$\alpha+\beta+\alpha^{-1}+\beta^{-1}$; группа сингулярных циклов коммутативна, а циклы $\alpha+\alpha^{-1}$ и $\beta+\beta^{-1}$ гомологичны нулю. Следовательно, петля $\alpha\cdot\beta\cdot\alpha^{-1}\cdot\beta^{-1}$ переходит в гомологичный нулю цикл.

Можно показать, что коммутант составляет все ядро гомоморфизма θ (фактически при доказательстве эпиморфности θ строится «обратный» гомоморфизм группы H_1^s в $\pi_1/[\pi_1, \pi_1]$).

Упражнение 13°. Восстановите доказательство теоремы 2 по намеченной схеме.

Приведем без доказательства следующее утверждение.

Теорема 3 (Гуревич). *Пусть X — линейно связное топологическое пространство такое, что $\pi_k(X)=0$ при $k<q$ и $\pi_q(X)\neq 0$, $q>1$. Тогда $H_k^s(X;\mathbb{Z})=0$ при $0<k<q$ и $H_q^s(X;\mathbb{Z})\simeq\pi_q(X)$, причем для любого отображения $f\colon X\to X$ коммутативна следующая диаграмма*:

$$\begin{array}{ccc} \pi_q(X) & \xrightarrow{f_q} & \pi_q(X) \\ \wr\wr & & \wr\wr \\ H_q(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow{f_{*q}} & H_q(X;\mathbb{Z}) \end{array}$$

§ 5. Аксиомы теории гомологий. Когомологии

В двух предыдущих параграфах были рассмотрены две теории гомологий — симплициальная и сингулярная. Кроме них в алгебраической топологии существует еще несколько теорий гомологий. Исторически более ранней является симплициальная теория гомологий. В дальнейшем были развиты различные подходы к построению теории гомологий для общих топологических пространств (теория гомологий Александрова—Чеха, теория сингулярных гомологий и др.). Достаточно сложным оказался вопрос о том, в каких случаях две различные теории эквивалентны.

В этой связи полезным является аксиоматический подход к теории гомологий, при котором основные свойства соответствия между топологическими и алгебраическими понятиями аксиоматизируются, а все остальные свойства выводятся из принятых аксиом. Такая система аксиом была развита Стинродом и Эйленбергом, и мы сейчас сформулируем их аксиомы.

Теорией гомологий H_* со связывающим гомоморфизмом δ_* называется совокупность ковариантных функторов $\{H_k\}$, $k=0, 1, 2, \ldots$, из категории пар топологических простанств (X, A), $A\subset X$, в категорию абелевых групп, и совокупность функториальных гомоморфизмов $\{\delta_k\}$, $k=1, 2, \ldots$,

$$\delta_k(X, A)\colon\ H_k(X, A)\to H_{k-1}(A, \varnothing).$$

При этом требуется выполнение следующих аксиом.

1. Аксиома гомотопии. Пусть отображения f, $g\colon X\to Y$ гомотопны и $F\colon X\times I\to Y$ — соединяющая их гомотопия. Пусть $A\subset X$, $B\subset Y$ и $F(A\times I)\subset B$. Тогда

$$H_*(f)=H_*(g)\colon H_*(X, A)\to H_*(Y, B)$$

для произвольных X, Y, A, B, f, g.

2. Аксиома точности. Для всякой пары (X, A) и вложений i: $(A, \varnothing) \to (X, \varnothing)$, j: $(X, \varnothing) \to (X, A)$ имеет место точная последовательность

$$\ldots \xrightarrow{\delta_{k+1}(X, A)} H_k(A, \varnothing) \xrightarrow{H_k(i)} H_k(X, \varnothing) \xrightarrow{H_k(j)}$$
$$\to H_k(X, A) \xrightarrow{\delta_k(X, A)} H_{k-1}(A, \varnothing) \to \ldots \to H_0(X, A) \to 0. \quad (1)$$

3. Аксиома вырезания. Пусть (X, A) — произвольная пара и пусть U открыто в X и $\overline{U} \subset \operatorname{Int} A$. Тогда вложение пар j: $(X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ индуцирует изоморфизм

$$H_*(j): H_*(X \setminus U, A \setminus U) \approx H_*(X, A).$$

4. Аксиома размерности. Для пространства $*$, состоящего из одной точки $H_k(*, \varnothing) = 0$ при $k > 0$.

Упражнение 1°. Проверьте выполнение аксиом теории гомологий для сингулярной теории гомологий.

Аксиомы теории гомологий полны в следующем смысле.

Теорема единственности. *Пусть H_* и $\overline{H}_*$ — две теории гомологий. Если существует изоморфизм h_0: $H_0(*, \varnothing) \simeq \overline{H}_0(*, \varnothing)$, то на категории пар компактных полиэдров эти теории естественно изоморфны, т. е.:*

1) *для любой пары компактных полиэдров (X, A) такой, что триангуляция A — подмножество триангуляции X, и всех $k \geqslant 0$ определено единственное семейство изоморфизмов $h_k(X, A)$: $H_k(X, A) \simeq \overline{H}_k(X, A)$, причем $h_0(*, \varnothing) = h_0$;*

2) *для любого отображения f: $(X, A) \to (Y, B)$ пар компактных полиэдров и всех $k \geqslant 0$ справедливы соотношения $H_k(f) = \overline{H}_k(f)$, обозначающие коммутативность диаграммы*

$$\begin{tikzcd} H_k(X, A) \arrow[r, "H_k(f)"] \arrow[d, "h_k(X, A)"', "\wr"] & H_k(Y, B) \arrow[d, "h_k(Y, B)", "\wr"'] \\ \overline{H}_k(X, A) \arrow[r, "\overline{H}_k(f)"] & \overline{H}_k(Y, B) \end{tikzcd} \quad (2)$$

3) *диаграммы*

$$\begin{tikzcd} H_{k+1}(X, A) \arrow[r, "\delta_{k+1}(X, A)"] \arrow[d, "h_{k+1}(X, A)"', "\wr"] & H_k(A, \varnothing) \arrow[d, "h_k(A, \varnothing)", "\wr"'] \\ \overline{H}_{k+1}(X, A) \arrow[r, "\overline{\delta}_{k+1}(X, A)"] & \overline{H}_k(A, \varnothing) \end{tikzcd} \quad (3)$$

возникающие при изоморфизме точных последовательностей вида (1), *коммутативны.*

Мы не приводим доказательства теоремы единственности, поскольку оно выходит за пределы элементарного курса.

В частности, сингулярная и симплициальная теории совпадают на категории пар компактных полиэдров. Таким образом, для компактного полиэдра $|K|$ имеет место изоморфизм

$$H_*(|K|; G) \simeq H^s_*(|K|; G).$$

Этот факт (доказательство здесь не приводится) мы будем применять в § 6, 8 при переходе от одной теории гомологий к другой.

Отметим, что независимость симплициальных гомологий компактного полиэдра от выбора триангуляции может быть установлена как в рамках самой симплициальной теории, так и с использованием сингулярной теории гомологий. Последний способ состоит в построении изоморфизма между группами гомологий произвольной триангуляции полиэдра группами сингулярных гомологий этого полиэдра. Детали этого рассуждения достаточно сложны, и мы их здесь не приводим.

Упражнение 2°. Опираясь на теорему единственности, установите справедливость точной последовательности Майера—Виеториса для сингулярной теории гомологий:

$$\ldots \to H^s_k(|K_1| \cap |K_2|; G) \to$$
$$\to H^s_k(|K_1|; G) \oplus H^s_k(|K_2|; G) \to H^s_k(|K_1| \cup |K_2|; G) \to$$
$$\to H^s_{k-1}(|K_1| \cap |K_2|; G) \to \ldots \to H^s_0(|K_1| \cup |K_2|; G) \to 0, \quad (4)$$

где K_1, K_2 — подкомплексы конечного симплициального комплекса K.

Отметим, что существуют теории гомологий, удовлетворяющие аксиомам 1)—3), но не удовлетворяющие аксиоме размерности. Такие теории гомологий называются экстраординарными, их исследование в значительной мере составляет предмет современной алгебраической топологии.

В алгебраической топологии наряду с группами гомологий применяются так называемые группы когомологий. Главное отличие теории когомологий от теории гомологий заключается в том, что теории когомологий — совокупность H^* контрвариантных функторов H^k, поэтому большинство стрелок в теории когомологий меняют свое направление сравнительно с теорией гомологий.

Фундаментальным объектом когомологий является коцепной комплекс C^* — последовательность

$$0 \to C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} \ldots \to C^{k-1} \xrightarrow{d^{k-1}} C^k \xrightarrow{d^k} C^{k+1} \xrightarrow{d^{k+1}} C^{k+2} \to \ldots$$

абелевых групп C^* (групп коцепей) и их гомоморфизмов d^k (дифференциалов или кограничных гомоморфизмов) такая, что $d^{k+1}d^k = 0$. Группами когомологий коцепного комплекса называются факторгруппы $H^k(C^*) = \operatorname{Ker} d^k / \operatorname{Im} d^{k-1}$. Часто коцепные комплексы получают из цепных с помощью следующего приема. Пусть C_* — цепной комплекс, G — абелева группа. Положим $C^k = \operatorname{Hom}(C_k, G)$ — множество всех гомоморфизмов группы C_k в группу G. Для $\psi^k \in \operatorname{Hom}(C_k; G)$ определим элемент

$d^k\psi^k i \in \mathrm{Hom}\,(C_{k+1}, G)$ равенством

$$(\partial^k\psi^k)\gamma_{k+1}=\psi^k(\partial_{k+1}, \gamma_{k+1})$$

на произвольном элементе $\gamma_{k+1}\in C_{k+1}$. Таким образом, по граничным гомоморфизмам ∂_k цепного комплекса C_k мы определим кограничные гомоморфизмы d^k коцепного комплекса $C^{\bullet}$. Очевидно,

$$(d^{k+1}d^k\psi^k)\gamma_{k+2}=(d^k\psi^k)(\partial_{k+2}\gamma_{k+2})=\psi^k(\partial_{k+1}\partial_{k+2}\gamma_{k+2})=\psi^k(0)=0,$$

так что $C^{\bullet}$ — действительно коцепной комплекс.

Применяя этот прием к $C_{\bullet}=C_{\bullet}(K; \mathbb{Z})$ — цепному комплексу симплициального комплекса K с целочисленными коэффициентами, мы получаем коцепной комплекс $C^{\bullet}(K; G)$, где $C^k(K; G)=\mathrm{Hom}\,(C_k(K; \mathbb{Z}), G)$. Группы когомологий $H^k(C^{\bullet}(K; G))$ называются группами симплициальных когомологий симплициального комплекса K (или полиэдра $|K|$) с коэффициентами в G. Здесь, однако, приходится преодолевать некоторые трудности, связанные с бесконечным числом образующих групп сингулярных цепей. Для теорий когомологий существует система аксиом и верна теорема единственности, аналогичные аксиомам и теореме для теорий гомологий. Важным преимуществом теорий когомологий перед теориями гомологий является то, что группы когомологий геометрических объектов образуют кольца с, вообще говоря, нетривиальным умножением. В ряде задач применяют одновременно гомологии и когомологии.

§ 6. Гомологии сфер. Степень отображения

1. Группы гомологий сферы. Приступим к вычислению сингулярных групп гомологий сфер S^n. Знание этих групп позволит нам ввести весьма полезные в приложениях понятия степени отображения, характеристики и индекса особой точки векторного поля.

Пусть X — клеточный комплекс, Y — конечный подкомплекс. Покажем, что

$$H_k^s(X, Y; G)\simeq H_k^s(X/Y; G) \tag{1}$$

при $k>0$, где X/Y — факторпространство X по Y.

Заметим сначала, что клеточный комплекс X/Y гомотопически эквивалентен комплексу $X\underset{i}{\cup} CY$, где CY — конус * над Y с вершиной $*$, $i\colon Y\to X$ — вложение. Действительно, комплекс X/Y совпадает с комплексом $(X\underset{i}{\cup} CY)/CY$. Поскольку CY — стягиваемый подкомплекс комплекса $X\underset{i}{\cup} CY$, комплексы $(X\underset{i}{\cup} CY)/CY$ и $X\underset{i}{\cup} CY$ гомотопически эквивалентны (см. упр. 7° § 10 гл. IV). Поэтому

$$H_k^s(X/Y; G)\simeq H_k^s(X\underset{i}{\cup} CY; G)$$

* Напомним, что для топологического пространства Y конус CY определяется как факторпространство $(Y\times I)(Y\times 0)$.