]$ из E можно соединить путем в E с точкой $[C_{x_0}]$ — гомотопическим классом постоянного пути (в точке x_0). Пусть $\gamma_x\colon I \to X$ — представитель класса $[\gamma_x]$. Определим путь $\zeta^s\colon I \to X$ при фиксированном s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, формулой $\zeta^s(t) = \gamma_x(st)$. Сопоставляя числу s гомотопический класс $[\zeta^s]$ пути ζ^s, получаем отображение $\omega\colon I \to E$, удовлетворяющее условиям $\omega(0) = [C_{x_0}]$, $\omega(1) = [\gamma_x]$. Непрерывность отображения ω легко устанавливается на достаточно малых промежутках в $[0, 1]$, образы которых попадают в координатные окрестности $\Omega_V([\gamma_z])$, где $z = \gamma_x(s)$. Следовательно, ω — путь в E с началом в $[C_{x_0}]$ и концом в $[\gamma_x]$, откуда следует линейная связность E.

Итак, $(E, X, \Gamma(x), p)$ — накрытие. Чтобы завершить доказательство теоремы, установим односвязность пространства E. Рассмотрим петлю φ пространства E в точке e_0, где e_0 — гомотопический класс постоянного отображения C_{x_0}. Покажем, что петля $\gamma = p\varphi\colon I \to X$ (в точке x_0) гомотопна постоянной. Заметим, что в силу конструкции пространства E для произвольного пути $\xi\colon I \to X$ с началом в x_0 и его единственного накрывающего пути $\eta\colon I \to E$ с началом в e_0 конец $\eta(1)$ пути η — это гомотопический класс пути ξ (в классе путей с фиксированными концами). Поскольку φ является единственным путем с началом в e_0, накрывающим путь γ, получаем $\varphi(1) = [\gamma] = [C_{x_0}] = e_0$, т. е. пути γ и C_{x_0} гомотопны с фиксированными концами, что и означает стягиваемость петли $\gamma = p\varphi$. В силу того, что проекция p индуцирует мономорфизм фундаментальных групп, петля φ также гомотопна постоянной.

Следовательно, $\pi_1(E, e_0) = 0$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Отметим, что условие (3) $(n = 1)$

$$f_1(\pi_1(X, x_0)) \subset p_*(\pi_1(E, e_0)),$$

необходимое для поднятия отображения $f\colon X \to B$, является достаточным для связного, локально линейно связного пространства X. Конструкция поднятия в этом случае основана на поднятии путей вида $f\alpha$, где α — путь в X с началом в x_0 и концом в произвольной точке x. Корректность этой конструкции проверяется с помощью свойства накрывающей гомотопии.

Связь между гомотопическими группами π_n, $n \geqslant 2$, пространства и базы накрытия очень проста.

Теорема 8. *Пусть $p\colon E \to B$ — накрытие. Тогда при $n \geqslant 2$ гомоморфизм гомотопических групп*

$$p_n\colon \pi_n(E) \to \pi_n(B),$$

индуцированный проекцией накрытия, является изоморфизмом.

Доказательство теоремы 8 мы разобьем на 3 несложных утверждения, предложив их в качестве упражнений читателю.

Упражнения. 11°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, X — односвязное, локально односвязное пространство (с отмеченными точками e_0, b_0, x_0 соответственно, $p(e_0) = b_0$), $f\colon X \to B$ — отображение такое, что $f(x_0) = b_0$, то существует единственное отображение $F\colon X \to E$ такое, что $F(x_0) = e_0$ и $pF = f$.

Указание. Для построения отображения $F(x)$ рассмотрите путь α в X, соединяющий x_0 с x; затем постройте путь в E, накрывающий путь $f\alpha$ в B, положите $F(x) = \widetilde{f\alpha}(1)$. Для доказательства единственности F используйте односвязность X, для доказательства непрерывности F — локальную односвязность X.

12°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, то $p_n\colon \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ при $n \geqslant 2$ — эпиморфизм.

Указание. Покажите, что в силу результата упражнения 11° всякий сфероид $\varphi\colon (S^n, s_0) \to (B, b_0)$ можно накрыть сфероидом $\Phi\colon (S^n, s_0) \to (E, e_0)$.

13°. Докажите, что если $p\colon E \to B$ — накрытие, то $p_n\colon \pi_n(E) \to \pi_n(B)$ при $n \geqslant 2$ — мономорфизм.

Указание. Покажите что в силу результата упражнения 11° всякую гомотопию $\psi\colon (S^n \times I, s_0 \times I) \to (B, b_0)$ сфероидов в B можно накрыть гомотопией $\Psi\colon (S^n \times I, s_0 \times I) \to (E, e_0)$ сфероидов в E.

Из теоремы 8 и приведенного в § 4 гл. III результата $\pi_1(S^n) = \pi_2(S^n) = \ldots = \pi_{n-1}(S^n) = 0$, $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$ $(n \geqslant 2)$ получаем

Следствие. *Пусть $n \geqslant 2$. Тогда $\pi_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) = 0$ при $1 < k < n$ и $\pi_n(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}$.*

Как уже было показано выше, $\pi_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n) \simeq \mathbb{Z}_2$ при $n \geqslant 2$.

5. Разветвленные накрытия. В заключение этого параграфа остановимся на понятии разветвленного накрытия. Примером разветвленного накрытия (как показывает пример § 4 гл. I римановой поверхности функции $w=\sqrt{z}$) может служить отображение z-сферы S^2 в себя, задаваемое формулой $f(z)=z^2$. Очевидно, четверка

$$(S^2\setminus\{0, \infty), S^2\setminus\{0, \infty\}, \mathbb{Z}_2, f)$$

(где $\mathbb{Z}_2$ — двухточечное пространство с дискретной топологией) является накрытием.

Определение 13. Четверка $(\tilde{M}, M, \mathbb{Z}_n, p)$, где p: $\tilde{M}\to M$, называется *разветвленным накрытием*, если: 1) $\tilde{M}$ и M — двумерные многообразия; $\mathbb{Z}_n$ — пространство с дискретной топологией, состоящее из n точек; 2) для некоторого конечного множества $T\subset\tilde{M}$ четверка $(\tilde{M}\setminus T, M\setminus p(T), \mathbb{Z}_n, p)$ является n-листным накрытием; 3) для всякой точки $y\in M$ и ее достаточно малой окрестности $V(y)$, гомеоморфной диску, компоненты связности множества $p^{-1}(V(y))$ гомеоморфны диску.

Точки $x\in T$ будем называть особыми точками разветвленного накрытия.

Упражнение 14°. Покажите, что риманова поверхность P, определяемая алгебраической функцией

$$w^n+a_1(z)w^{n-1}+\ldots+a_{n-1}(z)w+a_n(z)=0,$$

где $a_i(z)$, $i=1, \ldots, n$, — многочлены (см. § 4 гл. I), является разветвленным накрытием $(P, S^2, \mathbb{Z}_n, p)$. Укажите особые точки этого накрытия. При $n=2$ сравните с результатами § 4 гл. I.

Рассмотрим гомеоморфную диску открытую окрестность $V(p(x^i))$ образа особой точки x^i такую, что для всех других особых точек x^j из условия $p(x^j)\in V(p(x^i))$ следует $p(x^i)=p(x^j)$. Прообраз границы $\partial V(p(x^i))$ этой окрестности распадается на несколько замкнутых кривых — окружностей, ограничивающих связные компоненты множества $p^{-1}(V(p(x^i)))$, гомеоморфные открытым дискам. Пусть $U(x^i)$ — связная компонента $p^{-1}(V(p(x^i)))$, содержащая точку x^i. Степень отображения (см. § 4 гл. III)

$$p\Big|_{\partial U(x^i)}: \partial U(x^i)\to\partial V(p(x^i))$$

называется кратностью ветвления в точке x^i; мы будем обозначать ее k_i. Кратность ветвления, очевидно, может быть определена и для точек, не являющихся особыми. Если $p\big|_{U(x^i)}: U(x^i)\to V(p(x^i))$ — гомеоморфизм, то, очевидно, $\deg p\big|_{\partial U(x^i)}=\pm 1$. В общем случае имеется произвол в выборе образующих в $\pi_1(\partial U(x^i))$ и $\pi_1(\partial V(p(x^i)))$ и, следовательно, в знаке k_i. Однако в ряде случаев знак k_i определяется естественным образом. Так, для разветвленного накрытия $(S^2, S^2, \mathbb{Z}_2, z^2)$ кратности точек 0 и ∞ равны 2, а кратность любой другой точки равна 1. Для разветвленного накрытия $(S^2, S^2, \mathbb{Z}_2, \bar{z}^2)$ кратности точек 0 и ∞ равны -2, а кратность любой другой точки равна -1.

Упражнение 15°. Подсчитайте кратность ветвления особых точек разветвленных накрытий из упражнения 14°.

Установим следующую важную формулу:

$$\chi(\tilde{M})=n\cdot\chi(M)-\sum_i(|k_i|-1), \tag{5}$$

связывающую кратности ветвления особых точек с эйлеровыми характеристиками пространства и базы.

Будем считать пространства $\tilde{M}$ и M компактными и триангулируемыми, т. е. замкнутыми поверхностями. Для каждой особой точки $x_i\in T$ выберем окрестность $V(p(x_i))$, как это было сделано выше. Рассмотрим теперь четверку

$$\left(\tilde{M}\setminus\bigcup U(x^i), M\setminus\bigcup V(p(x^i)), \mathbb{Z}_n, p\right),$$

где x^i пробегает все множество T. Очевидно это n-листное накрытие (не разветвленное), пространство и базу которого можно считать триангулируемыми. Эти триангуляции можно выбрать достаточно мелкими и согласованными, так что полные пробразы вершины, ребра и треугольника из базы являются набором из n вершин, ребер и треугольников соответственно. Поэтому выполняется равенство

$$\chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) = n \cdot \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right). \tag{6}$$

Пусть полный прообраз $p^{-1}(p(x^j))$ состоит из m точек $x^{j_1}, x^{j_2}, \ldots, x^{j_m}$. Тогда полный прообраз $p^{-1}(V(p(x^j)))$ состоит из m дисков $U(x^{j_s})$. Поскольку граница $\partial U(x^{j_s})$ отображается на $\partial V(p(x^j))$ локально гомеоморфно со степенью k_{j_s}, $s=1, \ldots, m$, для каждой точки $y \in \partial V(p(x^j))$ множество $p^{-1}(y) \bigcap \partial U(x^{j_s})$ состоит в точности из $|k_{j_s}|$ точек. Следовательно, для каждой особой точки x^j и точек $x^{j_s} \in (p(x^j))$ имеем

$$\sum_{s=1}^{m} |k_{j_s}| = n, \tag{7}$$

а число m компонент связности множества $p^{-1}(V(p(x^j)))$ удовлетворяет соотношению

$$n - \sum_{s=1}^{m} (|k_{j_s}| - 1) = m. \tag{8}$$

Заклеим пространство $\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)$ дисками $\overline{U}(x^{j_s})$, лежащими над диском $V(p(x^j))$. Обозначим полученное пространство через $\widetilde{M}'$. Поскольку эйлерова характеристика диска равна 1 и эйлерова характеристика его границы равна 0, получаем

$$\chi(\widetilde{M}') = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) = \sum_{s=1}^{m} \chi\left(\overline{U}(x^{j_s})\right) -$$

$$-\sum_{s=1}^{m} \chi\left(\overline{U}(x^{j_s}) \bigcap (\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i))\right) = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + m =$$

$$= \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + n - \sum_{s=1}^{m} (|k_{j_s}| - 1). \tag{9}$$

Последовательно приклеим новые диски, расположенные над остальными точками $p(x^i) \in M$ — проекциями особых точек $x^i \in T \subset \widetilde{M}$; тогда

$$\chi(\widetilde{M}) = \chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right) + l \cdot n - \sum_i (|k_i| - 1), \tag{10}$$

где l — число различных образов $p(x^i)$ особых точек x^i. Напомним, что $\chi\left(\widetilde{M} \setminus \bigcup_i U(x^i)\right)$ и $\chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right)$ связаны равенством (6). Заметим теперь, что

$$\chi(M) = \chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right) + l, \tag{11}$$

поскольку M можно получить из $M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))$ приклеиванием l дисков. Таким образом, из (6), (10) и (11) получаем

$$\chi(\widetilde{M}) = n \cdot \chi\left(M \setminus \bigcup_i V(p(x^i))\right) + n \cdot l - \sum_i (|k_i| - 1) = n \cdot \chi(M) - \sum_i (|k_i| - 1). \quad \blacksquare$$

Вспоминая выражение эйлеровой характеристики через род замкнутой поверхности, из формулы (5) легко выразить сумму кратностей особых точек на $\widetilde{M}$ через род M и род $\tilde{M}$. Например, в случае ориентируемых M и $\tilde{M}$ рода p, $\tilde{p}$ соответственно имеем

$$\sum_i (|k_i|-1)=2(\tilde{p}+n(1-p)-1).$$

Эта формула является комбинаторным аналогом известной в теории римановых поверхностей формулы Римана–Гурвица.

Упражнение 16°. Сравните последнюю формулу с формулой числа точек ветвления одной алгебраической функции, установленной в конце § 4 гл. I.

§ 10. Гладкая функция на многообразии и клеточная структура многообразия (пример)

1. Пример функции на торе. Многообразие —это топологическое пространство, локально устроенное как евклидово пространство. Однако в целом многообразие может быть устроено весьма сложно. Изучение свойств многообразий в целом представляет значительные трудности. Как различать недиффеоморфные, негомеоморфные или гомотопически неэквивалентные многообразия? Например, гомеоморфны ли комплексное проективное пространство и сфера одной размерности? Наиболее грубой из перечисленных эквивалентностей является гомотопическая эквивалентность. Поэтому в первую очередь следует изучать гомотопический тип многообразия. Исключительно полезным орудием для исследования гомотопического типа многообразия и решения многих других задач топологии многообразий является теория критических точек гладких функций на многообразиях. Проиллюстрируем этот метод на простейшем примере.

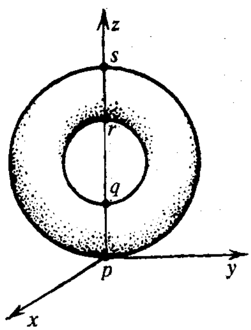

Рис. 111

Рассмотрим двумерный тор $M \subset \mathbb{R}^3$, касающийся плоскости xy (рис. 111). Рассмотрим функцию f на торе, значение которой в точке тора с координатами (x, y, z) равно z — высоте точки над плоскостью xy.

Упражнение 1°. Убедитесь, что определенная таким образом функция f является гладкой функцией на торе.

Обозначим точку касания тора и плоскости через p, а точки тора, лежащие над ней на перпендикуляре к плоскости, — через q, r и s в порядке возрастания высоты.

При изучении функций на многообразии будут использоваться понятия *лебегова множества* $(\varphi \leqslant c) = \{x \in X\colon \varphi(x) \leqslant c\}$ функции $\varphi\colon X \to \mathbb{R}$ и *множества уровня* $(\varphi = c) = \{x \in X\colon \varphi(x) = c\}$ функции φ. Эти множества будут существенно использоваться при анализе функций на многообразии в § 12.

Очевидно, линия уровня $(f = c)$ функции $f = z$ является пересечением тора с плоскостью $z = c$. Множество точек тора, лежащих не