Упражнения. 16°. Покажите, что совокупность гомоморфизмов $\{\hat{f}_p\}$ является гомоморфизмом цепных комплексов

$$\hat{f}_*\colon C_*(K;\,G) \to C_*(L;\,G)$$

и, следовательно, индуцирует гомоморфизмы

$$f_{*p}\colon H_p(K;\,G) \to H_*(L;\,G).$$

17°. Покажите, что симплициальные отображения являются морфизмами категории, объектами которой являются симплициальные комплексы, а соответствие

$$K \dashrightarrow H_p(K;\,G),$$

$$f\colon K \dashrightarrow f_{*p}\colon H_p(K;\,G) \to H_p(L;\,G)$$

является ковариантным функтором из описанной выше категории в категорию абелевых групп.

18°. Покажите, что соответствие, сопоставляющее абелевой группе G группу гомологий $H_p(K;\,G)$ симплициального комплекса K с коэффициентами в G, является ковариантным функтором из категории абелевых групп в эту же категорию.

§ 4. Сингулярная теория гомологий

1. Группы сингулярных гомологий. В этом параграфе будет построен еще один функтор из категории гомотопических типов пространств в категорию абелевых групп — гомологический функтор. Чтобы привлечь алгебраические конструкции § 2 для изучения топологического пространства, необходимо разработать способы построения цепных комплексов по заданному пространству X. В алгебраической топологии имеется несколько таких приемов, предполагающих выполнение тех или иных свойств для пространства X; изложим один из самых общих.

Сингулярным k-мерным симплексом топологического пространства X называется непрерывное отображение $f^k\colon \sigma^k \to X$ стандартного симплекса σ^k в топологическое пространство X.

Пусть G — кольцо с единицей *, например кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$. Формальная линейная комбинация $\sum\limits_i g_i f_i^k$ сингулярных k-мерных симплексов пространства X с коэффициентами g_i из G, лишь конечное число которых отлично от нуля, называется *k-мерной сингулярной цепью* пространства X. Множество всех k-мерных сингу-

* В качестве G можно было бы взять, как и в § 3, любую абелеву группу. Для удобства изложения, однако, полезно иметь коэффициент 1 с тем, чтобы не писать его вовсе (в § 3 мы не пользовались этим приемом).

лярных цепей X с коэффициентами в G обозначается $C_k^s(X; G)$. Оно является абелевой группой относительно сложения цепей как линейных комбинаций. Если $G = \mathbb{Z}$, то группа $C_k^s(X; \mathbb{Z})$ — свободная абелева группа и ее образующими являются всевозможные сингулярные k-мерные симплексы.

Определим дифференциал

$$\partial_k^s\colon C_k^s(X; G) \to C_{k-1}^s(X; G).$$

Для этого рассмотрим стандартные $(k-1)$- и k-мерные симплексы σ^{k-1} и σ^k. Сопоставим точке

$$(t_0, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots, t_{k-1}) \in \sigma^{k-1}$$

точку

$$(t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_{k-1}) \in \sigma^k.$$

Это сопоставление определяет отображение $\Delta_i^{k-1}\colon \sigma^{k-1} \to \sigma^k$, отображающее σ^{k-1} на i-ю $(k-1)$-мерную грань симплекса σ^k. Если f^k — k-мерный сингулярный симплекс, то суперпозиция $f^k \Delta_i^{k-1}$, очевидно, является $(k-1)$-мерным сингулярным симплексом. Для всякого симплекса f^k, $k \geqslant 1$, положим

$$\partial_k^s f^k = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \cdot (f^k \Delta_i^{k-1})$$

и определим гомоморфизм ∂_k^s на всей группе $C_k^s(X; G)$ по линейности:

$$\partial_k^s \left(\sum_i g_i f_i^k \right) = \sum_i g_i \partial_k^s f_i^k.$$

Если $k = 0$, то естественно положить $\partial_0^s f^0 = 0$ и в согласии с предыдущим продолжить ∂_0^s нулевым значением на $C_0^s(X; G)$.

Упражнение 1°. Проверьте, что $\partial_k^s \partial_{k+1}^s = 0$.

Указание. Достаточно проверить это равенство на произвольном симплексе f^{k+1}.

Как видим, последовательность групп $C_k^s(X; G)$ и гомоморфизмов ∂_k^s образует цепной комплекс, который мы обозначим $C_*^s(X; G)$. Он называется *сингулярным цепным комплексом* пространства X.

Пусть $\varphi\colon X \to Y$ — непрерывное отображение. Для всякого k-мерного сингулярного симплекса $f^k\colon \sigma^k \to X$ пространства X суперпозиция φf^k является k-мерным сингулярным симплексом пространства Y. Очевидно, φ индуцирует гомоморфизм $\varphi_k\colon C_k^s(X; G) \to C_k^s(Y; G)$.

Упражнение 2°. Докажите, что система гомоморфизмов φ_k образует гомоморфизм цепных комплексов

$$\varphi_*\colon C_*^s(X;\,G)\to C_*^s(Y;\,G),$$

т. е. для $k\geqslant 1$ выполнены равенства $\bar{\partial}_k^s\varphi_k=\varphi_{k-1}\partial_k^s$, где ∂_k^s, $\bar{\partial}_k^s$ — дифференциалы комплексов $C_*^s(X;\,G)$, $C_*^s(Y;\,G)$.

Определение 1. Группы гомологий комплекса $C_*(X,\,G)$ называются *группами сингулярных гомологий пространства* X с коэффициентами в G; k-я группа гомологий обозначается $H_k^s(X;\,G)$, совокупность групп $\{H_k^s(X;\,G)\}_{k\geqslant 0}$ обозначается $H_*^s(X;\,G)$.

Пример. Вычислим группы гомологий точки $*$. Очевидно, что $C_k^s(*;\,G)\simeq G$, поскольку имеется лишь один сингулярный симплекс $f^k\colon \sigma^k\to *$ для всякого k. Значение дифференциала на нем при $k\geqslant 1$ вычисляем по формуле

$$\partial_k^s f^k=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot f^k\Delta_i^{k-1}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\cdot f^{k-1}=\begin{cases}0 & \text{при нечетном } k,\\ f^{k-1} & \text{при четном } k.\end{cases}$$

Напомним, что $\partial_k^s=0$ при $k=0$. Отсюда получаем, что если k нечетно, то

$$\operatorname{Im}\partial_{k+1}^s=C_k^s(*;\,G)=\operatorname{Ker}\partial_k^s\simeq G,$$

если же k четно и не равно нулю, то

$$\operatorname{Im}\partial_{k+1}^s=\operatorname{Ker}\partial_k^s=0.$$

Наконец, $\operatorname{Im}\partial_1^s=0$, $\operatorname{Ker}\partial_0^s\simeq 0$; следовательно,

$$H_0^s(*;\,G)\simeq G;\quad H_i^s(*;\,G)\simeq 0,\quad i>0.\ \blacklozenge \tag{1}$$

Поскольку непрерывное отображение $\varphi\colon X\to Y$ индуцирует гомоморфизм $\varphi_*\colon C_*^s(X;\,G)\to C_*^s(Y;\,G)$ сингулярных цепных комплексов пространств X и Y, оно индуцирует *гомоморфизмы групп сингулярных гомологий*

$$\varphi_{*k}\colon H_k^s(X;\,G)\to H_k^s(Y;\,G).$$

Упражнения. 3°. Покажите, что если $\varphi\colon X\to Y$, $\psi\colon Y\to Z$ — непрерывные отображения, то $(\psi\varphi)_{*k}=\psi_{*k}\varphi_{*k}$. Покажите, что тождественному отображению X соответствует тождественное отображение групп гомологий, т. е. $(1_X)_{*k}=1_{H_k^s(X;\,G)}$. Выведите отсюда, что группы гомологий гомеоморфных пространств совпадают (теорема о топологической инвариантности групп гомологий).

4°. Покажите, что постоянное отображение $X \to Y$, т. е. отображение, переводящее X в точку $y_0 \in Y$, индуцирует тривиальный (нулевой) гомоморфзм в группах гомологий старших размерностей, $k > 0$.

2. Свойства групп сингулярных гомологий. В п. 1 построен ковариантный функтор, точнее, совокупность функторов $H_*^s = \{H_k^s(\cdot\,; G)\}_{k \geq 0}$ из категории топологических пространств в категорию абелевых групп. Изучим важнейшие свойства этого функтора.

Теорема 1. *Пусть отображения* φ, ψ: $X \to Y$ *гомотопны. Тогда индуцированные гомоморфизмы групп гомологий совпадают.*

Докажем сначала следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть B — выпуклое множество евклидова пространства; тогда*

$$H_*^s(B; G) \simeq H_*^s(*; G). \tag{2}$$

Доказательство. Пусть f^k: $\sigma^k \to B$ — сингулярный симплекс. Определим сингулярный симплекс $D_k f^k$: $\sigma^{k+1} \to B$ равенством

$$D_k f(t_0, \ldots, t_{k+1}) = \begin{cases} t_0 w + (1 - t_0) f^k \left(\frac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \frac{t_{k+1}}{1-t_0} \right) & \text{при} \quad t_0 \neq 1, \\ w & \text{при} \quad t_0 = 1, \end{cases} \tag{3}$$

где w — точка из B, а t_i — барицентрические координаты точки из σ^{k+1}.

Продолжая D_k по линейности на всю группу $C_k^s(B; G)$, получаем гомоморфизм

$$D_k\colon C_k^s(B; G) \to C_{k+1}^s(B; G).$$

Из равенства (3) следует, что гомоморфизмы D_k и дифференциалы ∂_k^s связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\partial_{k+1}^s D_k = 1_{C_k^s(B;\, G)} - D_{k-1} \partial_k^s \quad \text{при} \quad k > 0, \\ &\partial_1^s D_0 f^0 = f^0 - h^0, \end{aligned} \tag{4}$$

где сингулярный симплекс h^0 отображает σ^0 в точку w из B.

Пусть $z_k \in \operatorname{Ker} \partial_k^s$, $k > 0$. Тогда в силу (4) имеем $\partial_{k+1}^s D_k z_k = z_k$, откуда следует, что $z_k \in \operatorname{Im} \partial_{k+1}^s$. Таким образом, $H_k^s(B; G) = 0$ при $k > 0$. Аналогично, 0-мерный цикл f^0 гомологичен циклу h^0, следовательно, $H_0^s(B; G) \simeq G$. ■

Конструкция, использованная в доказательстве леммы 1, весьма полезна. Дадим следующее определение.

Пусть C_*, C'_* — цепные комплексы, φ_*, ψ_*: $C_* \to C'_*$ — гомоморфизмы. *Цепной гомотопией*, связывающей φ_* с ψ_*, называется система гомоморфизмов $\{D_k\}$,

$$D_k\colon C_k \to C'_{k+1},$$

такая, что выполняется соотношение

$$\partial'_{k+1}D_k + D_{k-1}\partial_k = \psi_k - \varphi_k, \quad D_{-1} \overset{\text{def}}{\equiv} 0. \tag{5}$$

Гомоморфизмы этого соотношения показаны на следующей диаграмме:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[dl, "D_k"'] \arrow[d, "\psi_k - \varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "D_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C'_{k+1} \arrow[r, "\partial'_{k+1}"] & C'_k \arrow[r, "\partial'_k"] & C'_{k-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Гомоморфизмы φ_* и ψ_* называются *цепно гомотопными*. Если $\{D_k\}$ — цепная гомотопия, связывающая φ_* и ψ_*, то для $z_k \in \operatorname{Ker} \partial_k$ имеем

$$(\psi_k - \varphi_k)z_k = \partial'_{k+1}D_k z_k \in \operatorname{Im} \partial'_{k+1}.$$

Отсюда следует, что гомоморфизмы групп гомологий, индуцируемые цепными гомоморфизмами φ_* м ψ_*, совпадают.

Упражнение 5°. Пусть цепные гомоморфизмы φ_*, ψ_*: $C_* \to C'_*$ и системы гомоморфизмов $\{D^1_k\}$, $\{D^2_k\}$, D^i_k: $C_k \to C'_{k+1}$, $i = 1, 2$, таковы, что $\partial'_{k+1}D^1_k + D^2_{k-1}\partial_k = \psi_k - \varphi_k$. Покажите, что гомоморфизмы групп гомологий, индуцируемые гомоморфизмами φ_* и ψ_*, совпадают.

Покажем, что гомотопные отображения топологических пространств индуцируют цепно гомотопные гомоморфизмы цепных комплексов. Для этого применим следующую конструкцию. Пусть X — топологическое пространство, $X \times I$ — цилиндр над ним; отображения α^X, β^X: $X \to X \times I$, определенные формулами

$$\alpha^X(x) = (x, 0), \quad \beta^X(x) = (x, 1),$$

естественно называть нижним и верхним основаниями цилиндра. Очевидно, α^X и β^X гомотопны.

Лемма 2. *Для всякого пространства X существует цепная гомотопия $\{D^X_k\}$, связывающая α^X_* с β^X_*, т. е.*

$$\beta^X_k - \alpha^X_k = D^X_{k-1}\partial^s_k + \partial^s_{k+1}D^X_k. \tag{6}$$

Доказательство. Построим цепную гомотопию $\{D^X_k$: $C^s_k(X; G) \to G^s_{k+1}(X \times I, G)\}$ индукцией по k.

Для $k=0$ положим $D_0^X f^0 = f^0 \times 1_I$, где сингулярный симплекс $f^0 \times 1_I$ определен формулой

$$f^0 \times 1_I(t_0, t_1) = (f^0(1), f_1),$$

и распространим $D_0^X f^0$ на $C_0^s(X; G)$ по линейности.

Для $k > 0$ предположим, что гомоморфизмы D_m^X уже определены при $m < k$ для любого X и функториальны.

Рассмотрим цепь

$$c_k \in C_k^s(\sigma^k \times I; G), \quad c_k = \beta_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) - \alpha_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) - D_{k-1}^{\sigma^k}\partial_k^s(1_{\sigma^k}),$$

где 1_{σ^k} рассматривается как сингулярный симплекс. По индуктивному предположению

$$\partial_k c_k^s = \left(\beta_{k-1}^{\sigma^k} - \alpha_{k-1}^{\sigma^k} - \partial_k^s D_{k-1}^{\sigma^k}\right) \quad \partial_k^s(1_{\sigma^k}) = D_{k-2}^{\sigma^k}\partial_{k-1}^s\partial_k^s(1_{\sigma^k}) = 0;$$

следовательно, $c_k \in \operatorname{Ker} \partial_k^s \subset C_k^s(\sigma^k \times I; G)$. Но $\sigma^k \times I$ — выпуклое подмножество евклидова пространства; по лемме 1 $H_k^s(\sigma^k \times I; G) = 0$. Поэтому $c_k \in \operatorname{Im} \partial_{k+1}^s$, т. е. существует цепь $u_{k+1} \in \in C_{k+1}^s(\sigma^k \times i; G)$ такая, что $\partial_{k+1}^s u_{k+1} = c_k$.

Положим $D_k^{\sigma^k}(1_{\sigma^k}) = u_{k+1}$. Пусть теперь f^k: $\sigma^k \to X$ — сингулярный симплекс пространства X. Определим цепь $D_k^X f^k$ равенством

$$D_k^X f^k = (f^k \times 1_I)_{k+1} D_k^{\sigma^k} 1_{\sigma^k} = (f^k \times 1_I)_{k+1} u_{k+1},$$

где $(f^k \times 1_I)(x, t) = (f^k(x), t)$, $x \in \sigma^k$, $t \in I$. Так как f_k и ∂_k перестановочны, а D_{k-1}^X функториальны, получаем

$$\begin{aligned}
\partial_{k+1}^s D_k^X f^k = \partial_{k+1}^s (f^k \times 1_I)_{k+1} u_{k+1} =& \\
&= (f^k \times 1_I)_k \partial_{k+1}^s u_{k+1} = (f^k \times 1_I)_k c_k = \\
&= (f^k \times 1_I)_k \left(\beta_k^{\sigma^k} - \alpha_k^{\sigma^k} - D_{k-1}^{\sigma^k}\partial_k^s\right)(1_{\sigma^k}) = \\
&= \beta_k^X f^k - \alpha_k^X f^k - D_{k-1}^X \partial_k^s f^k.
\end{aligned}$$

Продолжая D_k^X по линейности на $C_k^s(X; G)$, получаем требуемый гомоморфизм D_k^X.

Подчеркнем, что конструкция $\{D_k^X\}$ функториальна, т. е. для всякого непрерывного отображения φ: $X \to Y$ коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{tikzcd}
G_k^s(X; G) \arrow[r, "D_k^X"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k+1}^s(X \times I; G) \arrow[d, "(\varphi \times 1_I)_{k+1}"] \\
C_k^s(Y; G) \arrow[r, "D_k^Y"] & C_{k+1}^s(X \times I; G)
\end{tikzcd}$$

Доказательство теоремы 1. Пусть $F\colon X\times I\to Y$ — гомотопия, соединяющая φ и ψ. Определим цепную гомотопию $\{D_k\colon C_k^s(X;G)\to C_{k+1}^s(Y;G)\}$, связывающую φ_* с ψ_* как суперпозиции $\{D_k=F_{k+1}D_k^X\}$ гомоморфизмов последовательности

$$C_k^s(X;G)\xrightarrow{D_k^X}C_{k+1}^s(X\times I;G)\xrightarrow{F_{k+1}}C_{k+1}^s(Y;G).$$

Утверждение теоремы следует из того, что цепно гомотопные гомоморфизмы цепных комплексов индуцируют одинаковые гомоморфизмы групп гомологий. ■

Следствие. *Гомотопическая эквивалентность индуцирует изоморфизм групп гомологий.*

Таким образом, гомотопически эквивалентные пространства, в частности гомеоморфные, имеют одинаковые (изоморфные) группы гомологий.

Упражнения. 6°. Покажите, что если X — стягиваемое пространство, то $H_0^s(X;G)\simeq G$, $H_k^s(X;G)=0$ при $k>0$.

7°. Покажите, что для гомологий несвязного объединения $X\cup Y$ имеет место изоморфизм

$$H_k^s(X\cup Y;G)\simeq H_k^s(X;G)\oplus H_k^s(Y;G).$$

Покажите, что $H_0^s(S^0;G)\simeq G\oplus G$, $H_k^s(S^0;G)=0$ при $k>0$.

8°. Покажите, что если X и Y линейно связны (см. § 10 гл. II), то $H_0^s(X;G)\simeq G\simeq H_0^s(Y;G)$ и любое непрерывное отображение φ: $X\to Y$ индуцирует изоморфизм

$$\varphi_{*0}\colon\ H_0^s(X;G)\simeq H_0^s(Y;G).$$

Отметим, что результат упражнения 6 нам дает группы гомологий открытого и замкнутого дисков D^n, $\overline{D}^n$.

Пусть пространство X таково, что в нем каждая компонента связности линейно связна (такими пространствами являются полиэдры, клеточные комплексы, многообразия, многообразия с краями и др.). Тогда из упражнений 7° и 8° немедленно следует, что группа $H_0^s(X;G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько компонент (линейной) связности имеет пространство X.

Пусть X_0 — пространство X, $i\colon X_0\to X$ — отображение вложения. Положив

$$C_k^s(X,X_0;G)=C_k^s(X;G)/C_k^s(X_0;G),$$

имеем в силу § 2 точную последовательность цепных комплексов

$$0\to C_*^s(X_0;G)\xrightarrow{i_*}C_*^s(X;G)\xrightarrow{j_*}C_*^s(X,X_0;G)\to 0.$$

Группы гомологий комплекса $C_*^s(X, X_0; G)$ называются *группами сингулярных гомологий пары* (X, X_0) и обозначаются

$$H_*^s(X, X_0; G) = \{H_k^s(X, X_0; G)\}_{k \geqslant 0}.$$

Из леммы § 2 немедленно вытекает точность гомологической последовательности

$$\ldots \to H_{k+1}^s(X, X_0; G) \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_k^s(X_0; G) \xrightarrow{i_{*k}}$$
$$\xrightarrow{} H_k^s(X; G) \xrightarrow{j_{*k}} H_k^s(X, X_0; G) \xrightarrow{\delta_k} \ldots \to H_0^s(X, X_0; G) \to 0. \qquad (7)$$

Точные гомологические последовательности являются основным рабочим аппаратом теории гомологий.

Дадим следующее более наглядное описание групп гомологий пары, вытекающее из введенных выше определений. Пусть в цепи $\gamma = \sum\limits_i g_i \cdot f_i^k$ приведены подобные слагаемые, т. е. все сингулярные симплексы f_i^k попарно различны и все коэффициенты g_i отличны от 0; носителем цепи γ назовем подмножество пространства X, равное объединению образов всех отображений f_i^k, входящих в γ с ненулевыми коэффициентами. Согласно определению факторкомплекса (см. § 2) элемент $\hat{z}_k$ ядра $\operatorname{Ker} \hat{\partial}_k$ граничного гомоморфизма $\hat{\partial}_k$: $C_k^s(X, X_0; G) \to C_{k-1}^s(X, X_0; G)$ является смежным классом, состоящим из всех таких цепей в $C_k^s(X, X_0; G)$, что: 1) два различных представителя элемента $\hat{z}_k$ отличаются ($\hat{z}_k$ — смежный класс!) на слагаемое из $i_k C_k^s(X_0; G) \subset C_k^s(X; G)$, т. е. на цепь с носителем в подпространстве X_0 (i_k — цепной гомоморфизм в размерности k, индуцированный вложением i: $X_0 \to X$); 2) носитель границы $\partial_k^s z_k$ любого представителя z_k элемента $\hat{z}_k$ содержится в X_0 ($\hat{z}_k$ — цикл «по модулю X_0»). Аналогично, элемент $\hat{b}_k$ образа гомоморфизма $\hat{\partial}_{k+1}$ является смежным классом, состоящим из всех таких цепей b_k в $C_k^s(X; G)$, что: 1) два представителя различаются на цепь с носителем в X_0; 2) каждый представитель b_k смежного класса $\hat{b}_k$ можно записать в виде $\partial_{k+1}^s \gamma_{k+1} + \gamma_k^0$, где γ_{k+1} — некоторая цепь из $C_{k+1}^s(X; G)$, а γ_k^0 — некоторая (любая) цепь с носителем в X_0. Таким образом, элементы групп гомологий — это относительные («по модулю подпространства X_0») циклы $\hat{z}_k$, рассматриваемые с точностью до относительных («по модулю X_0») границ $\hat{b}_k$. На рис. 128 приведен пример двумерного относительного цикла.

Связывающий гомоморфизм δ_k сопоставляет элементу $\hat{h}_k$ из группы гомологий пары $H_k^s(X, X_0; G)$ элемент h_{k-1}^0 из группы гомологий

$H_k^s(X_0; G)$ подпространства X_0 по следующему правилу, вытекающему из определения связывающего гомоморфизма для цепных комплексов (см. конец § 2). Пусть относительный цикл $\hat{z}_k \in C_k^s(X, X_0; G)$ — представитель элемента $\hat{h}_k$, а цикл $z_k \in C_k^s(X; G)$ — представитель элемента $\hat{z}_k$, рассматриваемого как смежный класс. Рассмотрим цепь $\partial_k^s z_k \in C_{k-1}^s(X; G)$. Ясно, что: 1) носитель цепи $\partial_k^s z_k$ содержится в X_0, и поэтому цепь $\partial_k^s z_k$ можно считать цепью из $C_{k-1}^s(X_0; G)$; 2) поскольку $\partial_{k-1}^s \partial_k^s z_k = 0$, то цепь $\partial_k^s z_k$ является циклом в $C_*^s(X_0; G)$. Цикл $\partial_u^s z_k$, вообще говоря, не является границей в $C_*^s(X_0; G)$, так как z_k может не принадлежать $i_k C_k^s(X_0;,G) \simeq C_k^s(X_0; G)$ — носитель цепи z_k может не лежать в X_0. Класс гомологий h_{k-1}^0 цикла $\partial_k^s z_k$ в $H_{k-1}^s(X_0; G)$ и является образом $\partial_k \hat{h}_k$ класса гомологий $\hat{h}_k$. Очевидно, что произвол в выборе представителей $\hat{z}_k$ и z_k приводит лишь к тому, что для двух различных цепей, u_k и v_k, определяющих один и тот же класс $\hat{h}_k$, разность $\partial_k^s u_k - \partial_k^s v_k$ является границей в $C_*^s(X_0; G)$, а не только в $C_*^s(X; G)$. Поэтому класс гомологий h_{k-1}^0 определен корректно.

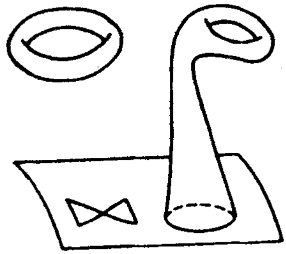

Рис. 128

Упражнения. 9°. Пусть $*$ — точка из X. Покажите, что $H_k^s(X; G) \simeq H_k^s(X, *; G)$ при $k \geqslant 1$.

10°. Пусть вложение i: $X_0 \to X$ является гомотопической эквивалентностью. Покажите, что $H_k^s(X, X_0; G) = 0$ для всех k.

Отметим, что для сингулярных гомологий утверждение о точности последовательности Майера–Виеториса (см. § 3), вообще говоря, неверно (почему? Попытайтесь построить контрпример.) Однако при дополнительных предположениях эта последовательность точна. Например, если K_1 и K_2 — подкомплексы сиплициального комплекса K, то для сингулярных гомологий пространств $|K_1|$ и $|K_2|$ имеет место точная последовательность Майера–Виеториса.

Для развития приложений сингулярных гомологий (см. § 6) нам потребуется умение измельчать сингулярные симплексы. Точная формулировка нужного результата дана ниже в упр. 12°. Установить этот результат можно с помощью барицентрического подразделения сингулярных симплексов.

Рассмотрим барицентрическое подразделение стандартного симплекса σ^k. Будем обозначать через $\langle c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q}\rangle$ композицию линейного (в барицентрических координатах) отображения стандартного симплекса σ^q на симплекс $(c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q})$ из барицентрического подразделения σ^k, переводящего j-ю вершину стандартного симплекса в j-ю вершину c^{i_j} из набора $\{c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q}\}$, и отображения вложения симплекса $(c^{i_0}, c^{i_1}, \ldots, c^{i_q})$ в симплекс σ^k.

Отметим, что тождественное отображение 1_{σ^k} симплекса σ^k можно рассматривать как элемент группы $C_k^s(\sigma^k; G)$, граница которого имеет вид $\partial_k^s 1_{\sigma^k} = \sum\limits_{i=0}^{k} (-1)^i \Delta_i^{k-1}$ (см. п. 1).

Пусть теперь X — произвольное топологическое пространство. Определим гомоморфизмы

$$\Omega_k\colon C_k^s(X; G) \to C_k^s(X; G), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

индуктивно. Положим

$$\Omega_0 = 1_{C_0^s(X;\, G)}. \tag{8а}$$

Предложим, что гомоморфизмы Ω_{k-1} уже определены для произвольного топологического пространства X, причем для сингулярного комплекса 1_{σ^k} пространства σ^k цепь $\Omega_{k-1}\left(\partial_k^s 1_{\sigma^k}\right)$ можно представить в виде

$$\Omega_{k-1}\left(\partial_k^s 1_{\sigma^k}\right) = \sum_j g_j \langle c_j^0, c_j^1, \ldots, c_j^{k-1}\rangle, \tag{8б}$$

где c_j^r — вершины барицентрического подразделения $(k-1)$-мерных граней симплекса σ^k. Очевидно, это требование выполняется при $k-1=0$. Положим теперь

$$\Omega_k(1_{\sigma^k}) = \sum_j g_j \cdot \langle b^{0,1,\ldots,k}, c_j^0, c_j^1, \ldots, c_j^{k-1}\rangle, \tag{8в}$$

где $b^{0,1,\ldots,k}$ — барицентр симплекса σ^k, а g_j и c_j^r — те же, что и в (8б).

Определим гомоморфизм Ω_k на сингулярном симплексе $f^k\colon \sigma^k \to X$ для произвольного пространства X.

Пусть $f_*^k\colon C_*^s(\sigma^k; G) \to C_*^s(X; G)$ — гомоморфизм цепных комплексов, индуцированный отображением $f^k\colon \sigma^k \to X$. Положим

$$\Omega_k(f^k) = f_k^k \Omega_k(1_{\sigma^k}). \tag{8г}$$

Продолжив Ω_k на $C_k^s(X; G)$ по линейности:

$$\Omega_k\left(\sum_i g_i f_i^k\right) = \sum_i g_i \Omega_k(f_i^k), \tag{8д}$$

завершим определение Ω_k. Ясно, что цепь $\Omega_k\left(\partial^s_{k+1}1_{\sigma^{k+1}}\right)$ допускает представление, аналогичное (8б). Индуктивное построение Ω_k закончено.

Гомоморфизмы функториальны и коммутируют с дифференциалами $\partial^s_k\Omega_k = \Omega_k\partial^s_k$ (проверьте!). Совокупность гомоморфизмов Ω_k образует гомоморфизм Ω_*: $C^s_*(X; H) \to C^s_*(X; G)$ комплекса $C^s_*(X; G)$ в себя.

Упражнения. 11°. Покажите, что гомоморфизм Ω_* и $1_{C^s_*(X;\,G)}$ цепно гомотопны.

12°. Пусть A, B — замкнутые непересекающиеся подпространства нормального хаусдорфова пространства X. Покажите, что для всякого цикла $z_k \in C^s_k(X; G)$ существует гомологичный ему цикл $(\Omega_k)^r z^k$ такой, что для каждого сингулярного симплекса f^k, входящего в цикл $(\Omega_k)^r z_k$, его образ не пересекается одновременно с A и B.

3. Гомологии и гомотопии. Естественно попытаться установить связь между группами сингулярных гомологий и гомотопическими группами пространства. Оказывается, эта задача весьма сложна; известны лишь частные результаты. Так, одномерная группа гомологий линейно связного пространства полностью определяется его фундаментальной группой.

Теорема 2. *Пусть X — линейно связное пространство с отмеченной точкой x_0; тогда*

$$H^s_1(X; \mathbb{Z}) \simeq \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)], \tag{9}$$

где $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ — коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$.*

Поясним схему доказательства формулы (9), останавливаясь лишь на геометрических идеях. Во-первых, заметим, что всякая петля пространства X (с началом в точке x_0) является сингулярным циклом (сингулярный симплекс

$$[0; 1] \to [0; 1]/0 \sim 1 \simeq S^1 \xrightarrow{\alpha} X$$

является циклом). Отсюда возникает гомоморфизм группы $\pi_1(X, x_0)$ в $H^s_1(X; \mathbb{Z})$, который мы будем обозначать через θ.

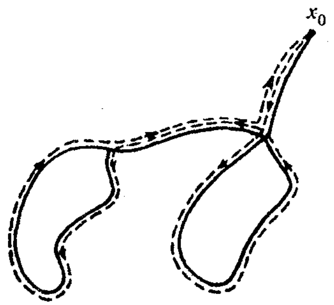

Рис. 129

Во-вторых, можно показать, что θ — эпиморфизм. Действительно, каждый цикл в $H^s_1(X; \mathbb{Z})$ определяет (неоднозначно) несколько петель в пространстве X, возможно, начинающихся в различных точках. Эти различные петли можно превратить в единую петлю, соединив их начала с точкой x_0 путем, проходимым в прямом и обратном направлениях (рис. 129). Получающуюся сложную петлю в точке x_0 гомоморфизм θ переводит в первоначальный сингулярный цикл. (Точнее, класс этой петли переходит в класс первоначального цикла.)

В-третьих, коммутант группы $\pi_1(X, x_0)$ лежит в ядре θ. В самом деле, петля $\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$ при действии гомоморфизма θ переходит, грубо говоря, в цикл

* Напомним, что коммутантом $[\pi, \pi]$ группы π называется подгруппа, порожденная коммутаторами — элементами вида $g_1\cdot g_2\cdot g_1^{-1}\cdot g_2^{-1}$, где $g_1, g_2 \in \pi$. Коммутант группы является ее нормальным делителем.

$\alpha+\beta+\alpha^{-1}+\beta^{-1}$; группа сингулярных циклов коммутативна, а циклы $\alpha+\alpha^{-1}$ и $\beta+\beta^{-1}$ гомологичны нулю. Следовательно, петля $\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$ переходит в гомологичный нулю цикл.

Можно показать, что коммутант составляет все ядро гомоморфизма θ (фактически при доказательстве эпиморфности θ строится «обратный» гомоморфизм группы H_1^s в $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$).

Упражнение 13°. Восстановите доказательство теоремы 2 по намеченной схеме.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 3 (Гуревич). *Пусть X — линейно связное топологическое пространство такое, что $\pi_k(X)=0$ при $k<q$ и $\pi_q(X)\neq 0$, $q>1$. Тогда $H_k^s(X; \mathbb{Z})=0$ при $0<k<q$ и $H_q^s(X; \mathbb{Z})\simeq\pi_q(X)$, причем для любого отображения $f\colon X\to X$ коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{tikzcd}
\pi_q(X) \arrow[r, "f_q"] \arrow[d, phantom, "\wr"] & \pi_q(X) \arrow[d, phantom, "\wr"] \\
H_q(X; \mathbb{Z}) \arrow[r, "f_{*q}"] & H_q(X; \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

§ 5. Аксиомы теории гомологий. Когомологии

В двух предыдущих параграфах были рассмотрены две теории гомологий — симплициальная и сингулярная. Кроме них в алгебраической топологии существует еще несколько теорий гомологий. Исторически более ранней является симплициальная теория гомологий. В дальнейшем были развиты различные подходы к построению теории гомологий для общих топологических пространств (теория гомологий Александрова—Чеха, теория сингулярных гомологий и др.). Достаточно сложным оказался вопрос о том, в каких случаях две различные теории эквивалентны.

В этой связи полезным является аксиоматический подход к теории гомологий, при котором основные свойства соответствия между топологическими и алгебраическими понятиями аксиоматизируются, а все остальные свойства выводятся из принятых аксиом. Такая система аксиом была развита Стинродом и Эйленбергом, и мы сейчас сформулируем их аксиомы.

Теорией гомологий H_* со связывающим гомоморфизмом δ_* называется совокупность ковариантных функторов $\{H_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, из категории пар топологических простанств (X, A), $A\subset X$, в категорию абелевых групп, и совокупность функториальных гомоморфизмов $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,

$$\delta_k(X, A)\colon\ H_k(X, A)\to H_{k-1}(A, \varnothing).$$

При этом требуется выполнение следующих аксиом.

1. Аксиома гомотопии. Пусть отображения $f, g\colon X\to Y$ гомотопны и $F\colon X\times I\to Y$ — соединяющая их гомотопия. Пусть $A\subset X$, $B\subset Y$ и $F(A\times I)\subset B$. Тогда

$$H_*(f)=H_*(g)\colon H_*(X, A)\to H_*(Y, B)$$

для произвольных X, Y, A, B, f, g.