Упражнения. 4°. Покажите, что двумерный тор является клеточным комплексом.

5°. Покажите, что множества, гомотопически эквивалентные лебеговым множествам ($f \leqslant c$) в примере п. 1, изображенные на рис. 113—117 справа, являются клеточными комплексами, и сравните их клеточные разбиения. Обратите внимание на изменение гомотопического типа этих комплексов.

Рассмотрим замкнутое подпространство L клеточного комплекса K. Если L — клеточный комплекс, все клетки которого являются клетками комплекса K с теми же характеристическими отображениями, то L называется *подкомплексом комплекса* K.

Упражнения. 6°. Пусть K — клеточный комплекс, L — его подкомплекс, X — топологическое пространство. Пусть отображения $F\colon K \to X$ и $f\colon L \times I \to X$ таковы, что $f\big|_{L\times 0} = F\big|_L$. Покажите, что существует отображение $\tilde{F}\colon K\times I \to X$ такое, что $\tilde{F}\big|_{L\times I} = f$ и $\tilde{F}\big|_{K\times 0} = F$ (теорема Борсука о продолжении гомотопии).

Указание. Продолжите гомотопию на каждую 0-мерную клетку, затем на каждую 1-мерную и т. д.

7°. Пусть K — клеточный комплекс, L — его стягиваемый подкомплекс. Покажите, что пространства K и K/L гомотопически эквивалентны.

8°. Докажите, что всякий клеточный комплекс — нормальное пространство.

Обратим внимание на то, что в разобранном примере п. 1 гомотопический тип множества M^c менялся при переходе через значения $f(p)$, $f(q)$, $f(r)$, $f(s)$. Точки p, q, r, s отличаются от других точек тора следующим: если в окрестности любой из этих точек, например, в точке p, выбрать локальную систему координат ξ, η на торе, то обе частные производные, $\partial f/\partial\xi$ и $\partial f/\partial\eta$, в точке p (или же в q, r, s соответственно) обратятся в нуль. Такие точки называют критическими точками функции f; значения функции в этих точках называют критическими значениями функции f.

Упражнение 9°. Используя в качестве локальных координат в окрестностях точек p, q, r, s координаты плоскости x, y, покажите, что $\partial f/\partial x = \partial f/\partial y = 0$ в любой из этих точек. Разложите в этих точках функцию в ряд по степеням x и y до членов второго порядка включительно. Обратите внимание на то, что число минусов при членах второй степени есть в точности размерность клетки, которую нужно приклеить к M^a для перехода к M^b, когда между числами a и b лежит критическое значение, соответствующее рассматриваемой критической точке.

§ 11. Невырожденная критическая точка и ее индекс

1. Невырожденные критические точки. Пусть M^n — многообразие класса C^∞ и $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ — функция класса C^∞.

Точка $p \in M^n$ называется *критической точкой функции* f, если в локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ имеет место равенство $\partial f/\partial x_1 = \dots = \partial f/\partial x_n = 0$. Число $f(p)$ называется *критическим значением функции* f. Все остальные точки многообразия M^n будем называть *некритическими точками* функции f. Все числа, не являющиеся критическими значениями функции f, будем называть *некритическими значениями* этой функции.

Упражнение 1°. Сравните понятия критического и некритического значения функции с понятиями регулярного и нерегулярного значения гладкого отображения (см. § 5).

Критическая точка называется изолированной, если найдется такая ее окрестность, в которой нет других критических точек. Критическая точка называется *невырожденной*, если матрица вторых частных производных $A = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)\Big|_p$ не вырождена. В противном случае критическая точка называется *вырожденной*.

Рассмотрим квадратичную форму (Ax, x), где $x \in \mathbb{R}^n$. Ее называют *гессианом* функции f в точке p. Матрица A симметричная; квадратичная форма (Ax, x) может быть приведена к каноническому виду

$$(Ax, x) = -y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \dots + y_h^2$$

подходящим выбором координат $y_1, \dots, y_h$, $h \leqslant n$; если матрица A не вырождена, то $h = n$.

Число λ называется *индексом функции* f в точке p, а число $(n - h)$ — *степенью вырождения функции* f *в точке* p.

Пример. Зададим функцию на $\mathbb{R}^2$ формулой $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. Очевидно, частные производные

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y^2 \quad \text{и} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -6xy$$

одновременно обращаются в нуль лишь в точке $(0, 0)$, которая, таким образом, является изолированной критической точкой. Все вторые частные производные

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}(x, y) = -6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6x$$

равны нулю в точке $(0, 0)$. Следовательно, матрица вторых частных производных функции f в точке $(0, 0)$ является нулевой, а гессиан функции f в точке $(0, 0)$ является квадратичной формой, тождественно равной нулю. Значит, критическая точка $(0, 0)$ является вырожденной; степень вырождения f в точке $(0, 0)$ равна двум, а индекс f — нулю.

Упражнения. 2°. Покажите корректность (независимость от выбора системы локальных координат) определений критической точки, невырожденной критической точки, степени вырождения и индекса функции в критической точке.

3°. Исследуйте критические точки следующих функций на $\mathbb{R}^1$ и $\mathbb{R}^2$:

а) $f(x) = x^2$, б) $f(x, y) = x^3$, в) $f(x, y) = x^2 y^3$;
исследуйте критические точки функции на торе (см. п. 1 § 10).

2. Лемма Морса. Замечательным фактом в теории критических точек является то, что вблизи невырожденной критической точки функция может быть представлена в виде квадратичной формы, и поведение функции описывается ее индексом.

Теорема 1 (лемма Морса). *Пусть $f: M^n \to \mathbb{R}$ и пусть p — невырожденная критическая точка функции f. Тогда в некоторой окрестности U точки p существует такая локальная система координат $y_1, \ldots, y_n$, что $y_i(p) = 0$, $i = 1, \ldots, n$, и в U справедливо тождество*

$$f(u) = f(p) - y_1^2 - \ldots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \ldots + y_n^2, \tag{1}$$

где $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки u, а λ — индекс функции f в точке p.

Доказательство. Покажем, что если существует такая система координат, в которой функция f имеет вид (1), то λ — индекс функции f в точке p. Действительно, если такая система координат существует, то матрица частных производных $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y_i \partial y_j}\right)\Big|_p$ имеет диагональный вид. По диагонали стоят числа ± 2, и число отрицательных собственных значений, с одной стороны, равно числу λ в представлении (1), а с другой стороны, является по определению индексом f в точке p.

Докажем теперь, что такое представление (1) для функции f существует. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — такая локальная система координат, что точка p имеет координаты $(0, \ldots, 0)$. В некоторой окрестности U точки p можно применить лемму 1 § 1 к функции $f(u) - f(p)$, откуда получаем равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i=1}^{n} x_i g_i(x_1, \ldots, x_n),$$

причем

$$g_i(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) = 0,$$

так как p — критическая точка f.

Применим снова лемму 1 § 1 к функциям g_i. Получим

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} x_i h_{ij}(x_1, \ldots, x_n),$$

и, следовательно,

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j h_{ij}(x_1, \ldots, x_n). \tag{2}$$

Обозначим $\overline{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, тогда $\overline{h}_{ij} = \overline{h}_{ji}$ и

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i x_j \overline{h}_{ij}(x_1, \ldots, x_n).$$

Так как $\overline{h}_{ij}(0, \ldots, 0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial y_j}(0, \ldots, 0)$, то матрица $(\overline{h}_{ij}(0, \ldots, 0))$ не вырождена. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать в (2) матрицу (h_{ij}) симметрической.

Если бы функции h_{ij} были константами, то для доказательства теоремы нам было бы достаточно привести квадратичную форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ к каноническому виду. В общем же случае рассуждения приходится несколько изменить.

Для дальнейшего будет удобно дополнительно предполагать, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, \ldots, 0) \neq 0$. Это предположение также не ограничивает общности, так как линейным изменением локальных координат (изменением карты) всегда можно добиться этого. Действительно, квадратичную форму $\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}(0, \ldots, 0) x_i x_j$ линейной невырожденной заменой координат можно привести к виду, где элемент ее матрицы $a_{11} \neq 0$. Сделав эту замену координат в формуле (2), мы снова получим для f (в новых координатах $x_1', \ldots, x_n'$) такое же представление

$$f(x_1', \ldots, x_n') - f(0, \ldots, 0) = \sum_{i,j=1}^{n} x_i' x_j' h_{ij}'(x_1, \ldots, x_n),$$

но уже $h_{11}'(0, \ldots, 0) \neq 0$.

Итак, считая, что $h_{11}(0, \ldots, 0) \neq 0$, можно записать (в некоторой окрестности точки $(0, \ldots, 0)$)

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(0, \ldots, 0) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}x_ix_j = h_{11}x_1^2 + 2\sum_{i>1}^{n} h_{i1}x_ix_1 + \sum_{i,j>1}^{n} h_{ij}x_ix_j =$$

$$= \operatorname{sign} h_{11}(0, \ldots, 0)\left(\sqrt{|h_{11}|}\,x_1 + \sum_{i>1}^{n} \frac{h_{i1}}{\operatorname{sign} h_{11}(0, \ldots, 0)\sqrt{|h_{11}|}}\,x_i\right)^2 -$$

$$- \frac{1}{|h_{11}|}\sum_{i,j>1}^{n} h_{i1}h_{1j}x_ix_j + \sum_{i,j>1}^{n} h_{ij}x_ix_j =$$

$$= \operatorname{sign} h_{11}(0, \ldots, 0)\,y_1^2 + \sum_{i,j>1}^{n}\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}\cdot h_{j1}}{|h_{11}|}\right)x_ix_j,$$

где новая координата y_1 гладко зависит от $x_1, \ldots, x_n$:

$$y_1 = \sqrt{|h_{11}(x_1, \ldots, x_n)|}\,x_1 + \sum_{i>1}^{n} \frac{h_{i1}(x_1, \ldots, x_n)x_i}{\operatorname{sign} h_{11}(0, \ldots, 0)\sqrt{|h_{11}(x_1, \ldots, x_n)|}}.$$

Применяя теорему об обратном отображении (см. § 1), убедимся, что преобразование $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, x_2, \ldots, x_n)$ — диффеоморфизм в окрестности точки $(0, \ldots, 0)$.

Заметим, далее, что матрица

$$\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{j1}}{|h_{11}|}\right), \quad 1 < i, j \leqslant n,$$

невырождена в точке $(0, \ldots, 0)$ и симметрична (проверьте!). Следовательно, мы можем применить приведенное выше рассуждение к функции

$$\sum_{i,j>1}^{n}\left(h_{ij} - \frac{h_{i1}h_{j1}}{|h_{11}|}\right)x_ix_j$$

и так далее, как в классическом алгоритме Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. В результате приходим к выражению вида (1) для функции f. ■

Упражнения. 4°. Докажите, что всякая невырожденная критическая точка является изолированной.

5°. Найдите представления (1), определяемые леммой Морса, для функции высоты на торе (см. § 10) в критических точках.

6°. Докажите, что точки максимума и минимума гладкой функции на многообразии без края являются критическими. Вычислите индексы в точках максимума и минимума, если известно, что эти точки невырождены.

3. Поле градиента. Пусть $A_x(u, v)$ — риманова метрика на M^n. Выберем для каждой точки $x \in M^n$ вектор $y_x \in T_xM^n$ так, чтобы было выполнено следующее условие: для произвольного вектора $l_x \in T_x M^n$ справедливо равенство

$$A_x(y_x, l_x) = (df)_x(l_x), \qquad (3)$$

где $(df)_x(l_x)$ — значение дифференциала функции f в точке x на векторе l_x.

Полученное поле y_x называется *полем градиента* функции и обозначают $\operatorname{grad} f(x)$.

Упражнения. 7°. Покажите, что в локальных координатах поле градиента имеет вид

$$\operatorname{grad} f(x) = \left(x_1, \ldots, x_n, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i1}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{in}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

где $a^{ij}(x)$ — коэффициенты матрицы, обратной матрице $(a_{ij}(x))$ формы $A_x(u, v)$.

8°. Докажите, что для функции класса C^∞ поле градиента — гладкое векторное поле.

9°. Докажите, что $\operatorname{grad} f(x^0) = 0$ тогда и только тогда, когда x^0 — критическая точка функции f.

§ 12. Критические точки и гомотопический тип многообразия

В этом параграфе критические точки гладкой функции на многообразии будут использоваться для изучения гомотопического типа многообразия. Основоположником этого подхода является М. Морс. Будет показано, что компактное многообразие гомотопически эквивалентно клеточному комплексу. Детали доказательств (в ряде случаев достаточно тонкие) будут опускаться.

1. Строение лебеговых множеств гладких функций. Пусть M — компактное n-мерное C^∞-многообразие, f — функция класса C^∞ на M, все критические точки которой невырожденны. Для любого числа a множество $(f < a)$ является открытым подмножеством в M, а следовательно, подмногообразием в M. Предположим теперь, что a — некритическое значение f и $f^{-1}(a) = \varnothing$. Покажем, что множество $M^a = (f \leqslant a)$ является многообразием с краем $(f = a)$. Пусть $u \in f^{-1}(a)$. По теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) функцию f в некоторой окрестности точки u можно представить в локальных координатах как проекцию π пространства $\mathbb{R}^n$ на прямую $\mathbb{R}^1$ (рис. 118). Прообразом точки a при этой проекции является подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$, являющееся краем полупространства $\mathbb{R}^n_-$. В точках полупространства функция f принимает значения, не большие a. Это означает, что в M^a существует окрестность точки u, гомеоморфная полупространству.

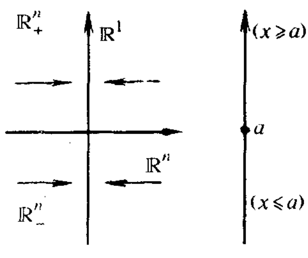

Рис. 118

Следовательно, $M^a = (f \leqslant a)$ — n-мерное многообразие, край которого — $(n-1)$-мерное многообразие $(f = a)$.