и называть *связывающим гомоморфизмом.*

Упражнение 4°. Покажите, что δ_k действительно гомоморфизм.

Конструкцию связывающего гомоморфизма можно дополнить, положив $\delta_0\colon H_0(\widehat{C}_*) \to 0$.

Лемма 1. *Последовательность* (4) *точна.*

Доказательство сводится к прямой проверке соотношений

$$\operatorname{Im} \delta_{k+1} = \operatorname{Ker} i_{*k}, \quad \operatorname{Im} i_{*k} = \operatorname{Ker} j_{*k}, \quad \operatorname{Im} j_{*k} = \operatorname{Ker} \delta_k$$

и предоставляется читателю.

Упражнение 5° (С. Ленг). Возьмите любую книгу по гомологической алгебре и докажите все теоремы, не заглядывая в доказательства, данные в книге.

§ 3. Группы гомологий симплициальных комплексов

Применим алгебраическую технику, развитую в § 2, к построению групп гомологий геометрических объектов.

1. Симплициальные комплексы и полиэдры. Сначала дадим необходимые определения.

Определение 1. *Стандартным k-мерным симплексом* σ^k, $k \geqslant 0$, называется выпуклое замыкание $k+1$ точек в $\mathbb{R}^{k+1}$ с координатами $(1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$, $(0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$, $\ldots$, $(0, 0, \ldots, 0, 1)$, т. е. совокупность точек с координатами $(t_0, \ldots, t_k)$ таких, что $t_i \geqslant 0$ для всех i и $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Определение 2. *Симплексом размерности k* или *k-мерным симплексом* $\tau^k = (a^0, a^1, \ldots, a^k)$ называется выпуклое замыкание $k+1$ точек $a^0, \ldots, a^k$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $k \leqslant n$, находящихся в общем положении (не лежащих в одной m-плоскости размерности, меньшей k), т. е. совокупность точек вида $x = \sum\limits_{i=0}^{k} t_i a^i$, где $t_i \geqslant 0$ для всех i, $\sum\limits_{i=0}^{k} t_i = 1$.

Точки a^i называются *вершинами сиплекса* $(a^0, \ldots, a^k)$, а числа t_i — *барицентрическими координатами точки* $x \in (a^0, \ldots, a^k)$.

Естественно определяется понятие грани симплекса.

Определение 3. *Гранью размерности s* или *s-мерной гранью k-мерного симплекса* τ^k, где $0 \leqslant s \leqslant k$, называется выпуклое замыкание подмножества из $s+1$ вершин симплекса τ^k.

Грани размерности $s < k$ симплекса τ^k размерности k будем называть *собственными.*

Очевидно, s-мерная грань симплекса является s-мерным симплексом. В частности, симплексами являются грани стандартного симплекса (и сам стандартный симплекс). Легко убедиться, что k-мерный симплекс афинно гомеоморфен стандартному симплексу той же размерности; внутренность (в несущей k-плоскости) симплекса τ^k можно рассматривать как частный случай k-мерной клетки.

Таким образом, можно строить клеточные комплексы из симплексов разной размерности. Наличие граней у симплекса позволяет соединить симплексы более упорядоченным способом, чем клетки в общем клеточном комплексе.

Определение 4. *Симплициальным комплексом* K называется множество $\{\tau_j^k\}$ симплексов в $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющее следующим условиям: 1) вместе с каждым симплексом τ_j^k в K входит любая его грань; 2) два симплекса могут пересекаться лишь по их общей грани.

Симплициальный комплекс называется *конечным*, если он состоит из конечного числа симплексов.

Рассмотрим теоретико-множественное объединение $|K| \subset \mathbb{R}^n$ всех симплексов из K. Введем в множестве $|K|$ топологию, сильнейшую из тех, в которых отображение вложения каждого симплекса в $|K|$ непрерывно. Другими словами, множество $A \subset |K|$ замкнуто тогда и только тогда, когда $A \cap \tau_i^k$ замкнуто в τ_i^k для всякого $\tau_i^k \in K$. Если симплициальный комплекс K конечен, то эта топология совпадает с топологией, индуцированной метрикой $\mathbb{R}^n$.

Определение 5. Пространство $|K|$ и, более общим образом, всякое топологическое пространство X, гомеоморфное $|K|$, называется *полиэдром*.

Определение 6. *Триангуляцией полиэдра* X называют симплициальный комплекс K такой, что пространство $|K|$ гомеоморфно X.

Примерами полиэдров являются замкнутые поверхности (см. § 4 гл. II). Их триангуляция задается разбиением поверхности на топологические треугольники, их ребра и вершины.

Рассмотрим конечный симплициальный комплекс K. Фиксируем в пространстве $|K| \subset \mathbb{R}^n$ метрику из $\mathbb{R}^n$. Очевидно, существуют различные триангуляции пространства $|K|$. Пусть K' — некоторая триангуляция $|K|$. *Мелкостью триангуляции* K' называют наибольшую из длин входящих в K' одномерных симплексов.

Упражнения. 1°. Докажите, что полиэдр является: а) нормальным пространством; б) конечным клеточным комплексом.

2°. Докажите, что если K — конечный симплициальный комплекс, то пространство $|K|$ является: а) компактным пространством; б) конечным клеточным комплексом.

3°. Докажите, что симплициальный комплекс K конечен тогда и только тогда, когда полиэдр $|K|$ компактен.

Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, мы рассматриваем конечные симплициальные комплексы и компактные полиэдры. Легко видеть, что компактный полиэдр является метризуемым пространством.

Пусть X — полиэдр, K — симплициальный комплекс и φ: $|K| \to X$ — гомеоморфизм. Гомеоморфизм φ порождает разбиение (триангуляцию) пространства X на множества $\sum\limits_i^k = \varphi(\tau_i^k)$, $\tau_i^k \in K$, которые называют *криволинейными симплексами*; образы вершин симплекса τ_i^k назовем *вершинами криволинейного симплекса* $\sum\limits_i^k$.

Упражнения. 4°. Покажите, что симплициальными комплексами являются: а) множество $\{\tau^n\}$ — совокупность симплекса τ^n и всех его граней, $|\{\tau^n\}| = \tau^n$; б) множество $\{\partial\tau^n\}$ — совокупность собственных граней симплекса τ^n, $|\{\partial\tau^n\}|$ совпадает с границей $\partial\tau^n$ множества τ^n в несущей n-плоскости.

5°. Покажите, что замкнутый диск $\overline{D}^n$ и сфера S^{n-1} являются полиэдрами, и задайте их разбиение на криволинейные симплексы.

Указание. Рассмотрите гомеоморфизм симплекса τ^n на $\overline{D}^n$ и воспользуйтесь результатом предыдущего упражнения. Гомеоморфизм можно задать так: рассмотрим симплекс $\tau^n = (a^0, a^1, \ldots, a^n) \subset \mathbb{R}^n$, где

$$a^1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0), \quad a^2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0), \quad \ldots,$$
$$a^n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1),$$
$$a^0 = (-1, -1, -1, \ldots, -1, -1).$$

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$ и $x \neq \theta$. Положим $\lambda(x) = \sup\left\{\alpha \,\middle|\, \alpha\frac{x}{\|x\|} \in \tau^n\right\}$. Тогда для $x \in \overline{D}^n$ определим отображение ψ: $\overline{D}^n \to \tau^n$ так:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ \lambda(x)\cdot x & \text{при} \quad x \neq 0. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что ψ — гомеоморфизм; требуемые разбиения на криволинейные симплексы задает обратный к нему.

2. Гомологии симплициальных комплексов и полиэдров. Сопоставим теперь симплициальному комплексу K некоторый цепной комплекс. Занумеруем вершины каждого симплекса $\tau_i^k \in K$ числами $0, 1, \ldots, k$ в каком-либо порядке $a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}$. Таких нумераций будет $(k+1)!$ Две нумерации называют эквивалентными, если от одной можно перейти к другой четным числом транспозиций номеров. Множество всех нумераций распадается на два класса эквивалентности, один из которых обозначим Λ_i^+, другой Λ_i^-.

Определение 7. Симплекс τ^k с указанием одного из классов Λ^+, Λ^-, т. е. одна из пар (τ^k, Λ^+), (τ^k, Λ^-), называется *ориентированным симплексом*, а соответствующий класс — его *ориентацией*.

Удобнее записывать ориентированный симплекс $\left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right)$ иначе, а именно, задать какую-нибудь нумерацию $a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}$ из класса ориентации и обозначить так:

$$\left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right) = \left[a^{i_0}, a^{i_1}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\right];$$

тогда

$$\left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right) = \left[a^{i_1}, a^{i_0}, a^{i_2}, \ldots, a^{i_k}\right].$$

Определение 8. *Группой k-мерных цепей C_k $(K; G)$* симплициального комплекса K с коэффициентами в абелевой группе G называется факторгруппа группы формальных линейных комбинаций (конечных) вида $\sum\limits_i g_i \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i\right)$, $g_i \in G$, $\Lambda_i = \Lambda_i^+$ или $\Lambda_i = \Lambda_i^-$, по подгруппе элементов вида

$$g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right) + g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right) \tag{1}$$

и их линейных комбинаций.

Другими словами, мы отождествляем элементы $g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^-\right)$, $-g \cdot \left(\tau_i^k, \Lambda_i^+\right)$ в группе формальных линейных комбинаций ориентированных симплексов.

Дифференциал

$$\partial_k \colon C_k(K; G) \to C_{k-1}(K; G)$$

определим равенством

$$\partial_k \left(g \cdot [a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_k}]\right) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \, g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{j-1}}, a^{i_{j+1}}, \ldots, a^{i_k}] \tag{2}$$

для каждого ориентированного симплекса и распространим на всю группу $C_k(K; G)$ по аддитивности. Для $k = 0$ положим ∂_0: $C_0(K; G) \to 0$.

Предложение 1. *Для всех $k \geqslant 1$ выполняется равенство* $\partial_{k-1}\partial_k = 0$.

Доказательство. Действительно, в сумму $\partial_{k-1}\partial_k(g \cdot [a^{i_0}, \ldots$ $\ldots, a^{i_k}])$ входят одновременно слагаемые

$$(-1)^p(-1)^{q-1} g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{p-1}}, a^{i_{p+1}}, \ldots, a^{i_{q-1}}, a^{i_{q+1}}, \ldots, a^{i_k}]$$

и

$$(-1)^p(-1)^q g \cdot [a^{i_0}, \ldots, a^{i_{p-1}}, a^{i_{p+1}}, \ldots, a^{i_{q-1}}, a^{i_{q+1}}, \ldots, a^{i_k}],$$

которые взаимно уничтожаются. ■

Итак, группы $C_k(K; G)$ и дифференциалы ∂_k образуют цепной комплекс, обозначаемый $C_*(K; G)$. В качестве G можно взять, например, группу $\mathbb{Z}$ целых чисел.

Определение 9. Группы гомологий цепного комплекса $C_*(K;\ G)$ называются *группами гомологий симплициального комплекса K с коэффициентами в абелевой группе G* и обозначаются $H_k(K;\ G)$.

Определение 10. *Группами гомологий* $H_k(X;\ G)$ *полиэдра X* с коэффициентами в абелевой группе G называются группы гомологий триангуляции K полиэдра X с коэффициентами в G.

Корректность (независимость от выбора триангуляции) этого определения доказывается технически сложно; мы отложим обсуждение этих вопросов до § 5.

3. Вычисление гомологий конкретных полиэдров. Вычислим группы гомологий $H_k(\tau^n;\ G)$ полиэдра τ^n. Очевидно, для τ^0 — пространства, состоящего из одной точки, имеем

$$C_k(\{\tau^0\};\ G) = \operatorname{Ker} \partial_k = \operatorname{Im} \partial_k = 0 \text{ при } k > 0,$$

$$C_0(\{\tau^0\};\ G) = \operatorname{Ker} \partial_0 \simeq G.$$

Отсюда получаем группы гомологий

$$H_k\ (\tau^0;\ G) = 0 \text{ при } k > 0;\quad H_0(\tau^0;\ G) \simeq G. \tag{3}$$

Перед вычислением $H_k(\tau^n;\ G)$ при $n > 0$ решим более общую задачу. Рассмотрим симплициальный комплекс K, лежащий в гиперплоскости $\Pi^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ и точку $a \in \mathbb{R}^{m+1} \setminus \Pi^m$. *Косинусом aK над комплексом K с вершиной a* будем называть совокупность симплексов, состоящую из симплексов $\tau_i^k \in K$, симплекса a и симплексов вида $(a,\ \tau_i^k)$, т. е. таких симплексов $(a,\ a^{i_0},\ \ldots,\ a^{i_k})$, что $\tau_i^k = (a^{i_0},\ \ldots,\ a^{i_k})$ — некоторый симплекс из K.

Упражнение 6°. Покажите, что aK — симплициальный комплекс.

Предложение 2. *Пусть aK — косинус с вершиной a над симплициальным комплексом K; тогда*

$$H_k(aK;\ G) = 0 \text{ при } k > 0;\quad H_0(aK;\ G) \simeq G. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольную 0-мерную цепь $g \cdot a + \sum_i g_i a^i$ из $C_0(aK;\ G) = \operatorname{Ker}\ \partial_0$; имеем

$$g \cdot a + \sum_i g_i a^i = \left(g + \sum_i g_i\right) \cdot a + \sum_i (g_i \cdot a_i - g_i \cdot a).$$

Ввиду равенства

$$\sum_i (g_i \cdot a^i - g_i \cdot a) = \partial_1 (\sum_i g_i \cdot [a,\ a^i])$$

произвольный цикл $g\cdot a+\sum\limits_i g_i\cdot a^i$ из $\operatorname{Ker}\partial_0$ гомологичен циклу $g'\cdot a=\left(g+\sum\limits_i g_i\right)\cdot a$, который при $g'\neq 0$ не гомологичен нулю в группе $C_0(aK;\,G)$. Получаем изоморфизм $H_0(aK;\,G)\simeq G$.

Рассмотрим теперь произвольный k-мерный цикл в $C_k(aK,\,G)$

$$z_k=\sum_i g_i\cdot[\tau_i^k]+\sum_i h_i\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]\in\operatorname{Ker}\partial_k,$$

где $i\in I_k$, $j\in I_{k-1}$, g_i, $h_j\in G$ и через $[\tau_i^k]$, $[a,\,\tau_i^{k-1}]$ обозначены ориентированные симплексы. Имеем

$$\sum_i g_i\cdot[\tau_i^k]\sim\sum_i(g_i\cdot[\tau_i^k]-\partial_{k+1}(g_i\cdot[a,\,\tau_i^k]))=\sum_i g_j'\cdot[a\cdot\tau_j^{k-1}].$$

Поэтому цикл z_k гомологичен циклу

$$z_k'=\sum_j h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]=\sum_j(g_j'+h_j)\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}].$$

В сумму $\partial_k\left(\sum\limits_j\quad h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]\right)$ симплекс $[\tau_j^{k-1}]$ входит с коэффициентом h_j' (только один раз!). Поэтому $\sum\limits_j h_j'\cdot[a,\,\tau_j^{k-1}]$ — цикл тогда и только тогда, когда $h_j'=0$ для всех j.

Итак, мы установили, что в $C_*(aK;\,G)$ при $k>0$ всякий цикл из $\operatorname{Ker}\partial_k$ гомологичен нулю в $C_k(aK;\,G)$. Следовательно, $H_k(aK;\,G)=0$ при $k>0$. ■

Заметим, что комплекс $\{\tau^n\}$, соответствующий симплексу $\tau^n=(a^0,\,\ldots,\,a^n)$, является конусом $a^0\{\tau^{n-1}\}$ с вершиной a^0 над комплексом $\{\tau^{n-1}\}$, соответствующим симплексу $\tau^{n-1}=(a^1,\,\ldots,\,a^n)$. Поэтому из равенств (3) и (4) получаем группы гомологий n-мерного симплекса:

$$H_k(\tau^n;\,G)\simeq\begin{cases}0 & \text{при}\quad k>0,\\ G & \text{при}\quad k=0\end{cases}\tag{5}$$

для всех $n\geqslant 0$.

Перейдем к вычислению групп гомологий $H_k(|\{\partial\tau^n\}|;\,G)$ полиэдра $|\{\partial\tau^n\}|$, триангуляция $\{\partial\tau^n\}$ которого состоит из всех собственных граней симплекса τ^n. Рассмотрим случай $n>1$. Тогда при $k<n$ имеем $C_k(\{\partial\tau^n\};\,G)=C_k(\{\tau^n\};\,G)$, и дифференциалы цепных комплексов $C_*(\{\partial\tau^n\};\,G)$ и $C_*(\{\tau^n\};\,G)$ совпадают при $k<n$. Поэтому при $k<n-1$

$$H_k(\{\partial\tau^n\};\,G)\simeq H_k(\{\tau^n\};\,G).\tag{6}$$

Очевидно, при $k > n - 1$

$$H_k(\{\partial\tau^n\}; G) = 0. \tag{7}$$

Поскольку $H_{n-1}(\{\tau^n\}; G) = 0$, всякий цикл $z_{n-1} \in C_{n-1}(\{\tau^n\}; G)$ является границей $\partial_n(g\cdot[\tau^n])$ цепи $g\cdot[\tau^n] \in C_n(\{\tau^n\}; G)$, а следовательно, в комплексе $C_*(\{\tau^n\}; G)$ имеем $\operatorname{Ker}\partial_{n-1} = \operatorname{Im}\partial_n \simeq G$. Дифференциалы в комплексах $C_*(\{\tau^n\}; G)$ и $C_*(\{\partial\tau^n\}; G)$ совпадают на группах цепей $C_{n-1}(\{\tau^n\}; G) = C_{n-1}(\{\partial\tau^n\}; G)$. Значит, в $C_*(\{\partial\tau^n\}; G)$ группа $\operatorname{Ker}\partial_{n-1}$ изоморфна группе G, в то время как $\operatorname{Im}\partial_n = \partial_n(C_n(\{\partial\tau^n\}; G)) = 0$; следовательно,

$$H_{n-1}(\{\partial\tau^n\}; G) \simeq G. \tag{8}$$

Итак, при $n > 1$ вычислены гомологии границы n-мерного симплекса:

$$H_k(|\{\partial\tau^n\}|; G) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k \neq 0,\ n-1, \\ G & \text{при} \quad k = 0,\ n-1. \end{cases} \tag{9}$$

Упражнение 7°. Докажите, что

$$H_k(|\{\partial\tau^1\}|; G) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad k > 0, \\ G \oplus G & \text{при} \quad k = 0. \end{cases} \tag{10}$$

Остановимся на наглядной геометрической интерпретации групп гомологий симплициального комплекса. Цикл из $C_k(K; \mathbb{Z})$ является набором k-мерных симплексов из K, каждый из которых взят с некоторой кратностью; этот набор замкнут в том смысле, что каждый $(k-1)$-мерный симплекс входит в границу k-мерного цикла одинаковое число раз с противоположными ориентациями. Два k-мерных цикла эквивалентны (гомологичны), если их разность является границей $(k+1)$-мерной цепи, т. е. ограничивает некоторый набор $(k+1)$-мерных симплексов; группа $H_k(|K|;\mathbb{Z})$ — группа классов эквивалентности таких k-мерных циклов. Грубо говоря, $H_k(|K|; \mathbb{Z})$ состоит из тех замкнутых совокупностей k-мерных симплексов, которые нельзя «заклеить» совокупностями $(k+1)$-мерных симплексов. Таким образом, интуитивно группа $H_k(|K|; \mathbb{Z})$ соответствует группе, порожденной $(k+1)$-мерными «дырками» в пространстве $|K|$.

Определение 11. *Подкомплексом* симплициального комплекса называется подмножество L симплексов из K, являющееся симплициальным комплексом.

Пусть L — подкомплекс симплициального комплекса K. Очевидно, $C_*(L; G)$ является подкомплексом цепного комплекса $C_*(K; G)$. Поэтому определен факторкомплекс

$$C_*(K, L; G) = C_*(K; G)/C_*(L; G).$$

Обозначая группы гомологий этого цепного комплекса через $H_k(K, L; G)$, получим из точной последовательности цепных комплексов

$$0 \to C_*(L; G) \xrightarrow{i_*} C_*(K; G) \xrightarrow{j_*} C_*(K, L; G) \to 0$$

длинную точную последовательность групп гомологий

$$\ldots \to H_{k+1}(K, L; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k(L; G) \xrightarrow{i_{*k}}$$
$$\xrightarrow{} H_k(K; G) \xrightarrow{i_{*k}} H_k(K, L; G) \xrightarrow{\delta_k} H_{k-1}(L; G) \to \ldots$$

Она называется *точной последовательностью пары* (K, L), группы $H_k(K, L; G)$ называются *относительными группами гомологий* или *группами гомологий пары* (K, L).

Определение относительных групп гомологий полезно «расшифровать».

Поскольку цепь $\widehat{\gamma}_k$ из $C_k(K, L; G)$ есть смежный класс группы $C_k(K; G)$ по подгруппе $i_k(C_k(L; G)) \simeq C_k(L; G)$, в смежном классе $\widehat{\gamma}_k$ существует единственный представитель — цепь γ_k из $C_k(K; G)$, в которую с ненулевыми коэффициентами входят лишь те ориентированные симплексы комплекса K, которые не являются ориентированными симплексами подкомплекса L. Из определения граничного гомоморфизма в факторкомплексе следует, что граничный гомоморфизм ∂_k: $C_k(K, L; G) \to C_{k-1}(K, L; G)$ переводит цепь $\widehat{\gamma}_k$ в цепь $\widehat{\gamma}_{k-1}$, являющуюся смежным классом группы $C_{k-1}(K; G)$ по подгруппе $i_{k-1}(C_{k-1}(L; G)) \simeq C_{k-1}(L; G)$ с представителем $\partial_k\gamma_k \in C_{k-1}(K, G)$. Отбросим в цепи $\partial_k\gamma_k$ все слагаемые $g_m[\tau_m^{k-1}]$, для которых τ_m^{k-1} — симплекс из L. Полученная цепь γ_{k-1}, очевидно, принадлежит тому же самому смежному классу $\widehat{\gamma}_{k-1}$, что и цепь $\widehat{\partial_k\gamma_k}$.

Ясно, что цепной комплекс $C_*(K, L; G)$ изоморфен следующему цепному комплексу $\widetilde{C}_*$: цепи — это формальные линейные комбинации ориентированных симплексов (в смысле определения 8) из $K \setminus L$, граничный гомоморфизм сопоставляет k-мерной цепи γ_k цепь размерности $k-1$, получаемую вычислением на γ_k значения граничного гомоморфизма ∂_k (в цепном комплексе $C_*(K; G)$) и отбрасыванием всех лишних слагаемых $g_m \cdot [\tau_m^{k-1}]$, для которых τ_m^{k-1} принадлежит L. Поскольку изоморфизм цепных комплексов индуцирует изоморфизм групп гомологий, то $H_k(\widetilde{C}_*) \simeq H_k(K, L; G)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Таким образом, мы пришли к более наглядному определению групп гомологий пары. Отметим, что цепи, циклы и границы комплекса $\widetilde{C}_*$ называются относительными (для пары (K, L)).

Теперь выясним геометрический смысл связывающего гомоморфизма

$$\delta_k\colon H_k(K, L; G) \to H_{k-1}(L; G).$$

Пусть $\tilde{h}_k \in H_k(K, L; G)$ — класс гомологий относительного цикла $z_k \in \tilde{C}_k$. Рассмотрим z_k как цепь в $C_*(K; G)$ и вычислим в нем ее границу $\partial_k z_k$. По определению относительного цикла в цепь $\partial_k z_k$ после приведения подобных войдут с ненулевыми коэффициентами лишь ориентированные симплексы из L. Поэтому $\partial_k z_k$ можно рассматривать как цепь в $C_*(L; G)$. Без труда проверяется, что $\partial_k z_k$ — цикл, класс гомологий которого $h_{k-1} \in H_{k-1}(L; G)$ не зависит от выбора представителя z_k класса $\tilde{h}_k$. Согласно общей конструкции связывающего гомоморфизма (§ 2) $\delta_k \tilde{h}_k = h_{k-1}$. Если относительный цикл представлять себе как составленное из k-мерных ориентированных симплексов многообразие с краем, лежащим в L, то $\partial_k z_k$ — именно этот край с соответствующими ориентациями $(k-1)$-мерных симплексов.

Пример (рис. 125). Пусть симплициальный комплекс состоит из симплексов

$$a^0,\ a^1, a^2,\ a^3,$$
$$(a^0, a^1),\ (a^1, a^2),\ (a^2, a^3),\ (a^3, a^0),\ (a^1, a^3),$$
$$(a^0, a^1, a^3),\ (a^1, a^2, a^3),$$

а его подкомплекс L состоит из тех же симплексов, кроме

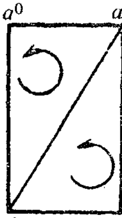

Рис. 125

$$(a^1, a^3),\quad (a^0, a^1, a^3),\quad (a^1, a^2, a^3).$$

Таким образом, $|K|$ — это прямоугольник (с «внутренностью»), а $|L|$ — его граница. Очевидно, цепь $\gamma_2 \in C_2(K; \mathbb{Z})$,

$$\gamma_2 = [a^0, a^1, a^3] + [a^1, a^2, a^3],$$

является относительным циклом пары (K, L). Действительно, в ее границу

$$\partial_2\gamma_2 = [a^3, a^0] + [a^0, a^1] + [a^1, a^2] + [a^2, a^3]$$

входят с ненулевыми коэффициентами лишь ориентированные симплексы из подкомплекса L. Цепь $\gamma_1 = [a^1, a^3]$ из $C_1(K; \mathbb{Z})$ является одновременно относительным циклом (проверьте!) и относительной границей, так как может быть получена из

$$\partial_2[a^0, a^1, a^3] = [a^1, a^3] + [a^3, a^0] + [a^0, a^1]$$

отбрасыванием слагаемых $[a^3, a^0]$ и $[a^0, a^1]$ — ориентированных симплексов из подкомплекса L. Нетрудно видеть, что относительный цикл γ_2 определяет образующую группы $H_2(K, L; \mathbb{Z})$. Связывающий гомоморфизм δ_2: $H_2(K, L; \mathbb{Z}) \to H_1(L; \mathbb{Z})$ сопоставляет этой образующей элемент (также образующий) группы $H_1(L; \mathbb{Z})$, состоящий из одного цикла $\delta_2\gamma_2$.

Упражнения. 8°. Напишите точную последовательность пары (K, L) для рассмотренного примера.

9°. Пусть L_1 и L_2 — подкомплексы симплициального комплекса K. Докажите, что $L_1 \cap L_2$ и $L_1 \cup L_2$ — также подкомплексы комплекса K, и установите точность последовательности

$$0 \to C_*(L_1 \cap L_2; G) \xrightarrow{I_*} C_*(L_1; G) \oplus C_*(L_2; G) \to C_*(L_1 \cap L_2; G) \to 0,$$

где $I_k(\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k]) = \left(\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k],\ -\sum\limits_i g_i \cdot [\tau_i^k]\right)$. Выведите отсюда точную последовательность

$$\ldots \to H_{k+1}(L_1 \cup L_2; G) \to H_k(L_1 \cap L_2; G) \to$$
$$\to H_k(L_1; G) \oplus H_k(L_2; G) \to H_k(L_1 \cup L_2; G) \to$$
$$\to H_{k-1}(L_1 \cap L_2; G) \to \ldots \qquad (11)$$

называемую *точной последовательностью Майера—Вьеториса.*

Точная последовательность (11) позволяет вычислять группы гомологий сложных симплициальных комплексов.

10°. Используя (5), (9), (10) и (11), вычислите группы гомологий комплекса, состоящего из симплексов размерности 0 и 1, изображенного на рис. 126.

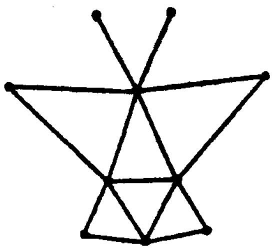

Рис. 126

Указание. Рассмотрите комплекс как последовательное объединение подкомплексов.

11°. Покажите, что для ориентируемой поверхности M_p рода p имеем изоморфизм $H_2(M_p; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Указание. Покажите, что любой 2-мерный цикл кратен циклу, равному сумме всех криволинейных 2-симплексов триангуляции M_p, взятых с согласованной ориентацией.

Отметим, что для любого линейно связного полиэдра X оказывается $H_0(X; G) \sim G$. Действительно, если a — вершина триангуляции K полиэдра X, то всякий цикл из $C_0(K; G)$ гомологичен циклу вида $g \cdot a$, не гомологичному нулю при $g \neq 0$; для цикла вида $\sum\limits_i g_i a^i$ такая гомологичность легко устанавливается с помощью последовательностей одномерных симплексов, «ведущих» от точек a^i к точке a. Более общим образом, для любого полиэдра X группа $H_0(X; G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько компонент связности имеет полиэдр (заметим, что для полиэдров понятия связности и линейной связности эквивалентны, т. е. связный полиэдр линейно связен).

Используя корректность определения групп гомологий полиэдра, мы можем провести ряд интересных вычислений. Прежде всего заметим, что в силу определений 5, 6 группы гомологий гомеоморфных полиэдров одинаковы (изоморфны).

Поэтому группы гомологий замкнутого n-мерного диска (и n-мерного куба) совпадают с группами гомологий симплекса τ^n, а группы гомологий $(n-1)$-мерной сферы (и границы n-мерного куба) совпадают с группами гомологий полиэдра $|\{\partial\tau^n\}|$ — границы симплекса (см. упр. 4°, 5° и формулы (5), (9), (10)).

С помощью точной последовательности (11) нетрудно вычислить группы гомологий полиэдра $C = S^1 \times [0; 1]$ — цилиндра над окружностью. Разрежем вдоль образующих отрезков I_1 и I_2 цилиндр на два искривленных прямоугольника, P_1 и P_2, с общей границей $I_1 \cup I_2$ и запишем точную последовательность (с коэффициентами в $\mathbb{Z}$)

$$0 \to C_*(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to C_*(P_1; \mathbb{Z}) \oplus C_*(P_2; \mathbb{Z}) \to C_*(P_1 \cup P_2; \mathbb{Z}) \to 0;$$

в группах гомологий получаем точную последовательность (Майера—Виеториса)

$$\begin{gathered} 0 \to H_2(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to H_2(P_1; \mathbb{Z}) \oplus H_2(P_2; \mathbb{Z}) \to \\ \to H_2(C; \mathbb{Z}) \to H_1(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to H_1(P_1; \mathbb{Z}) \oplus \\ \oplus H_1(P_2; \mathbb{Z}) \to H_1(C; \mathbb{Z}) \to H_0(I_1 \cup I_2; \mathbb{Z}) \to \\ \to H_0(P_1; \mathbb{Z}) \oplus H_0(P_2; \mathbb{Z}) \to H_0(C; \mathbb{Z}) \to 0, \end{gathered}$$

или

$$\begin{gathered} 0 \to 0 \oplus 0 \to 0 \oplus 0 \to H_2(C; \mathbb{Z}) \to 0 \oplus 0 \to 0 \oplus 0 \to H_1(C; \mathbb{Z}) \to \\ \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0, \end{gathered}$$

откуда следует, что $H_2(C; \mathbb{Z}) = 0$ и $H_1(C; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$.

Итак,

$$H_i(C; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 0, 1, \\ 0 & \text{при} \quad i = 2. \end{cases}$$

Теперь нетрудно вычислить группы гомологий тора $T^2 \simeq S^1 \times S^1$. Разобьем тор на два искривленных цилиндра, C_1 и C_2, пересекающихся по основаниям S_1^1 и S_2^1. Получим точную последовательность

$$0 \to C_*(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to C_*(C_1; \mathbb{Z}) \oplus C_*(C_2; \mathbb{Z}) \to C_*(T^2; \mathbb{Z}) \to 0,$$

в группах гомологий имеем точную последовательность

$$0 \to H_2(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to H_2(C_1; \mathbb{Z}) \oplus H_2(C_2; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to H_2(T^2; \mathbb{Z}) \to H_1(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to H_1(C_1; \mathbb{Z}) \oplus$$
$$\oplus H_1(C_2; \mathbb{Z}) \to H_1(T^2; \mathbb{Z}) \to H_0(S_1^1 \cup S_2^1; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to H_0(C_1; \mathbb{Z}) \oplus H_0(C_2; \mathbb{Z}) \to H_0(T^2; \mathbb{Z}) \to 0;$$

поскольку тор T^2 линейно связен, то $H_0(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, а в силу упражнения 11° $H_2(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, поэтому получаем точную последовательность

$$0 \to 0 \to 0 \oplus 0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to H_1(T^2; \mathbb{Z}) \to$$
$$\to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \to 0,$$

откуда следует, что $H_1(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Итак,

$$H_i(T^2; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i > 2, \\ \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 0, 2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{при} \quad i = 1. \end{cases}$$

Упражнения. 12°. Покажите, что для ориентируемой поверхности M_p рода p имеем

$$H_1(M_p; \mathbb{Z}) \simeq \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{2p}.$$

Указание. Рассмотрите M_p как результат приклеивания к сфере S^2 с $2p$ дырками p ручек («искривленных цилиндров») и примените точную последовательность Майера—Виеториса.

13°. Покажите, что

$$H_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ 0, & k > 1 \end{cases}$$

и

$$h_k(\mathbb{R}\mathrm{P}^2; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 1, 2, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

Указание. Используйте симплициальное разбиение $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$.

14°. Покажите, что для неориентируемой поверхности N_q рода q

$$H_k(N_q; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & k = 0, \\ \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{q-1} \oplus \mathbb{Z}_2, & k = 1, \\ 0, & k > 1. \end{cases}$$

15°. Покажите, что

$$H_k(M_p; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 2, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{2p}, & k = 1, \\ 0, & k > 2 \end{cases}$$

и

$$H_k(N_q; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & k = 0, 2, \\ \underbrace{\mathbb{Z}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_2}_{q}, & k = 1, \\ 0, & k > 2. \end{cases}$$

4. Барицентрические подразделения. Симплициальные отображения. Пусть $\tau^k = (a^0, \ldots, a^k)$ — k-мерный комплекс. *Барицентром симплекса* τ^k называется точка с барицентрическими координатами $1/(k+1), \ldots, 1/(k+1)$. Обозначим эту точку $b^{0, 1, \ldots, k}$; более общим образом, обозначим через $b^{i_0, \ldots, i_p}$ точку, барицентрические координаты t_i которой определены следующим образом:

$$t_i = \begin{cases} \dfrac{1}{p+1}, & i = i_0, \ldots, i_p, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для всевозможных наборов $a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}$ из $p+1$ вершин $(0 \leqslant p \leqslant k)$ соответствующие им точки $b^{i_0, \ldots, i_p}$ являются барицентрами p-мерных граней $(a^{i_0}, \ldots, a^{i_p})$ симплекса τ^k (0-мерные грани — это вершины a^i, а k-мерная грань — сам симплекс τ^k). Рассмотрим всевозможные симплексы вида

$$(b^{i_0, i_1, \ldots, i_p}, \quad b^{i_0, i_1, \ldots, i_{p-1}}, \ldots, b^{i_0, i_1}, b^{i_0}), \quad 0 \leqslant p \leqslant k.$$

Совокупность всех таких симплексов и их граней образует симплициальный комплекс, называемый *барицентрическим подразделением симплекса* τ^k (рис. 127).

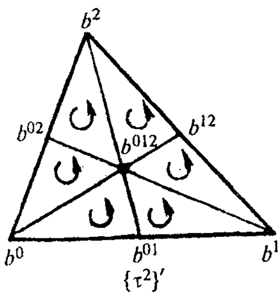

Рис. 127

Пусть k — симплициальный комплекс. Барицентрические подразделения всех его симплексов образуют симплициальный комплекс K', называемый *барицентрическим подразделением комплекса* K. Мы будем рассматривать также симплициальные комплексы $K^{(2)} = (K')'$, ... $K^{(r)} = (K^{(r-1)})'$.

Операция барицентрического подразделения комплекса определяет цепной гомоморфизм

$$\Xi_*: C_*(K; G) \to C_*(K'; G).$$

На вершинах a^i гомоморфизм Ξ_0 определяется формулой

$$\Xi_0(g\cdot a^i) = g\cdot a^i, \tag{12}$$

а на симплексах большей размерности он может быть определен индуктивно формальным соотношением

$$\Xi_p\left(g\cdot[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}]\right) = \left[b^{i_0, \ldots, i_p}, \Xi_{p-1}\partial_p\left(g\cdot[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}]\right)\right], \tag{13}$$

которое означает, что если выполняется равенство

$$\Xi_{p-1}\partial_p\left(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]\right) = \sum_i g_k\cdot\left[c_k^{j_0}, \ldots, c_k^{j_{p-1}}\right],$$

то имеем

$$\Xi_p\left(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]\right) = \sum_k g_k\cdot\left[b^{i_0, \ldots, i_p}, c_k^{j_0}, \ldots, c_k^{j_{p-1}}\right].$$

Затем Ξ_p можно по линейности распространить на всю группу $C_p(K; G)$. Нетрудно проверить, что Ξ_* — цепной гомоморфизм.

Наряду с Ξ_*: $C_*(K; G) \to C_*(K'; G)$ естественно определены гомоморфизмы

$$\Xi_*^{(r)}: C_*(K; G) \to C_*(K^{(r)}; G).$$

Пусть K и L — симплициальные комплексы. Отображение f: $K \to L$ называется *симплициальным*, если образом каждого симплекса τ^k из K является некоторый симплекс из L и отображение $f\big|_{\tau^k}$ линейно в барицентрических координатах:

$$f\left(t_0a^{i_0} + \ldots + t_ka^{i_k}\right) = t_0f(a^{i_0}) + \ldots + t_kf(a^{i_k}).$$

Понятия барицентрического подразделения и симплициального отображения имеют смысл и при рассмотрении полиэдров, составленных из криволинейных симплексов, поскольку барицентрические координаты могут быть перенесены на криволинейные симплексы с помощью гомеоморфизма триангуляции.

Пусть f: $|K| \to |L|$ — симплициальное отображение. Определим гомоморфизмы

$$\widehat{f}_p: C_p(K; G) \to C_p(L; G)$$

следующим образом: для каждого симплекса $\left(a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right) \in K$ положим

$$\widehat{f}_p\left(g\cdot\left[a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}\right]\right) = \begin{cases} g\cdot\left[fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right], & \text{если } \left(fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right) \text{ — симплекс размерности } p; \\ 0, & \text{если } \left(fa^{i_0}, \ldots, fa^{i_p}\right) \text{ — симплекс размерности, меньшей чем } p, \end{cases}$$

и распространим $\widehat{f}_p$ по линейности на $C_p(K; G)$.

Упражнения. 16°. Покажите, что совокупность гомоморфизмов $\{\hat{f}_p\}$ является гомоморфизмом цепных комплексов

$$\hat{f}_*: C_*(K; G) \to C_*(L; G)$$

и, следовательно, индуцирует гомоморфизмы

$$f_{*p}: H_p(K; G) \to H_*(L; G).$$

17°. Покажите, что симплициальные отображения являются морфизмами категории, объектами которой являются симплициальные комплексы, а соответствие

$$K \dashrightarrow H_p(K; G),$$

$$f: K \dashrightarrow f_{*p}: H_p(K; G) \to H_p(L; G)$$

является ковариантным функтором из описанной выше категории в категорию абелевых групп.

18°. Покажите, что соответствие, сопоставляющее абелевой группе G группу гомологий $H_p(K; G)$ симплициального комплекса K с коэффициентами в G, является ковариантным функтором из категории абелевых групп в эту же категорию.

§ 4. Сингулярная теория гомологий

1. Группы сингулярных гомологий. В этом параграфе будет построен еще один функтор из категории гомотопических типов пространств в категорию абелевых групп — гомологический функтор. Чтобы привлечь алгебраические конструкции § 2 для изучения топологического пространства, необходимо разработать способы построения цепных комплексов по заданному пространству X. В алгебраической топологии имеется несколько таких приемов, предполагающих выполнение тех или иных свойств для пространства X; изложим один из самых общих.

Сингулярным k-мерным симплексом топологического пространства X называется непрерывное отображение $f^k: \sigma^k \to X$ стандартного симплекса σ^k в топологическое пространство X.

Пусть G — кольцо с единицей *, например кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Формальная линейная комбинация $\sum_i g_i f_i^k$ сингулярных k-мерных симплексов пространства X с коэффициентами g_i из G, лишь конечное число которых отлично от нуля, называется *k-мерной сингулярной цепью* пространства X. Множество всех k-мерных сингу-

* В качестве G можно было бы взять, как и в § 3, любую абелеву группу. Для удобства изложения, однако, полезно иметь коэффициент 1 с тем, чтобы не писать его вовсе (в § 3 мы не пользовались этим приемом).