Глава V

Теория гомологий

В этой главе для всякого топологического пространства будут определены группы гомологий. Идея построения групп гомологий, как уже отмечалось, восходит к А. Пуанкаре. Полезная идея алгебраизации топологических задач в историческом плане впервые была реализована построением групп гомологий и фундаментальной группы. Центральное положение теории гомологий сохраняется и до настоящего времени. Во многих случаях топологические инварианты в конечном итоге выражают через группы гомологий и когомологий. Это обстоятельство связано с лучшей вычислимостью групп гомологий и когомологий, хотя их определение несколько сложнее, чем определение, например, гомотопических групп.

§ 1. Вступительные замечания

Здесь мы проиллюстрируем ход рассуждений, приведший к появлению понятия гомологий.

При изучении достаточно просто устроенных пространств геометрическая интуиция часто помогает нам различать пространства, отличающиеся с топологической точки зрения, т. е. не гомеоморфные одно другому. Как правило, нетрудно установить, гомеоморфны или нет различные конкретные не слишком сложно устроенные подмножества прямой, плоскости, трехмерного пространства (в индуцированных топологиях). Непосредственно из определения многообразия следует, что многообразие X не может быть гомеоморфно пространству Y, не являющемуся C^0-многообразием. Но при изучении многообразий размерности большей, чем 1—2, геометрическая интуиция оказывается недостаточно эффективной.

Чтобы различать негомеоморфные многообразия высокой размерности, можно опираться на следующее соображение. Пусть M_1^n, M_2^n — два n-мерных многообразия. Будем рассматривать в M_1^n, M_2^n компактные C^0-подмногообразия.

Если в M_1^n всякое q-мерное подмногообразие $(q < n)$ является краем некоторого $(q+1)$-мерного подмногообразия в M_1^n, а в M_2^n имеется q-мерное подмногообразие, не являющееся краем подмного-

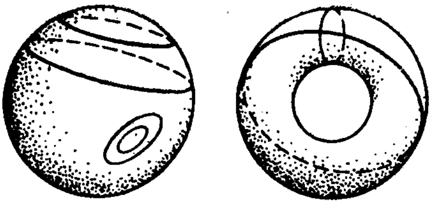

Рис. 123

образия в M_2^n, то многообразия M_1^n и M_2^n заведомо не гомеоморфны. Так, любое 1-мерное подмногообразие (компактное) сферы S^2 является краем, в то время как в торе $T^2 = S^1 \times S^1$ нетрудно указать окружности, не являющиеся краем никакого двумерного подмногообразия в T^2 (рис. 123).

Если же подмногообразия, не являющиеся краями, имеются и в M_1^n, и в M_2^n, то можно попытаться сравнить «количество» таких многообразий в M_1^n и M_2^n. Рассмотрим множество $\{V_\alpha^q\}$ всех q-мерных циклов, т. е. q-мерных подмногообразий (без края) многообразия M^n. Пусть W^{q+1} — подмногообразие M^n с краем, состоящим из связных многообразий $V_1^q, \ldots, V_m^q$, $V_l^q \in \{V_\alpha^q\}$. Будем говорить в этом случае, что цикл $V_1^q + \ldots + V_m^q$ гомологичен нулю. Таким образом, в множестве $\{V_\alpha^q\}$ введено отношение эквивалентности: два цикла эквивалентны (гомологичны), если они различаются на гомологичный нулю цикл; классы эквивалентности q-мерных циклов назовем q-мерными *гомологиями многообразия* M^n.

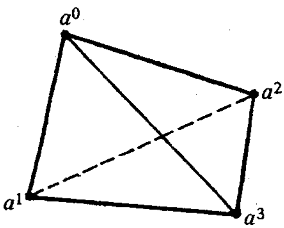

Рис. 124

Если найдется такое q, при котором q-мерных гомологий многообразия M_1^n больше, чем q-мерных гомологий многообразия M_2^n, то это означает, что M_1^n и M_2^n не гомеоморфны.

В множестве $\{V_\alpha^q\}$ введено понятие суммы двух непересекающихся циклов, однако это не означает, что в нем введена структура группы. Поэтому мы не можем пока считать, что гомологии образуют группу. Наглядное определение гомологий, данное выше, однако, неудобно для вычислений. Более эффективно рассматривать циклы (многообразия), составленные из некоторых элементарных многообразий с краями. Покажем, как это можно сделать, на следующем примере.

Пусть Π^2 — поверхность тетраэдра (рис. 124); очевидно, Π^2 гомеоморфна сфере S^2. Будем рассматривать 0-мерные многообразия, состоящие из вершин тетраэдра, 1-мерные многообразия, состоящие из его ребер, и 2-мерные многообразия, состоящие из его граней, допуская наличие края у 1-мерных и 2-мерных многообразий; операцию объединения двух многообразий естественно трактовать как сумму. Для того чтобы использовать это замечание для алгебраизации изучаемых объектов, рассмотрим группу формальных линейных комбинаций * с целочисленными коэффициентами вершин (группа 0-мерных цепей), ребер (группа 1-мерных цепей) и граней (группа 2-мерных цепей). При этом для каждого ребра фиксируем порядок вершин (a^i, a^j) и отождествим $(-1)(a^i, a^j)$ с (a^j, a^i); для каждой грани фиксируем направление обхода вершин (a^i, a^j, a^k), отождествим $(-1)(a^i, a^j, a^k)$ с (a^j, a^i, a^k).

Определим границу ребра (a^i, a^j) как сумму $a^j + (-1)a^i$, а границу грани (a^i, a^j, a^k) — как сумму ограничивающих эту грань ребер (с тем направлением обхода, которое зафиксировано у грани), т. е. $(a^i, a^j) + (a^j, a^k) + (a^k, a^i)$; границу вершины положим равной нулю. Определенные таким образом операции взятия границы продолжаются на группы цепей по линейности. Циклом назовем цепь, граница которой равна нулю; цикл, таким образом, является алгебраическим аналогом замкнутого многообразия (без края).

Поскольку нас интересуют гомологии — классы эквивалентных циклов, отличающихся друг от друга на границу, будем рассматривать смежные классы q-мерных циклов по подгруппе границ $(q+1)$-мерных цепей $(q=0, 1, 2)$. Эти смежные классы образуют группу, называемую q-мерной группой целочисленных гомологий поверхности Π^2. Группы гомологий Π^2 нетрудно вычислить; они изоморфны $\mathbb{Z}$, 0 и $\mathbb{Z}$ для размерностей 0, 1 и 2 соответственно. Такую конструкцию можно осуществить для более высоких размерностей, используя разбиение на тетраэдры и их аналоги (симплексы). Зная, каким образом данное пространство разбивается на симплексы, можно вычислить его группы гомологий. На практике, однако, редко пользуются для вычисления групп гомологий определением, а применяют разнообразные технические приемы (точные последовательности, спектральные последовательности и др.).

Группы гомологий являются топологическими инвариантами, т. е. группы гомологий гомеоморфных пространств совпадают (изоморфны). Другими примерами топологических инвариантов являются число компонент связности (или линейной связности) пространства,

---

* Группой формальных линейных комбинаций элементов τ_α из некоторого множества $\{\tau_\alpha\}_{\alpha\in A}$ с коэффициентами в абелевой группе G называют прямую сумму $\bigoplus\limits_{\alpha\in A} G_\alpha$ групп $G_\alpha=\{g\cdot\tau_\alpha\}$, $g\in G$, изоморфных G, где изоморфизм задается правилом $g\cdot\tau_\alpha \longrightarrow g$.

эйлерова характеристика, фундаментальная и гомотопическая группы (см. гл. III). Примечательно, что фундаментальная и гомотопическая группы тесно связаны с группами гомологий (см. § 4 этой главы), а остальные упомянутые топологические инварианты могут быть вычислены через группы гомологий (см. § 4 и 8 этой главы). Отметим также, что группы гомологий на самом деле являются не только топологическими, но и гомотопическими инвариантами в том смысле, что группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств изоморфны. Заметим, что и другие названные выше инварианты являются гомотопическими инвариантами.

В ряде случаев геометрическая интуиция помогает не только различить негомеоморфные пространства, но и доказать их негомеоморфность.

Упражнения. 1°. Докажите (не используя группы гомологий) негомеоморфность следующих пространств, изображаемых символами: O, П, X, P, Ы, 8.

2°. Является ли ориентируемость поверхности топологическим инвариантом? Гомеоморфны ли S^2 и $\mathbb{R}P^2$?

§ 2. Гомологии цепных комплексов

Начнем с изучения абстрактных алгебраических объектов.

Последовательность (бесконечная)

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \tag{1}$$

абелевых групп C_k и их гомоморфизмов ∂_k, удовлетворяющих для всякого $k \geqslant 1$ условию $\partial_{k-1}\partial_k = 0$, называется *цепным комплексом*. Его мы будем обозначать C_*; группы C_k называются *группами цепей*, гомоморфизмы ∂_k — *дифференциалами* или *граничными гомоморфизмами*.

Множество $\operatorname{Ker} \partial_k = \{c \in C_k : \partial_k c = 0\}$ образует подгруппу в C_k, называемую группой *k-мерных циклов*; ее элементы называются *k-мерными циклами*. Множество $\operatorname{Im} \partial_{k+1} = \{c \in C_k : c = \partial_{k+1} u\}$ также образует подгруппу в C_k, называемую *группой k-мерных границ*; ее элементы называются *k-мерными границами*.

Гомоморфизмом φ_* *цепного комплекса* C_* в цепной комплекс C'_* называется последовательность гомоморфизмов $\varphi_k : C_k \to C'_k$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \ldots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{2}$$