было выполнено следующее условие: для произвольного вектора $l_x \in T_x M^n$ справедливо равенство

$$A_x(y_x, l_x) = (df)_x(l_x), \tag{3}$$

где $(df)_x(l_x)$ — значение дифференциала функции f в точке x на векторе l_x.

Полученное поле y_x называется *полем градиента* функции и обозначают $\mathrm{grad}\, f(x)$.

Упражнения. 7°. Покажите, что в локальных координатах поле градиента имеет вид

$$\mathrm{grad}\, f(x) = \left(x_1, \ldots, x_n, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i1}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \left(\sum_{i=1}^{n} a^{in}(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \frac{\partial}{\partial x_n}\right),$$

где $a^{ij}(x)$ — коэффициенты матрицы, обратной матрице $(a_{ij}(x))$ формы $A_x(u, v)$.

8°. Докажите, что для функции класса C^∞ поле градиента — гладкое векторное поле.

9°. Докажите, что $\mathrm{grad}\, f(x^0) = 0$ тогда и только тогда, когда x^0 — критическая точка функции f.

§ 12. Критические точки и гомотопический тип многообразия

В этом параграфе критические точки гладкой функции на многообразии будут использоваться для изучения гомотопического типа многообразия. Основоположником этого подхода является М. Морс. Будет показано, что компактное многообразие гомотопически эквивалентно клеточному комплексу. Детали доказательств (в ряде случаев достаточно тонкие) будут опускаться.

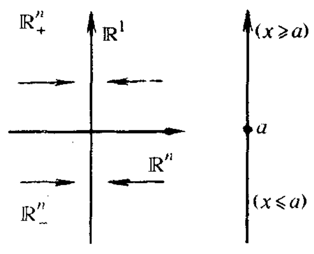

Рис. 118

1. Строение лебеговых множеств гладких функций. Пусть M — компактное n-мерное C^∞-многообразие, f — функция класса C^∞ на M, все критические точки которой невырожденны. Для любого числа a множество $(f < a)$ является открытым подмножеством в M, а следовательно, подмногообразием в M. Предположим теперь, что a — некритическое значение f и $f^{-1}(a) = \varnothing$. Покажем, что множество $M^a = (f \leqslant a)$ является многообразием с краем $(f = a)$. Пусть $u \in f^{-1}(a)$. По теореме о выпрямлении отображения (см. § 1) функцию f в некоторой окрестности точки u можно представить в локальных координатах как проекцию π пространства $\mathbb{R}^n$ на прямую $\mathbb{R}^1$ (рис. 118). Прообразом точки a при этой проекции является подпространство $\mathbb{R}^{n-1}$, являющееся краем полупространства $\mathbb{R}^n_-$. В точках полупространства функция f принимает значения, не большие a. Это означает, что в M^a существует окрестность точки u, гомеоморфная полупространству.

Следовательно, $M^a = (f \leqslant a)$ — n-мерное многообразие, край которого — $(n-1)$-мерное многообразие $(f = a)$.

2. Условия гомотопической эквивалентности лебеговых множеств. Пусть a и b — некритические значения функции f и отрезок $[a, b]$ не содержит критических значений. Будем сдвигать множества $(f=c)$ на множество $(f=a)$ по линиям, ортогональным многообразиям уровня $(f=c)$, $a \leqslant c \leqslant b$ (рис. 119). Таким образом мы задаем деформацию $\varphi_a^b(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$, многообразия M^b на многообразие M^a. Следовательно, M^a является сильным деформационным ретрактом M^b, откуда M^a и M^b гомотопически эквивалентны.

Строгое доказательство существования отображения φ_a^b должно включать построение линий, ортогональных многообразиям уровня. Их можно определить как интегральные кривые векторного поля $X(u)$, где вектор $X(u) \in T_u M$ определяется из условия $\langle X(u), h\rangle = 0$ для всех $h \in T_u(f=c=f(u))$, т. е. из условия ортогональности вектора $X(u)$ пространству, касательному к многообразию уровня $(f=c)$. Символ $\langle,\rangle$ обозначает риманову метрику, которая всегда существует на многообразии (см. § 6). Чтобы подмногообразие уровня переходило в подмногообразие уровня в любой момент t, определим векторное поле $X(u)$ формулой

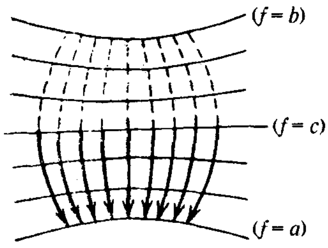

Рис. 119

$$X(u) = \rho(u) \operatorname{grad} f(u),$$

где $\rho(u)$ — гладкая функция на M, равная $1/\langle \operatorname{grad} f(u), \operatorname{grad} f(u)\rangle$ на $M^b \backslash M^a$ и нулю вне некоторой не содержащей критических точек окрестности $M^b \backslash M^a$.

Деформация M^b на M^a может быть корректно определена и в том случае, если a — критическое значение f.

3. Изменение гомотопического типа при переходе через критическое значение. Итак, гомотопический тип множества M^c не меняется, если число c, возрастая (или убывая), не переходит через критическое значение c_0. Посмотрим теперь, что происходит при таком переходе.

Следующее полезное утверждение предлагается доказать самостоятельно.

Упражнение 1°. Докажите, что гладкая функция на компактном многообразии, все критические точки которой невырожденны, имеет конечное число критических точек и критических значений.

Рассмотрим критическое значение c_0. Предположим, что ему соответствует единственная критическая точка p, $f(p)=c_0$. Выберем окрестность U точки p и локальные координаты, определяемые леммой Морса (см. § 11), где функция f представлена в этих координатах $y_1, \ldots, y_n$ в виде

$$f(u) = c_0 - y_1^2 - \ldots - y_\lambda^2 + y_{\lambda+1}^2 + \ldots + y_n^2.$$

Выберем такое ε, что множество $[c_0 - \varepsilon, c_0 + \varepsilon]$ не содержит других критических значений и точка с локальными координатами $(y_1, \ldots, y_n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 \leqslant 2\varepsilon$, принадлежит U.

Мы построим гладкую функцию F на M, отличающуюся от f лишь в U, причем множества $(f \leqslant c_0 + \varepsilon)$ и $(F \leqslant c_0 - \varepsilon)$ окажутся гомотопически эквивалентными. Сделав это, мы сравним множества $(f \leqslant c_0 - \varepsilon)$ и $(F \leqslant c_0 - \varepsilon)$. Оказывается, это более удобно, чем непосредственное сравнение множеств $(f \geqslant c_0 - \varepsilon)$ и $(f \leqslant c_0 + \varepsilon)$. Для построения функции F потребуется гладкая функция μ на $\mathbb{R}^1$, обладающая следующими свойствами:

$$\mu(0) > \varepsilon; \quad \mu(x) = 0 \ \text{ при } \ x > 2\varepsilon; \quad -1 < \mu'(x) \leqslant 0 \ \text{ при } \ -\infty < x < \infty.$$

Вид графика функции μ, удовлетворяющей этим свойствам, указан на рис. 120.

Упражнение 2°. Проведите пример функции μ, обладающей указанными свойствами.

Зададим гладкую функцию F формулами

$$F(v)=\begin{cases} f(v) & \text{при } v\notin U,\\ f(vf)-\mu\left(\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2+2\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2\right) & \text{при } v\in U.\end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что критические точки функции F совпадают с критическими точками функции f (хотя $f(p)\neq F(p)$).

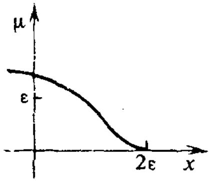

Рис. 120

Критической точке p функции F соответствует критическое значение $F(p)=c_0-\mu(0)<c_0-\varepsilon$. Поскольку в других критических точках значения функции F совпадают со значениями функции f в этих точках, отрезок $[c_0-\varepsilon,\ c_0+\varepsilon]$ не содержит критических значений F. Поэтому множество $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ является сильным деформационным ретрактом множества $(F\leqslant c_0+\varepsilon)$. Но $(F\leqslant c_0+\varepsilon)=(f\leqslant c_0+\varepsilon)$. Следовательно, $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ является сильным деформационным ретрактом множества $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$. Итак, эти множества гомотопически эквивалентны.

Далее будем сравнивать гомотопические типы множеств $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ и $(F\leqslant c_0-\varepsilon)$ (вместо того, чтобы сравнивать гомотопические типы множеств $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ и $(f\leqslant c_0+\varepsilon)$). Обозначим через H замыкание множества $(F\leqslant c_0-\varepsilon)\setminus(f\leqslant c_0-\varepsilon)$. Рассмотрим клетку e^λ, состоящую из точек $u\in U$, координаты $y_1, \ldots, y_n$ которых удовлетворяют условиям

$$\sum_{i=1}^{\lambda} y_i^2<\varepsilon, \qquad \sum_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2=0.$$

Клетка e^λ лежит внутри H: она приклеена к множеству $(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ по множеству тех точек u, для которых $\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2=\varepsilon$. На рис. 121 изображена окрестность критической точки индекса 1 на двумерном многообразии (например, точки q примера из § 10); множество $M^{c_0-\varepsilon}=(f\leqslant c_0-\varepsilon)$ заштриховано, множество H заштриховано дважды, клетка e^λ обозначена толстой линией.

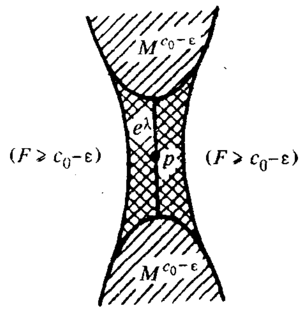

Рис. 121

Зададим деформацию Γ_t множества $(F\leqslant c_0-\varepsilon)=M^{c_0-\varepsilon}\bigcup H$ на множество $M^{c_0-\varepsilon}\bigcup e^\lambda$ следующим образом: Γ_t — тождественное отображение на $M^{c_0-\varepsilon}$, а на H определено формулой

$$\Gamma_t(y_1, \ldots, y_n)=\begin{cases} y_1, \ldots, y_\lambda, ty_{\lambda+1}, \ldots, ty_n & \text{при } \sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2\leqslant\varepsilon,\\ y_1, \ldots, y_\lambda, s_ty_{\lambda+1}, \ldots, s_ty_n & \text{при } \varepsilon<\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2<\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2+\varepsilon,\end{cases}$$

где $s_t=t+(1-t)\sqrt{\left(\sum\limits_{i=1}^{\lambda} y_i^2-\varepsilon\right)\Big/\sum\limits_{i=\lambda+1}^{n} y_i^2}$, $0\leqslant t\leqslant 1$. На рис. 122 эта деформация показана стрелками.

Упражнение 3°. Проверьте, что деформация Γ_t задана корректно.

Итак, множество $(f \leqslant c_0 - \varepsilon) \bigcup e^\lambda$ есть сильный деформационный ретракт множества $(F \leqslant c_0 - \varepsilon)$, а следовательно, и множества $(f \leqslant c_0 + \varepsilon) = M^{c_0+\varepsilon}$. Таким образом, $M^{c_0+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип множества $M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^\lambda$, т. е. множества $M^{c-\varepsilon}$ с определенным образом приклеенной клеткой * размерности, равной индексу критической точки, соответствующей значению c_0.

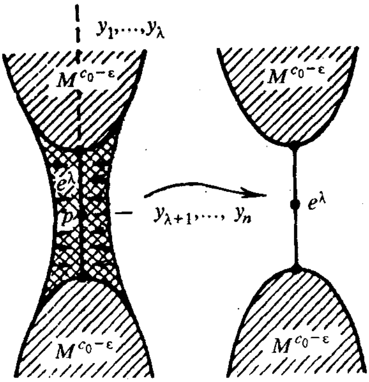

Рис. 122

Мы рассмотрели случай, когда критическому значению функции отвечала единственная критическая точка. Рассмотрим общий случай.

Упражнение 4°. Постройте гладкую функцию на двумерном многообразии, все критические точки которой невырожденны, такую, что одному критическому значению соответствует несколько критических точек.

Пусть критическому значению c_0 соответствуют $k > 1$ критических точек. Все описанные выше конструкции можно проводить одновременно в окрестности каждой критической точки. Множество $M^{c_0+\varepsilon}$ имеет гомотопический тип множества $M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}$, т. е. множества $M^{c_0-\varepsilon}$ с определенным образом приклеенными к нему клетками e^{λ_i}, причем размерность λ_i равна индексу i-й критической точки, соответствующей c_0.

Пусть c' — наименьшее из критических значений, больших c_0, и в ε-окрестностях c_0 и c' нет других критических значений. Пусть значению c' соответствует k' критических точек с индексами $\lambda'_1, \dots, \lambda'_{k'}$. Множество $M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}$ гомотопически эквивалентно множеству M^a для $c_0 \leqslant a < c'$. В свою очередь, множество $M^{c'}$ гомотопически эквивалентно множеству $M^a \bigcup e^{\lambda'_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda'_{k'}}$.

Установим гомотопическую эквивалентность множеств $M^{c'}$ и $\left(M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}\right) \bigcup e^{\lambda'_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda'_{k'}}$. Для этого продеформируем множество $M^a \bigcup e^{\lambda'_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda'_{k'}}$ на множество

$$\left(M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}\right) \bigcup e^{\lambda'_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda'_{k'}},$$

используя построенную нами деформацию M^a на $M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}$.

Упражнение 5°. Выясните, как будут приклеены клетки $e^{\lambda'_1}, \dots, e^{\lambda'_{k'}}$ к множеству $M^{c_0-\varepsilon} \bigcup e^{\lambda_1} \bigcup \dots \bigcup e^{\lambda_k}$.

Подчеркнем, что приклеивание клетки на каждом этапе происходит не произвольным, а строго определенным образом (с точностью до гомотопического класса отображения сферы — границы клетки в соответствующее пространство). Поэтому приклеивание клетки определяется элементом из гомотопической группы соответствующего пространства; размерность этой группы равна уменьшенной на единицу размерности клетки.

---

* Здесь и ниже мы опускаем в записи отображения приклейки.

4. Гомотопический тип многообразия. Наметим построение клеточного комплекса, гомотопически эквивалентного многообразию M, так, как это было сделано для тора в § 10.

Пусть c_1 — наименьшее из критических значений функции f. Очевидно, для $a < c_1$ множество $(f \leqslant a)$ пусто. Поскольку c_1 — наименьшее критическое значение, все критические точки, соответствующие c_1, являются точками минимума; их индексы равны нулю. Множество $(f \leqslant c_1)$ состоит из конечного числа точек; его можно считать результатом приклеивания к пустому множеству нескольких клеток размерности 0.

Пусть c_2 — следующее по величине критическое значение. При $c_1 < c < c_2$ множество $(f \leqslant c)$ получается «раздутием» точек из $(f \leqslant c_1)$; оно состоит из конечного числа множеств, гомеоморфных n-мерному диску, и гомотопически эквивалентно множеству $(f \leqslant c_1)$. Множество $(f \leqslant c_2)$ гомотопически эквивалентно множеству $(f \leqslant c_1)$ с приклеенными к нему клетками различных (вообще говоря, любых от 0 до n) размерностей, равных индексам критических точек, соответствующих c_2; последнее множество, очевидно, является клеточным комплексом.

Взяв следующие по величине критические значения c_3, получим, что $(f \leqslant c_3)$ гомотопически эквивалентно результату последовательного приклеивания к $(f \leqslant c_1)$ клеток, соответствующих критическим точкам, отвечающим критическому значению c_2, а затем клеток, соответствующих критическим точкам, отвечающим критическому значению c_3. Такое пространство можно сделать клеточным комплексом, подправив отображения границ приклеиваемых клеток.

Упражнение 6°. Докажите, что каждое отображение сферы S^m в клеточный комплекс K гомотопно отображению сферы в подпространство K^m пространства K, состоящее из клеток размерности меньшей или равной m.

В общем случае множество $M^a = (f \leqslant a)$ при $a \geqslant \max\limits_{u \in M} f(u)$ гомотопически эквивалентно пространству, являющемуся клеточным комплексом, полученному из пустого множества последовательным приклеиванием клеток, соответствующих критическим точкам с критическими значениями c_i, в порядке возрастания $-\infty < c_i \leqslant a$.

Отметим, что если c_r — наибольшее критическое значение, то критические точки, значение функции f в которых равно c_r, являются точками максимума, и, следовательно, их индексы равны размерности многообразия M.

Сформулируем окончательное утверждение.

Теорема 1. *Каждая гладкая функция f на компактном многообразии M, имеющая лишь невырожденные критические точки, определяет гомотопическую эквивалентность многообразия M с некоторым конечным клеточным комплексом, клетки которого находятся во взаимно однозначном соответствии с критическими точками функции f, причем размерность клетки равна индексу соответствующей критической точки.*

Остановимся теперь на существовании на компактном многообразии гладкой функции, имеющей лишь невырожденные критические точки. Такую функцию можно построить следующим образом. Рассмотрим вложение многообразия M в евклидово пространство $\mathbb{R}^l$ достаточно высокой размерности l. Определим функцию f формулой $f(p) = (u-p, u-p)$, где $(,)$ — скалярное произведение, u — фиксированный вектор в $\mathbb{R}^l$, а $p \in M \subset \mathbb{R}^l$. Используя теорему Сарда (см. § 5), можно показать, что существует вектор $u \in \mathbb{R}^l$ такой, что функция f имеет лишь невырожденные критические точки.

Этот результат позволяет сделать следующее важное утверждение.

Теорема 2. *Всякое компактное гладкое многообразие имеет гомотопический тип конечного клеточного комплекса.*

Следует заметить, что теорема 1 не позволяет однозначно восстановить гомотопический тип многообразия по информации о критических точках функции. В общем случае мы можем установить число клеток и их размерности, но, вообще говоря, не способ приклейки этих клеток друг к другу. Таким образом, клеточный комплекс в общем случае нельзя восстановить по информации о критических точках.

5. Понятие точной последовательности расслоения (дополнение к § 9). Изложенные в § 9 результаты о вычислении фундаментальной группы базы накрытия имеют глубокое обобщение на уровне локально тривиальных расслоений. Пусть (E, B, F, p) — локально тривиальное расслоение и e_0, b_0 — отмеченные точки в $F=p^{-1}(b_0)$, B соответственно. Отображения проекции p и вложения i: $F \to E$ индуцируют гомоморфизмы гомотопических групп: $\pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_n} \pi_n(B, b_0)$, $\pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(E, e_0)$, $n \geqslant 1$. Распространим эти отображения на случай $n=0$, подразумевая под $\pi_0(F, e_0)$, $\pi_0(E, e_0)$, $\pi_0(B, b_0)$ множества компонент линейной связности пространств F, E, B. Компоненту, содержащую отмеченную точку $e_0(b_0)$, назовем «нулевым» элементом θ. Определим еще один гомоморфизм: ∂_n: $\pi_n(B, b_0) \to \pi_{n-1}(F, e_0)$, $n \geqslant 1$. Пусть φ: $(I^n, \partial I^n) \to (B, b_0)$ — сфероид. По свойству накрывающей гомотопии существует для φ поднятие Φ: $I^n \to E$, так как $I^n = I^{n-1} \times I$ и φ: $I^{n-1} \times I \to B$ — гомотопия отображения φ_0: $I^{n-1} \times \{0\} \to B$, которое накрывается отображением Φ_0: $I^{n-1} \times \{0\} \to e_0$; при этом $p\Phi(y \times \{t\}) = \varphi(y \times \{t\})$, $y \in I^{n-1}$, $t \in I$, и $p\Phi(\partial I^{n-1} \times \{t\}) = \varphi(\partial I^{n-1} \times \{t\}) = b_0$, откуда $\Phi(\partial I^n) \in F$. Итак, Φ: $\partial I^n \to F$ является $(n-1)$-мерным сфероидом, определяющим класс $\alpha \in \pi_{n-1}(F, e_0)$. Положим $\partial_n[\varphi] = \alpha$. Очевидна корректность этого определения ∂_n, $n \geqslant 1$; не сложно убедиться, что ∂_n — гомоморфизм. При $n=0$ положим $\partial_0 = 0$.

Гомотопической последовательностью локально тривиального расслоения (E, B, F, p) называется бесконечная слева последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{n+1}} \pi_n(F, e_0) \xrightarrow{i_n} \pi_n(E, e_0) \xrightarrow{p_n} \pi_n(B, b_0) \xrightarrow{\partial_n} \pi_{n-1}(F, e_0) \xrightarrow{i_{n-1}} \ldots \xrightarrow{p_0} \pi_0(B, b_0) \xrightarrow{\partial_0} 0.$$

Она обладает важным свойством — в каждом члене последовательности образ «входящего» гомоморфизма равен ядру «выходящего»: $\operatorname{Im} \partial_{n+1} = \operatorname{Ker} i_n$, $\operatorname{Im} i_n = \operatorname{Ker} p_n$, $\operatorname{Im} p_n = \operatorname{Ker} \partial_n$, $n=0, 1, \ldots$ Это свойство называется «точностью» гомотопической последовательности расслоения.

Пример 1. Рассмотрим накрытие p: $\mathbb{R}^1 \to S^1$, $p=e^{2\pi i t}$ (см. пример 6 п. 4 § 9). Слой накрытия — группа $\mathbb{Z}$ (с дискретной топологией). Очевидно, $\pi_k(\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $k \geqslant 1$; $\pi_k(\mathbb{R}^1)=0$, $k \geqslant 0$.

Отсюда $\ldots \to 0 \to 0 \to \pi_k(S^1) \to 0 \to \ldots \to 0 \to 0 \to \pi_1(S^1) \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$ — точная гомотопическая последовательность расслоения $(\mathbb{R}^1, S^1\mathbb{Z}, p)$. Следовательно, $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$, $\pi_k(S^1)=0$, $k \geqslant 2$.

Пример 2. Расслоение Хопфа (S^3, S^2, S^1, π) (п. 1 § 9). Точная гомотопическая последовательность имеет вид $\to 0 \to \mathbb{Z} \to \pi_3(S^2) \to 0 \to 0 \to \pi_2(S^2) \to \mathbb{Z} \to 0 \to 0$, так как $\pi_3(S^1) = \pi_2(S^1) = \pi_2(S^3) = \pi_1(S^3) = \pi_1(S^2) = 0$ (см. пример 1). Используя точность последовательности, немедленно получаем $\pi_3(S^2) \simeq \pi_2(S^2) \simeq \mathbb{Z}$.

Сводка гомотопических групп, приведенная в конце гл. III, получена подобным образом с помощью точных гомотопических последовательностей для специальных расслоений.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Систематическими курсами по теории многообразий и расслоений являются [19, 24, 45, 47, 49, 50, 53, 56, 57, 60, 62, 67, 68, 71, 72, 80—83].

Наглядное изложение основных понятий теории многообразий и расслоений имеется в [14, 46].

Фундаментальный очерк развития идей современной топологии дан в [51].

Задачники по материалу гл. IV—[48, 52].

Сведения из анализа, используемые в гл. IV, имеются в [25, 37, 50].

Классификация одномерных и двумерных многообразий—[14, 27, 46, 62]. Классификация трехмерных и четырехмерных многообразий доступно изложена в [74, 75] (см. также [27]).

Теорема Сарда и теория степени гладких отображений—[19, 24, 46, 49, 53, 58, 60, 62, 67, 80].

Теоремы вложения многообразий—[45, 46, 49, 50, 56, 60, 62, 67, 80].

Теория групп Ли—[24, 55, 72, 74, 83].

Теория накрывающих пространств—[43, 66, 76].

Теория критических точек гладких функций на многообразиях —[44, 46, 57, 74, 75, 62].

Векторные поля на гладких многообразиях, динамические системы, гамильтонов формализм—[7, 9, 24, 49, 53, 60, 67, 72, 74].