эйлерова характеристика, фундаментальная и гомотопическая группы (см. гл. III). Примечательно, что фундаментальная и гомотопическая группы тесно связаны с группами гомологий (см. § 4 этой главы), а остальные упомянутые топологические инварианты могут быть вычислены через группы гомологий (см. § 4 и 8 этой главы). Отметим также, что группы гомологий на самом деле являются не только топологическими, но и гомотопическими инвариантами в том смысле, что группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств изоморфны. Заметим, что и другие названные выше инварианты являются гомотопическими инвариантами.

В ряде случаев геометрическая интуиция помогает не только различить негомеоморфные пространства, но и доказать их негомеоморфность.

Упражнения. 1°. Докажите (не используя группы гомологий) негомеоморфность следующих пространств, изображаемых символами: О, П, Х, Р, Ы, 8.

2°. Является ли ориентируемость поверхности топологическим инвариантом? Гомеоморфны ли S^2 и $\mathbb{R}P^2$?

§ 2. Гомологии цепных комплексов

Начнем с изучения абстрактных алгебраических объектов.

Последовательность (бесконечная)

$$\ldots \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \ldots \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0 \qquad (1)$$

абелевых групп C_k и их гомоморфизмов ∂_k, удовлетворяющих для всякого $k \geqslant 1$ условию $\partial_{k-1}\partial_k = 0$, называется *цепным комплексом.* Его мы будем обозначать C_*; группы C_k называются *группами цепей,* гомоморфизмы ∂_k — *дифференциалами* или *граничными гомоморфизмами.*

Множество $\operatorname{Ker} \partial_k = \{c \in C_k \colon \partial_k c = 0\}$ образует подгруппу в C_k, называемую группой *k-мерных циклов*; ее элементы называются *k-мерными циклами.* Множество $\operatorname{Im} \partial_{k+1} = \{c \in C_k \colon c = \partial_{k+1} u\}$ также образует подгруппу в C_k, называемую *группой k-мерных границ*; ее элементы называются *k-мерными границами.*

Гомоморфизмом φ_* *цепного комплекса* C_* в цепной комплекс C'_* называется последовательность гомоморфизмов $\varphi_k \colon C_k \to C'_k$ такая, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"'] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \ldots \arrow[r] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & C_0 \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & 0 \\
\ldots \arrow[r] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \ldots \arrow[r] & C'_1 \arrow[r] & C'_0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad (2)$$

коммутативна, т. е. $\varphi_{k-1}\partial_k = \partial_k'\varphi_k$ для любого k.

Введем одно из важнейших понятий алгебраической топологии — группы гомологий. Рассмотрим цепной комплекс C_*. В силу соотношения $\partial_k\partial_{k+1} = 0$ выполнено включение $\operatorname{Im}\partial_{k+1} \subset \operatorname{Ker}\partial_k$. Факторгруппа группы циклов по группе границ $\operatorname{Ker}\partial_k/\operatorname{Im}\partial_{k+1}$ называется *k-й группой гомологий комплекса C_** и обозначается $H_k(C_*)$. Циклы c_1, c_2 из одного класса смежности называются *гомологичными*, что обозначается $c_1 \sim c_2$.

Пусть $\varphi_*\colon C_* \to C_*'$ — гомоморфизм цепных комплексов. Из коммутативности диаграммы (2) немедленно следует, что

$$\varphi_k(\operatorname{Ker}\partial_k) \subset \operatorname{Ker}\partial_k' \quad \text{и} \quad \varphi_k(\operatorname{Im}\partial_{k+1}) \subset \operatorname{Im}\partial_{k+1}'.$$

Поэтому φ_* индуцирует *гомоморфизм групп гомологий*:

$$\varphi_{*k}\colon H_k(C_*) \to H_k(C_*').$$

Продолжим изучение цепных комплексов и их групп гомологий. Пусть C_* и C_*^0 — такие цепные комплексы, что группы C_k^0 являются подгруппами групп C_k и дифференциалы ∂_k^0 комплекса C_*^0 получены сужением ∂_k на C_k^0. В этом случае комплекс C_*^0 называется *подкомплексом комплекса C_**. Определен гомоморфизм $i_*\colon C_*^0 \to C_*$ цепных комплексов, где $i_k\colon C_k^0 \to C_k$ есть мономорфизм вложения; i_* называется *мономорфизмом вложения цепных комплексов.*

Рассмотрим последовательность факторгрупп $\widehat{C}_k = C_k/C_k^0$. Гомоморфизмы ∂_k индуцируют гомоморфизмы $\widehat{\partial}_k\colon \widehat{C}_k \to \widehat{C}_{k-1}$.

Упражнение 1°. Покажите, что группы $\widehat{C}_k$ и гомоморфизмы $\widehat{\partial}_k$ образуют цепной комплекс $\widehat{C}_*$, а эпиморфизмы факторизации $j_k\colon C_k \to \widehat{C}_k$ образуют гомоморфизм цепных комплексов $j_*\colon C_* \to \widehat{C}_*$ (эпиморфизм факторизации).

Последовательность

$$\ldots \to A_{k+1} \xrightarrow{\psi_{k+1}} A_k \xrightarrow{\psi_k} A_{k-1} \to \ldots$$

групп A_k и их гомоморфизмов ψ_k называется точной, если для всех k образ гомоморфизма ψ_{k+1} совпадает с ядром гомоморфизма ψ_k, т. е. $\operatorname{Im}\psi_{k+1} = \operatorname{Ker}\psi_k$.

Упражнение 2°. Покажите, что последовательность

$$0 \to C_k^0 \xrightarrow{i_k} C_k \xrightarrow{j_k} \widehat{C}_k \to 0$$

точна для всех k.

О последовательности цепных комплексов и их гомоморфизмов

$$0 \to C_*^0 \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{j_*} \widehat{C}_* \to 0, \tag{3}$$

где i_* — вложение, j_* — факторизация, говорят, что она точна.

Согласно общему определению можно построить группы гомологий факторкомплекса $\widehat{C}_*$, т. е. группы $H_k(\widehat{C}_*)$. Оказывается, что новые группы связаны с группами $H_k(C_*)$ и $H_k(C_*^0)$ в некоторой точной последовательности.

Построим эту последовательность. Гомоморфизмы i_* и j_* индуцируют гомоморфизмы

$$i_{*k}\colon H_k(C_*^0) \to H_k(C_*), \qquad j_{*k}\colon H_k{*}C_*) \to H_k(\widehat{C}_*).$$

Получаем короткие последовательности:

$$\begin{tikzcd}
H_k(C_*^0) \arrow[r, "i_{*k}"] & H_k(C_*) \arrow[r, "j_{*k}"] & H_k(\widehat{C}_*) \arrow[dll, dashed, "\delta_k"'] \\
H_{k-1}(C_*^0) \arrow[r, "i_{*k-1}"] & H_{k-1}(C_*) \arrow[r, "j_{*k-1}"] & H_{k-1}(\widehat{C}_*)
\end{tikzcd}$$

Оказывается, существуют гомоморфизмы

$$\partial_k\colon H_k(\widehat{C}_*) \to H_{k-1}(C_*^0),$$

объединяющие эти короткие последовательности в длинную точную последовательность

$$\ldots \to H_{k+1}(\widehat{C}_*) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(C_*^0) \xrightarrow{i_{*k}} H_k(C_*) \xrightarrow{j_{*k}} H_k(\widehat{C}_*) \to \ldots \to H_0(\widehat{C}_*) \to 0. \tag{4}$$

Опишем построение гомоморфизмов δ_k. Рассмотрим последовательность (3). Пусть $\widehat{a} \in H_k(\widehat{C}_*)$, $k > 0$, т. е. $\widehat{a}$ — класс смежности некоторого элемента $\alpha \in \operatorname{Ker} \widehat{\partial}_k$ по подгруппе $\operatorname{Im} \widehat{\partial}_{k+1}$. В свою очередь, $\alpha \in \widehat{C}_k$ и его можно рассматривать как класс смежности некоторого элемента $d \in C_k$ по подгруппе C_k^0. Из $\widehat{\partial}_k \alpha = 0$ следует, что $\partial_k d \in C_{k-1}^0$, а из $\partial_{k-1}\partial_k = 0$ — что $\partial_k d \in \operatorname{Ker} \partial_{k-1}$.

Упражнение 3°. Покажите, что класс смежности $[\partial_k d]^0$ элемента $\partial_k d$ в $H_{k-1}(C_*^0)$ не зависит от выбора элементов α и d из соответствующих классов смежности.

Каждому элементу $\widehat{a}$ из $H_k(\widehat{C}_*)$ мы сопоставили элемент $[\partial_k d]^0$ из $H_{k-1}(C_*^0)$, задав тем самым отображение, которое мы будем обозначать

$$\delta_k\colon H_k(\widehat{C}_*) \to H_{k-1}(C_*^0)$$

и называть *связывающим гомоморфизмом.*

Упражнение 4°. Покажите, что δ_k действительно гомоморфизм.

Конструкцию связывающего гомоморфизма можно дополнить, положив δ_0: $H_0(\widehat{C}_*) \to 0$.

Лемма 1. *Последовательность* (4) *точна.*

Доказательство сводится к прямой проверке соотношений

$$\operatorname{Im} \delta_{k+1} = \operatorname{Ker} i_{*k}, \quad \operatorname{Im} i_{*k} = \operatorname{Ker} j_{*k}, \quad \operatorname{Im} j_{*k} = \operatorname{Ker} \delta_k$$

и предоставляется читателю.

Упражнение 5° (С. Ленг). Возьмите любую книгу по гомологической алгебре и докажите все теоремы, не заглядывая в доказательства, данные в книге.

§ 3. Группы гомологий симплициальных комплексов

Применим алгебраическую технику, развитую в § 2, к построению групп гомологий геометрических объектов.

1. Симплициальные комплексы и полиэдры. Сначала дадим необходимые определения.

Определение 1. *Стандартным k-мерным симплексом* σ^k, $k \geqslant 0$, называется выпуклое замыкание $k+1$ точек в $\mathbb{R}^{k+1}$ с координатами $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, т. е. совокупность точек с координатами $(t_0, \ldots, t_k)$ таких, что $t_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Определение 2. *Симплексом размерности k* или *k-мерным симплексом* $\tau^k = (a^0, a^1, \ldots, a^k)$ называется выпуклое замыкание $k+1$ точек $a^0, \ldots, a^k$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$, находящихся в общем положении (не лежащих в одной m-плоскости размерности, меньшей k), т. е. совокупность точек вида $x = \sum_{i=0}^{k} t_i a^i$, где $t_i \geqslant 0$ для всех i, $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Точки a^i называются *вершинами сиплекса* $(a^0, \ldots, a^k)$, а числа t_i — *барицентрическими координатами точки* $x \in (a^0, \ldots, a^k)$.

Естественно определяется понятие грани симплекса.

Определение 3. *Гранью размерности s* или *s-мерной гранью k-мерного симплекса* τ^k, где $0 \leqslant s \leqslant k$, называется выпуклое замыкание подмножества из $s+1$ вершин симплекса τ^k.

Грани размерности $s < k$ симплекса τ^k размерности k будем называть *собственными.*