$d^k\psi^k i \in \mathrm{Hom}\,(C_{k+1}, G)$ равенством

$$(\partial^k\psi^k)\gamma_{k+1} = \psi^k(\partial_{k+1}, \gamma_{k+1})$$

на произвольном элементе $\gamma_{k+1}\in C_{k+1}$. Таким образом, по граничным гомоморфизмам ∂_k цепного комплекса C_k мы определим кограничные гомоморфизмы d^k коцепного комплекса $C^{\boldsymbol{\cdot}}$. Очевидно,

$$(d^{k+1}d^k\psi^k)\gamma_{k+2} = (d^k\psi^k)(\partial_{k+2}\gamma_{k+2}) = \psi^k(\partial_{k+1}\partial_{k+2}\gamma_{k+2}) = \psi^k(0) = 0,$$

так что $C^{\boldsymbol{\cdot}}$ — действительно коцепной комплекс.

Применяя этот прием к $C_{\boldsymbol{\cdot}} = C_{\boldsymbol{\cdot}}(K;\mathbb{Z})$ — цепному комплексу симплициального комплекса K с целочисленными коэффициентами, мы получаем коцепной комплекс $C^{\boldsymbol{\cdot}}(K; G)$, где $C^k(K; G) = \mathrm{Hom}\,(C_k(K;\mathbb{Z}), G)$. Группы когомологий $H^k(C^{\boldsymbol{\cdot}}(K; G))$ называются группами симплициальных когомологий симплициального комплекса K (или полиэдра $|K|$) с коэффициентами в G. Здесь, однако, приходится преодолевать некоторые трудности, связанные с бесконечным числом образующих групп сингулярных цепей. Для теорий когомологий существует система аксиом и верна теорема единственности, аналогичные аксиомам и теореме для теорий гомологий. Важным преимуществом теорий когомологий перед теориями гомологий является то, что группы когомологий геометрических объектов образуют кольца с, вообще говоря, нетривиальным умножением. В ряде задач применяют одновременно гомологии и когомологии.

§ 6. Гомологии сфер. Степень отображения

1. Группы гомологий сферы. Приступим к вычислению сингулярных групп гомологий сфер S^n. Знание этих групп позволит нам ввести весьма полезные в приложениях понятия степени отображения, характеристики и индекса особой точки векторного поля.

Пусть X — клеточный комплекс, Y — конечный подкомплекс. Покажем, что

$$H_k^s(X, Y; G) \simeq H_k^s(X/Y; G) \tag{1}$$

при $k>0$, где X/Y — факторпространство X по Y.

Заметим сначала, что клеточный комплекс X/Y гомотопически эквивалентен комплексу $X \underset{i}{\cup} CY$, где CY — конус * над Y с вершиной $*$, $i\colon Y\to X$ — вложение. Действительно, комплекс X/Y совпадает с комплексом $(X \underset{i}{\cup} CY)/CY$. Поскольку CY — стягиваемый подкомплекс комплекса $X \underset{i}{\cup} CY$, комплексы $(X \underset{i}{\cup} CY)/CY$ и $X \underset{i}{\cup} CY$ гомотопически эквивалентны (см. упр. 7° § 10 гл. IV). Поэтому

$$H_k^s(X/Y; G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY; G)$$

---

* Напомним, что для топологического пространства Y конус CY определяется как факторпространство $(Y\times I)(Y\times 0)$.

и при $k > 0$

$$H_k^s(X/Y;\, G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\, *;\, G)$$

(см. упр. 9° § 4).

Конус CY гомотопически эквивалентен точке $* \in CY$, следовательно,

$$H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\, *;\, G) \simeq H_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\, CY;\, G).$$

Рассмотрим отображение вложения пар $I\colon\ (X, Y) \to (X \underset{i}{\cup} CY,\, CY)$; оно индуцирует гомоморфизм $I_*\colon H_*^s(X, Y;\, G) \to H_*^s(X \underset{i}{\cup} CY,\, CY;\, G)$.

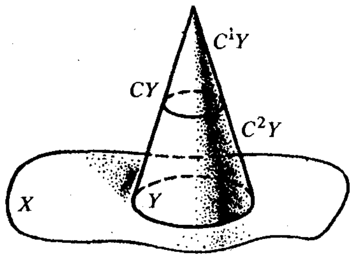

Рис. 130

Покажем, что I_* — изоморфизм. Разобьем конус CY на две части, C^1Y и C^2Y, как показано на рис. 130. Очевидно, что $H_*^s(X \underset{i}{\cup} C^2Y,\, C^2Y;\, G) \simeq$

$$\simeq H_*^s(X, Y;\, G).$$

Каждый цикл $z_k \in C_k^s(X \underset{i}{\cup} CY,\, CY;\, G)$ можно заменить на гомологичный ему цикл $(\Omega_k)^r z_k$ такой, что образ каждого сингулярного симплекса из $(\Omega_k)^r z_k$, пересекающийся с X, не будет пересекаться с C^1Y, и наоборот, каждый сингулярный симплекс, пересекающийся с C^1Y, не будет пересекаться с X (см. упр. 12° § 4). Отбросив в цепи $(\Omega_k)^r z_k$ все симплексы, пересекающиеся с C^1Y, мы получим цикл $z_k' \in C_k(X \underset{i}{\cup} CY,\, CY;\, G)$, гомологичный исходному. С другой стороны, z_k' можно рассматривать как цикл в группе цепей $C_k^s(X \underset{i}{\cup} C^2Y,\, C^2Y;\, G)$, следовательно, I_k — эпиморфизм.

Аналогично можно показать, что I_k — мономорфизм.

Дадим приложение формулы (1) к вычислению гомологий сферы S^n. Нам будут нужны гомологии диска $\overline{D}^n$. Так как $\overline{D}^n$ стягивается к точке, то группы гомологий диска изоморфны группам гомологий точки, а именно

$$H_k^s(\overline{D}^n;\, G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 0, \\ 0 & \text{при} \quad k > 0 \end{cases}$$

(см. упр. 6° § 4). Начнем вычисления с малых размерностей n. Поскольку S^0 — несвязное объединение двух точек, то $H_0^s(S^0;$

$G) \simeq G \oplus G$, $H_k^s(S^0; G) = 0$ при $k > 0$. Далее, в силу линейной связности S^n при $n > 0$ имеем

$$H_0^s(S^n; G) \simeq G, \quad n > 0.$$

Теперь заметим, что сфера S^n гомеоморфна факторпространству $\overline{D}^n/S^{n-1}$. Поэтому в силу (1)

$$H_k^s(\overline{D}^n, S^{n-1}; G) \simeq H_k^s(S^n; G) \quad \text{при} \quad k > 0.$$

Воспользуемся этим обстоятельством.

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары $(\overline{D}^1, S^0)$, заменив при $k > 0$ группы гомологий пары группами гомологий окружности S^1:

$$\begin{aligned} \ldots \to H_k^s(S^0; G) \to H_k^s(\overline{D}^1; G) \to H_k^s(S^1; G) \to \\ \to H_{k-1}^s(S^0; G) \to \ldots \to H_1^s(S^0; G) \to H_1^s(\overline{D}^1; G) \to \\ \to H_1^s(S^1; G) \to H_0^s(S^0; G) \to H_0^s(\overline{D}^1; G) \to H_0^s(\overline{D}^1, S^0; G). \quad (2) \end{aligned}$$

Заметив, что $H_k^s(\overline{D}^1; G) = 0$ при $k \geqslant 1$ и $H_{k-1}^s(S^0; G) = 0$ при $k > 1$, получим из (2) короткую точную последовательность

$$0 \to H_k^s(S^1; G) \to 0, \quad k > 1,$$

откуда вытекает, что $H_k^s(S^1; G) = 0$ при $k > 1$. Кроме того, гомоморфизм $H_0^s(S^0; G) \to H_0^s(\overline{D}^1; G)$ эпиморфен (проверьте по определению). Поэтому наша точная последовательность (2) приводит к короткой точной последовательности

$$0 \to H_1^s(S^1; G) \to G \oplus G \xrightarrow{\mathrm{pr}_1 + \mathrm{pr}_2} G \to 0,$$

откуда получаем изоморфизм $H_1^s(S^1; G) \simeq G$.

Применим теперь индукцию. Предположим, что при $1 \leqslant q \leqslant n-1$ для сфер S^q установлены изоморфизмы

$$H_k^s(S^q; G) \simeq \begin{cases} G, & k = 0, q, \\ 0, & k \neq 0, q. \end{cases}$$

Рассмотрим точную гомологическую последовательность пары $(\overline{D}^n, S^{n-1})$, заменяя, как и раньше, гомологии пары на гомологии сферы S^n:

$$\begin{aligned} \ldots \to H_k^s(\overline{D}^n; G) \to H_k^s(S^n; G) \to H_{k-1}^s(S^{n-1}; G) \to \\ \to H_{k-1}^s(\overline{D}^n; G) \to \ldots \quad (3) \end{aligned}$$

При $k > 1$ имеем $H_k^s(\overline{D}^n; G) = 0$, $H_{k-1}^s(\overline{D}^n; G) = 0$, поэтому рассматриваемый участок точной последовательности (3) принимает вид

$$0 \to H_k^s(S^n; G) \to H_{k-1}^s(S^{n-1}; G) \to 0,$$

откуда вытекает изоморфизм $H_k^s(S^n; G) \simeq H_{k-1}^s(S^{n-1}; G)$, $k > 1$. Итак, при $n \geqslant 2$ получаем

$$H_2^s(S^n; G) = 0, \; \ldots, \; H_{n-1}^s(S^n; G) = 0,$$

$$H_n^s(S^n; G) \simeq H_{n-1}^s(S^{n-1}; G) \simeq G, \; H_{n+1}^s(S^n; G) = 0, \; \ldots$$

Чтобы вычислить $H_1^s(S^n; G)$, положим в (3) $k = 1$:

$$\ldots \to H_1^s(\overline{D}^n; G) \to H_1^s(S^n; G) \to H_0^s(S^{n-1}; G) \xrightarrow{i_{*0}} H_0^s(\overline{D}^n; G) \to \ldots$$

Так как S^{n-1}, $\overline{D}^n$ линейно связны, имеем $H_0^s(S^{n-1}; G) \overset{i_{*0}}{\simeq}$ $\overset{i_{*0}}{\simeq} H_0^s(\overline{D}^n; G) \simeq G$ (см. упр. 8° § 4), отсюда $\operatorname{Ker} i_{*0} = 0$, и в силу точности (3) получим короткую точную последовательность

$$0 \to H_1^s(S^n; G) \to 0, \text{ т. е. } H_1^s(S^n; G) = 0, \; n \geqslant 2.$$

Индуктивное предположение распространено для $q = n$. Поэтому окончательно имеем

$$H_0^s(S^n; G) \simeq G; \; H_j^s(S^n; G) = 0, \; j \neq 0, \; n \geqslant 1;$$

$$H_n^s(S^n; G) \simeq G, \; n \geqslant 1; \; H_0^s(S^0; G) \simeq G \oplus G; \tag{4}$$

$$H_j^s(S^0; G) = 0, \; j \geqslant 1.$$

Итак, группы гомологий S^n вычислены.

Вычисляя гомологии S^n, мы не использовали теорему единственности теории гомологий (см. § 5). Воспользоваться ею мы могли бы следующим образом. Поскольку сфера S^n гомеоморфна границе $\partial\tau^{n+1}$ симплекса τ^{n+1}, то имеем изоморфизм

$$H_i(|\{\partial\tau^{n+1}\}|; G) \simeq H_i^s(S^n; G), \tag{5}$$

откуда на основании результатов (см. (9) § 3) о $H_*(\{\partial\tau^{n+1}\}; G)$ получаем тот же результат, что и в (4).

Заметим, что в § 4 гл. III теорема Брауэра о неподвижной точке и теорема о невозможности ретракции n-диска на граничную сферу опирались на функториальность гомотопических групп и на недоказанный результат $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Теперь, опираясь на установленный факт изоморфизма $H_n^s(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ и на гомологический функтор, можно считать вполне строго установленными обе названные важные теоремы. Действительно, их доказательство использовало только аксиомы функтора в категорию абелевых групп и знание группы пространства S^n.

Упражнение 1°. Выведите из теоремы 3 § 4, что

$$\pi_k(S^n) = 0, \quad k < n; \quad \pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}.$$

Обсудим вопрос о топологической инвариантности понятия размерности евклидова пространства. Из курса алгебры известно, что два евклидовых пространства одинаковой размерности изоморфны, а следовательно, и гомеоморфны. Известно также, что пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не изоморфны при $m \neq n$. Возникает вопрос: не будут ли они гомеоморфны? Следующая теорема дает отрицательный ответ на этот вопрос и тем самым утверждает, что размерность евклидова пространства является топологическим инвариантом.

Теорема 1. *Если $m \neq n$, то пространства $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим одноточечные компактификации $\tilde{\mathbb{R}}^m = \mathbb{R}^m \cup \xi^m$ и $\tilde{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \cup \xi^n$ пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ (см. § 14 гл. II). Базисами окрестностей точек ξ^m, ξ^n являются дополнения к замкнутым шарам с центрами в начале координат пространств $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Легко видеть, что одноточечная компактификация евклидова пространства гомеоморфна сфере той же размерности.

Предположим, что существует гомеоморфизм $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$. Его можно продолжить до отображения $\tilde{\Phi}\colon \tilde{\mathbb{R}}^m \to \tilde{\mathbb{R}}^n$, положив $\tilde{\Phi}(\xi^m) = \xi^n$. Легко видеть, что отображение $\tilde{\Phi}$ — также гомеоморфизм. Отсюда получаем, что сферы S^m и S^n также гомеоморфны. Тогда в силу топологической инвариантности групп гомологий

$$H_k^s(S^m; \mathbb{Z}) \simeq H_k^s(S^n; \mathbb{Z}) \quad \text{при всех} \quad k.$$

Однако мы знаем, что это не так при $m \neq n$. Следовательно, предположение о существовании гомеоморфизма $\Phi\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ при $m \neq n$ неверно. ∎

2. Степень отображения. Перейдем к изучению гомоморфизмов групп гомологий, индуцируемых отображениями n-мерных сфер. Из линейной связности сфер следует, что если $\varphi\colon S_1^n \to S_2^n$ — отображение одного экземпляра сферы в другой, то гомоморфизм φ_{*0}: $H_0^s(S_1^n; G) \to H_0^s(S_2^n; G)$ есть изоморфизм. Гомоморфизм

$$\varphi_{*n}\colon H_n^s(S_1^n; G) \to H_n^s(S_2^n; G),$$

вообще говоря, изоморфизмом не является. Если в качестве группы коэффициентов G взять группу целых чисел $\mathbb{Z}$ и зафиксировать изоморфизмы $H_n^s(S_i^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $i = 1, 2$, то гомоморфизм φ_{*n} можно рассматривать как эндоморфизм $\varphi_* n$: $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ группы $\mathbb{Z}$. Такой гомоморфизм однозначно определяется значением φ_{*n} на образующем элементе $1 \in \mathbb{Z}$, поскольку $\varphi_{*n}(m) = m \cdot \varphi_{*n}(1)$.

Определение 1. Число $\varphi_{*n}(1)$ называется *степенью отображения* φ и обозначается $\deg \varphi$.

Отметим, что $\deg \varphi$ может, вообще говоря, принимать любые целочисленные значения. Знак $\deg \varphi$ зависит от выбора образующих элементов в группах $H_n^s(S_1^n; \mathbb{Z})$, $H_n^s(S_2^n; \mathbb{Z})$, т. е. от способа установления изоморфизмов этих групп с группой $\mathbb{Z}$. Если γ — образующий элемент группы $H_n^s(S^n; \mathbb{Z})$, то $(-\gamma)$ — также ее образующий элемент; таким образом, изоморфизм $H_n^s(S^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ может быть установлен двумя способами. Если φ — отображение S^n в себя, то $\deg \varphi$ не зависит от выбора образующего элемента.

Отметим, что из теоремы 3 § 4 вытекает, что понятия $\deg \varphi$ степени отображения φ: $S^n \to S^n$, определяемые через гомотопические группы (см. § 4 гл. III) и гомологические группы, тождественны.

Очевидно, что если φ, ψ: $S^n \to S^n$ — гомотопные отображения, то $\deg \varphi = \deg \psi$. Справедливо и обратное утверждение (теорема Хопфа), доказательство которого мы не приводим.

Упражнения. 2°. Докажите, что для φ, ψ: $S^n \to S^n$ верна формула $\deg(\varphi\psi) = \deg \varphi \cdot \deg \psi$.

Указание. Воспользуйтесь функториальностью групп гомологий (см. п. 8 § 4 гл. V).

3°. Покажите, что степень постоянного отображения сферы S^n в себя равна нулю.

4°. Пусть отображение Φ: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ таково, что $\Phi(x) \neq 0$ при $r \leqslant \|x\| \leqslant R$; отображения $\tilde{\Phi}_\rho$: $S^n \to S^n$ определяются равенствами

$$\tilde{\Phi}_\rho(x) = \frac{\Phi(\rho x)}{\|\Phi(\rho x)\|}, \quad x \in S^n, \quad r \leqslant \rho \leqslant R.$$

Докажите, что $\deg \tilde{\Phi}_r = \deg \tilde{\Phi}_R$.

Указание. Постройте гомотопию, соединяющую отображения $\tilde{\Phi}_r$ и $\tilde{\Phi}_R$.

Следующие два упражнения нетрудно выполнить, опираясь на изоморфизм сингулярных и симплициальных гомологий.

Упражнения. 5°. Пусть A: $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ — невырожденный линейный оператор. Определим отображение $\tilde{A}$: $S^n \to S^n$ формулой

$$\tilde{A}(x) = \frac{A(x)}{\|A(x)\|}, \quad x \in S^n.$$

Пусть A — диагонализируемый оператор с собственными значениями $\lambda_1 = \ldots = \lambda_m = -1$ и $\lambda_{m+1} = \ldots = \lambda_{n+1} = 1$, где $m \leqslant n+1$. Докажите, что для этого оператора $\deg \tilde{A} = (-1)^m$.

Указание. Оператор A можно представить как композицию m операторов B, у каждого из которых одно собственное значение λ_i, равно -1, а остальные n собственных значений равны 1. Соответственно отображение $\tilde{A}$ есть композиция отображений $\tilde{B}_i$ и $\deg \tilde{A} = \prod\limits_{i=1}^{m} \deg \tilde{B}_i$. Степень каждого из $\tilde{B}_i$ равна (-1). Чтобы заметить это, нужно построить триангуляцию K сферы S^n, инвариантную относительно отображения $\tilde{B}_i$; эта триангуляция получается из объединения двух конусов над триангуляцией «экватора» — сферы $S_э^{n-1}$, лежащей в собственном подпространстве, соответствующем $\lambda = 1$, а вершины конусов — «северный» и «южный» полюса — лежат в собственном подпространстве, соответствующем $\lambda_i = -1$. Образующий элемент группы $H_n(K; \mathbb{Z})$ состоит из цикла γ, равного сумме всех n-мерных симплексов из K, взятых с согласованной ориентацией. Отображение $\tilde{B}_i$ переводит цикл γ в цикл $(-\gamma)$ (меняя ориентацию симплексов); поэтому $\deg \tilde{B}_i = -1$.

6°. Докажите, что для произвольного невырожденного линейного оператора $A\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ справедливо равенство $\deg \tilde{A} = \operatorname{sign} |A|$.

Указание. Покажите, что A гомотопен в классе невырожденных линейных операторов оператору A', матрица которого диагональна и диагональные элементы равны ± 1.

Рассмотрим непрерывное отображение $\Phi\colon U \to \mathbb{R}^{n+1}$, где U — область в $\mathbb{R}^{n+1}$. Обычно в задачах об исследовании решений уравнения

$$\Phi(x) = 0 \tag{6}$$

отображение Φ называют векторным полем (точке x поставлен в соответствие вектор $\Phi(x)$), а решения уравнения (6) называют особыми точками векторного поля Φ.

В некоторых задачах отображение Φ может не быть непрерывным на всей области U. Если оно имеет конечное число точек разрыва (или точек, в которых значение не определено), то такие точки также называют особыми. Большая часть последующих результатов верна и для таких векторных полей.

Пусть x^0 — изолированная особая точка векторного поля Φ, т. е. $\Phi(x^0) = 0$, и в некоторой окрестности точки x^0 нет других решений уравнения (6). Тогда для достаточно малого R при $0 < r < R$ определена степень отображения $\tilde{\Phi}_r\colon S^n \to S^n$, задаваемого равенством

$$\tilde{\Phi}_r(x) = \frac{\Phi(rx + x^0)}{\|\Phi(rx + x^0)\|}, \tag{7}$$

и эта степень не зависит от выбора r (сравните с упражнением 3°).

Определение 2. Степень $\deg \tilde{\Phi}_r$ отображений $\tilde{\Phi}_r$ (при достаточно малых r) называется *индексом изолированной особой точки* x^0 *векторного поля* Φ; мы будем обозначать его $\operatorname{ind}(x^0, \Phi)$.

Пусть поле Φ не имеет особых точек на границе $S_r^n(x^0)$ шара $D_r^{n+1}(x^0)$ радиуса r с центром в точке x^0 (теперь не предполагается, что x^0 — особая точка, а r мало). Очевидно, и в этом случае формула (7) определяет отображение $\tilde{\Phi}_r$: $S^n \to S^n$.

Определение 3. Степень $\deg \tilde{\Phi}_r$ отображения $\tilde{\Phi}_r$ называют *характеристикой векторного поля* Φ на границе шара $D_r^{n+1}(x^0)$. Мы будем обозначать характеристику $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0))$.

Наряду с термином «характеристика векторного поля» часто употребляют термин «вращение векторного поля» по аналогии с 2-мерным случаем, где для φ: $S^1 \to S^1$ степень $\deg \varphi$ есть алгебраическое число оборотов вектора $\varphi(x)$, когда x пробегает (в положительном направлении) окружность S^1.

Теорема 2. *Пусть поле* Φ *не имеет особых точек в замкнутом шаре* $\overline{D}_r^{n+1}(x^0)$; *тогда* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) = 0$.

Доказательство. Отображение $\tilde{\Phi}_r$ гомотопно постоянному отображению Φ_0, отображающему S^n в точку $\Phi(x^0)/\|\Phi(x^0)\| \in S^n$, степень которого равна нулю. Соответствующая гомотопия задается, например, формулой

$$\Phi(t, x) = \frac{\Phi(trx + x^0)}{\|\Phi(trx + x^0)\|}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in S^n. \ \blacksquare$$

Следствие. *Если* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) \neq 0$, *то поле* Φ *имеет по крайней мере одну особую точку в шаре* $D_r^{n+1}(x^0)$.

Отметим, что характеристика $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0))$ определена, даже если поле Φ задано только на границе $S_r^n(x^0)$ шара $D_r^{n+1}(x^0)$ *.

Следующая теорема вытекает непосредственно из теоремы 2.

Теорема 3. *Пусть поле* Φ *задано на сфере* $S_r^n(x^0)$ *и не имеет особых точек. Если* $\varkappa(\Phi, S_r^n(x^0)) \neq 0$, *то* Φ *нельзя продолжить на шар* $\overline{D}_r^{n+1}(x^0)$ *без особых точек.*

Справедлива и теорема, обратная тереме 3; она вытекает из упомянутой теоремы Хопфа.

Упражнения. 7°. Пусть x^0 — особая точка гладкого векторного поля Φ на $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и матрица Якоби $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)$ отображения Φ в точке

---

* Поле Φ: $S_r^n(x^0) \to \mathbb{R}^{n+1}$ в этом случае, очевидно, не является векторным полем на многообразии $S_r^n(x^0)$ в смысле § 8 гл. IV.

x^0 невырожденна (такие точки называют невырожденными). Докажите, что x^0 — изолированная особая точка поля Φ и что

$$\operatorname{ind}(x^0, \Phi) = \operatorname{sign}\det\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Bigg|_{x^0}.$$

Указание. Постройте гомотопию, соединяющую векторные поля Φ_r и $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)\Big|_{x^0}$ на S^n.

8°. Пусть отображение Φ: $\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ определено формулой $\Phi(z) = z^n$, где $n>0$ — целое число. Рассматривая Φ как отображение Φ: $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, вычислите индекс нулевой особой точки поля Φ. Сделайте то же самое для отображения $\Psi(z) = (\bar{z})^n$.

Рассмотрим векторное поле $X(x)$ на многообразии M^n. Пусть $x^0 \in M^n$ — изолированная особая точка поля $X(x)$, т. е. $X(x^0) = 0$ и существует окрестность $U(x^0) \subset M^n$ точки x^0, в которой $X(x) \neq 0$ при $x \neq x_0$. В локальных координатах поле $X(x)$ имеет вид

$$\left(x_1, \ldots, x_n; X_1(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right).$$

Индекс $\operatorname{ind}(x^0, X)$ особой точки x^0 векторного поля $X(x^0)$ на многообразии можно определить как индекс особой точки $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ (здесь x_i^0 — координаты точки x^0) векторного поля $\Phi = \{X_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n)\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Упражнения. 9°. Докажите, что индекс $\operatorname{ind}(x^0, X)$ не зависит от выбора локальных координат.

10°. Пусть f — гладкая функция на многообразии, x^0 — невырожденная критическая точка индекса λ функции f (см. § 11 гл. IV). Докажите, что $\operatorname{ind}(x^0, \operatorname{grad} f) = (-1)^\lambda$.

Указание. Воспользуйтесь результатами упражнений 7° § 12 гл. IV и 6° этого параграфа.

3. Вращение векторного поля. Понятие характеристики векторного поля обобщим на случай границы области произвольной формы.

Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, — ограниченная область, $\bar{U}$ — ее замыкание, ∂U — граница. Рассмотрим непрерывное векторное поле Φ: $\bar{U}\to\mathbb{R}^n$, не имеющее особых точек на границе; таким образом, определено непрерывное отображение Φ: $\partial U\to\mathbb{R}^n\setminus 0$, однако допускаются особые точки в $U = \operatorname{int}\bar{U}$.

Развивая понятия п. 2, определим глобальную характеристику $\varkappa(\Phi, \partial U)$ (или «вращение») векторного поля Φ на границе ∂U. На первом шаге конструкции перейдем к меньшей полиэдральной (замкнутой) области $P_\alpha \subset U$, «хорошо аппроксимирующей» замыкание $\overline{U}$: $P_\alpha \supset \overline{U}\backslash S_\alpha(\partial U)$, где $S_\alpha(\partial U)$ — α-окрестность границы ∂U при достаточно малом заданном $\alpha > 0$ (т. е. объединение открытых шаров радиуса α с центром в точках $x \in \partial U$, когда x меняется на границе ∂U). Чтобы построить такой полиэдр P_α, достаточно совершить правильное разбиение пространства $\mathbb{R}^n$ плоскостями, параллельными координатным, на конгруэнтные кубы достаточно малого диаметра $d = \sqrt{n}\rho$, где ρ — сторона куба, и потребовать $\rho < \alpha/\sqrt{n}$; тогда P_α — объединение всех кубов, пересекающихся с замыканием $\overline{U\backslash S_\alpha(\partial U)}$ (которое предполагается непустым ввиду малости α). Триангулируя каждый куб из P_α стандартным образом (т. е. в каждой грани I^k куба I^n производя коническую конструкцию из ее центра над границей ∂I^k последовательно при $k = 1, 2, \ldots, n$), получим триангуляцию K полиэдра P_α. Ориентируем все n-мерные симплексы $\tau_i^n \in K$ одинаково; это означает, что если $[\tau_i^n] = [a_i^0, \ldots, a_i^n]$ — ориентированный симплекс указанной ориентации, то реперы $e_i^1, \ldots, e_i^n$, где $e_i^k = \overrightarrow{a_i^0 a_i^k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, для любого i задают ориентацию пространства $\mathbb{R}^n$, совпадающую с фиксированной. Образуем целочисленную цепь $x_n = \sum_i 1 \cdot [\tau_i^n]$ и назовем ее фундаментальной цепью P_α. Ее граница $\partial_n x_n = \sum_i \partial_n[\tau_i^n]$ обладает следующим важным свойством — она состоит из $(n-1)$-мерных симплексов: $\partial_n x_n = \sum_j 1 \cdot [t_j^{n-1}]$, где симплексы t_j^{n-1} принадлежат теоретико-множественной границе ∂P_α и $\partial P_\alpha = \bigcup_j t_j^{n-1}$, а ориентация $[t_j^{n-1}]$ индуцирована ориентацией единственного симплекса $[\tau_i^n]$, в границу которого входит $[t_j^{n-1}]$ (т. е. $\partial_n[\tau_i^n] = [t_j^{n-1}] + \ldots$). Этот целочисленный цикл $z_{n-1} = \partial_n x_n$ назовем *фундаментальным циклом границы* ∂P_α.

Можно показать, что группа $H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$ является свободной абелевой группой, имеющей столько образующих, сколько компонент связности имеет граница ∂P_α; обозначим это число через L (вообще говоря, L зависит от α: $L = L_\alpha$). При этом

$$\partial_n x_n = \sum_j 1 \cdot [t_j^{n-1}] = \sum_{i=1}^{L} \left(\sum_{p=1}^{M_i} 1 \cdot [t_p^{n-1}] \right),$$

где симплексы t_p^{n-1} из каждой внутренней суммы входят в одну и ту же компоненту связности ∂P_α; класс гомологий $[z_{n-1}^i]$ каждой внутренней суммы $\sum_{p=1}^{M_i} 1\cdot[t_p^{n-1}] = z_{n-1}^i$ есть образующая группы $H_{n-1}(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$.

Второй шаг конструкции связан с рассмотрением векторного поля Φ: $P_\alpha \to \mathbb{R}^n$ на полиэдре P_α. Так как на границе ∂U поле Φ не имеет особых точек, то в силу непрерывности оно их не будет иметь в окрестности $S_\alpha(\partial U)$ (точнее, на пересечении $S_\alpha(\partial U) \cap \overline{U}$) при достаточно малом $\alpha > 0$. Зафиксируем такое α и построим полиэдр P_α, как описано выше. Тогда на границе ∂P_α поле Φ не имеет особых точек и определено отображение Φ: $\partial P_\alpha \to \mathbb{R}^n\backslash 0$. Это отображение индуцирует гомоморфизм сингулярных групп гомологий Φ_{*n-1}: $H_{n-1}^s(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z}) \to H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0;\ \mathbb{Z})$. Так как $\mathbb{R}^n\backslash 0 \sim S^{n-1}$ (гомотопическая эквивалентность), то $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0;\ \mathbb{Z})$ и $H_{n-1}^s(S^{n-1};\ \mathbb{Z})$ изоморфны и являются свободными абелевыми группами с одной образующей. В силу теоремы единственности теории гомологий группы $H_{n-1}(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$ и $H_{n-1}^s(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$ изоморфны; пусть $[z_{n-1}^i]^s$ — образ при этом изоморфизме образующей $[z_{n-1}^i]$ из $H_{n-1}(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$, а $\tilde{\gamma}_{n-1}^s$ — образующая в $H_{n-1}^s(\mathbb{R}\backslash 0;\ \mathbb{Z})$. Тогда $\Phi_{*n-1}[z_{n-1}^i]^s = m_i\cdot\tilde{\gamma}_{n-1}^s$, где $m_i \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим класс гомологий $[z_{n-1}]^s \in H_{n-1}^s(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$, соответствующий классу $[z_{n-1}] \in H_{n-1}(\partial P_\alpha;\ \mathbb{Z})$ цикла $z_{n-1} = \partial_n x_n = \sum_{i=1}^{L} z_{n-1}^i$. Тогда $\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m\cdot\tilde{\gamma}_{n-1}^s$, где $m \in \mathbb{Z}$. Целое число m назовем характеристикой $\varkappa(\Phi,\ \partial P_\alpha)$ («вращением») векторного поля Φ на границе ∂P_α. Заметим, что в силу теоремы единственности теории гомологий $[z_{n-1}]^s = \sum_{i=1}^{L}[z_{n-1}^i]^s$, и, следовательно $m = \sum_{i=1}^{L} m_i$.

Очевидно, что знак $\varkappa(\Phi,\ \partial P_\alpha)$ зависит от выбора образующей в группе $H_{n-1}^s(\mathbb{R}\backslash 0;\ \mathbb{Z})$. Удобно фиксировать выбор образующих в группах $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0;\ \mathbb{Z})$, $H_{n-1}^s(S^{n-1};\ \mathbb{Z})$ следующим образом. Зафиксируем симплекс τ^n с барицентром в точке 0 пространства $\mathbb{R}^n$. Тогда центральная проекция π осуществляет гомеоморфизм границы $\partial\tau^n$ и S^{n-1}; так как граница $\partial\tau^n$ триангулирована естественным образом, то и S^{n-1} получает соответствующую триангуляцию, и π становится симплициальным отображением полиэдров $\partial\tau^n$, S^{n-1} и индуцирует цепное отображение $\hat{\pi}_*$ их цепных комплексов (над $\mathbb{Z}$). Пусть $[\tau^n]$

ориентирован в соответствии с ориентацией $\mathbb{R}^n$. Тогда $\partial_n[\tau^n] = q_{n-1}$ — фундаментальный цикл полиэдра $\partial\tau^n$, что следует из формулы (9) § 3 для гомологий $H_*(\{\partial\tau^n\}; \mathbb{Z})$. Его образ $\gamma_{n-1} = \hat{\pi}_{n-1}q_{n-1}$ в $C_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$ является фундаментальным циклом полиэдра $S^{n-1} = \partial D^n$, а соответствующий класс гомологий $[\gamma_{n-1}]$ — образующей в $H_{n-1}(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, которую мы фиксируем. Очевидно, $[\gamma_{n-1}] = \pi_{*n-1}[q_{n-1}]$. Изоморфизм между H_*- и H_*^s-гомологиями определяет образующую γ_{n-1}^s в $H_{n-1}^s(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, причем $\gamma_{n-1}^s = \pi_{*n-1}[q_{n-1}]^s$. Образующая $\tilde{\gamma}_{n-1}^s \in H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$ определяется фиксацией отображения r: $\mathbb{R}^n\backslash 0 \to S^{n-1}$ и гомотопически обратного к нему φ: $S^{n-1} \to \mathbb{R}^n\backslash 0$, где $r(x) = x/\|x\|$ и $\varphi(x) = x$; r и φ индуцируют изоморфизмы $\varphi_{*n-1} = r_{*n-1}^{-1}$: $H_{n-1}^s(S^{n-1}; \mathbb{Z}) \to H_{n-1}^s(\mathbb{R}\backslash 0; \mathbb{Z})$ и $\tilde{\gamma}_{n-1}^s = \varphi_{*n-1}(\gamma_{n-1}^s)$.

Фиксировав таким образом образующие в группах $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n\backslash 0; \mathbb{Z})$, $H_{n-1}^s(S^{n-1}; \mathbb{Z})$, будем иметь для определения характеристики m равенство $\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m\cdot\tilde{\gamma}_{n-1}^s$, или, поскольку $\tilde{\gamma}_{n-1}^s = \varphi_{*n-1}(\gamma_{n-1}^s) = r_{*n-1}^{-1}(\gamma_{n-1}^s)$, равенство $r_{*n-1}\Phi_{*n-1}[z_{n-1}]^s = m\gamma_{n-1}^s$. Так как $r_{*k}\Phi_{*k} = (r\cdot\Phi)_{*k}$, где $(r\cdot\Phi)(x) = \Phi(x)/\|\Phi(x)\|$, $r\cdot\Phi = \tilde{\Phi}$: $\partial P_\alpha \to S^{n-1}$, то m интерпретируется как степень отображения $\tilde{\Phi}$: $\partial P_\alpha \to S^{n-1}$ в соответствии с определением 3 § 6.

Третий шаг — доказательство независимости характеристики $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ от выбора полиэдра P_α — мы опускаем ввиду громоздкости используемой нами элементарной конструкции (здесь пришлось бы ссылаться на инвариантность симплициальных гомологий и на теорему единственности).

Определение 4. *Характеристикой* (*вращением*) $\varkappa(\Phi, \partial U)$ *векторного поля* Φ *на границе* ∂U будем называть характеристику $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha)$ на границе ∂P_α какой-либо полиэдральной области P_α указанного типа (см. первый шаг).

Теорема 4. *Если* Φ: $\overline{U}\times[0; 1] \to \mathbb{R}^n$ — *гомотопия векторного поля, не имеющая на* ∂U *особых точек* (*т. е.* Φ: $(\partial U)\times[0; 1] \to \mathbb{R}^n\backslash 0$), *то характеристика* $\varkappa(\Phi_t, \partial U)$ *векторного поля* $\Phi_t = \Phi$: $(\partial U\times t) \to \mathbb{R}^n\backslash 0$ *не меняется при изменении* $t \in [0; 1]$, *в частности*, $\varkappa(\Phi_0, \partial U) = \varkappa(\Phi_1, \partial U)$.

Доказательство. В силу непрерывности отображения $\Phi(x, t)$ по переменным (x, t) найдется такое $\alpha_0 > 0$, что в α_0-окрестности $S_{\alpha_0}(\partial U)$ поле Φ_t не имеет особых точек при любом $t \in [0; 1]$. Тогда Φ_t: $\partial P_{\alpha_0} \to \mathbb{R}^n\backslash 0$ для всякого $t \in [0; 1]$, где P_{α_0} построено по α_0 на первом шаге, — непрерывная гомотопия; следовательно, гомоморфизм $(\Phi_t)^s_{*n-1}$ сингулярных гомологий постоянен по t, что означает постоянство $\varkappa(\Phi_t, \partial P_\alpha)$, а следовательно, и постоянство $\varkappa(\Phi_t, \partial U)$. ■

Теорема 5. *Если непрерывное поле* $\Phi\colon \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *не имеет на области* $\overline{U}$ *особых точек, то* $\varkappa(\Phi, \partial U) = 0$.

Доказательство. Пусть $z_{n-1} = \partial_n x_n$ — фундаментальный цикл границы ∂P_α. В условиях теоремы имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\partial P_\alpha \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\Phi|_{\partial P_\alpha}"'] & & P_\alpha \arrow[dl, "\Phi|_{P_\alpha}"] \\
& \mathbb{R}^n \setminus 0 &
\end{tikzcd}$$

где i — вложение, $\Phi\big|_{\partial P_\alpha}$ и $\Phi\big|_{P_\alpha}$ — сужения отображения Φ: $\overline{U} \to \mathbb{R}^n \setminus 0$. Рассматривая гомоморфизмы H^s_*-гомологий, порожденные отображениями диаграммы, а также изоморфизмы h_{n-1} H_{*n-1}- и H^s_{*n-1}-групп (см. теорему единственности для теории гомологий), получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
H_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "i_{*n-1}"] \arrow[d, "h'_{n-1}"] & & H_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[d, "h''_{n-1}"] \\
H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[rr, "i_{*n-1}"] \arrow[dr, "\left(\Phi|_{\partial P_\alpha}\right)_{*n-1}"'] & & H^s_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z}) \arrow[dl, "\left(\Phi|_{P_\alpha}\right)_{*n-1}"] \\
& H_{n-1}(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z}) &
\end{tikzcd}$$

Так как $i_{*n-1}[z_{n-1}] = 0$ и $H_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$ ввиду гомологичности $z_{n-1} \sim$ ~ 0 в $C_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$ цикла $z_{n-1} = \partial_n x_n$, имеем $h''_{n-1}(i_{*\,n-1}[z_{n-1}]) = 0$, а из коммутативности квадрата получаем $i_{*\,n-1}(h'_{n-1}[z_{n-1}]) = 0$; отсюда и из равенства $[z_{n-1}]^s = h'_{n-1}[z_{n-1}]$ следует, что $i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = 0$ в $H^s_{n-1}(P_\alpha; \mathbb{Z})$. Этот факт вместе с коммутативностью треугольника дает следующие равенства:

$$\left(\Phi\big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z^s_{n-1}] = \left(\Phi\big|_{P_\alpha}\right)_{*\,n-1} i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s =$$
$$= \left(\Phi\big|_{P_\alpha}\right)_{*\,n-1}(i_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s) = 0,$$

что и означает равенство нулю вращения

$$\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha) = \varkappa(\Phi, \partial U). \ \blacksquare$$

Следствие 1. *Если для непрерывного векторного поля* Φ: $\overline{U} \to \mathbb{R}^n$ *без особых точек на границе* ∂U *характеристика* $\varkappa(\Phi, \partial U)$ *отлична от нуля, то внутри области имеется точка* $x^* \in U$: $\Phi(x^*) = 0$.

Доказательство. Предположив противное, немедленно получим противоречие в силу теоремы. ■

Выше отмечалось, что в приложениях под особой точкой полезно понимать не только нуль ($\Phi(x_*) = 0$), но и, более широким образом, точки разрыва или неопределенности векторного поля (см., например, § 6 гл. I). Следующее утверждение является незначительной модификацией предыдущего.

Следствие 2. *Если на некоторой* ε*-окрестности* $S_\varepsilon(\partial U)$, $\varepsilon > 0$, *векторное поле* Φ *непрерывно, а на границе не имеет нулей и* $\varkappa(\Phi, \partial U) \neq 0$, *то поле нельзя продолжить внутрь области* $\overline{U}$ *без особой точки в расширенном смысле.*

Действительно, допустив противное, проводим рассуждение, как и выше.

Замечание. Если $\overline{U}$ — полиэдр, состоящий из объединения n-мерных симплексов (при связности U), то в последнем предложении достаточно требовать непрерывность Φ только на границе ∂U.

Пусть теперь $x_0 \in U$ — изолированная особая точка (в расширенном смысле) векторного поля Φ, т. е. существует диск $\overline{D}_r(x_0)$, в котором нет другой отличной от x_0 особой точки. Имеем непрерывное отображение

$$\Phi: \ (\overline{D}_r(x_0) \backslash x_0) \to \mathbb{R}^n \backslash 0.$$

Рассмотрим полиэдры $\overline{D}_r(x_0)$, $\overline{D}_1(x_0)$ и их границы $S_r^{n-1}(x_0)$, $S_1^{n-1}(x_0)$ соответственно; определим для последних фундаментальные циклы γ_{n-1}^r, γ_{n-1}^1, перенеся барицентр фиксированного симплекса τ^n в точку x_0 и используя гомеоморфизмы — центральные проекции $\pi^{(r)}$, $\pi^{(1)}$ из точки x_0 границы $\partial\tau^n$ на сферы $S_r^{n-1}(x_0)$, $S_1^{n-1}(x_0)$. Для центральной проекции π: $S_1^{n-1}(x_0) \to S_r^{n-1}(x_0)$, которая, очевидно, симплициальна, имеем $\gamma_{n-1}^r = \widehat{\pi}_{n-1}\gamma_{n-1}^1$, так как $\pi = \pi^{(r)}(\pi^{(1)})^{-1}$ и соответственно $\widehat{\pi}_{n-1} = \widehat{\pi}_{n-1}^{(r)} \cdot (\widehat{\pi}_{n-1}^{(1)})^{-1}$ для цепных комплексов; отсюда следует равенство $[\gamma_{n-1}^r] = \pi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^1]$ симплициальных классов гомологий, а также соответствующих сингулярных $[\gamma_{n-1}^r]^s = \pi_{*\,n-1}[\gamma_{n-1}^1]^s$.

Отображение Φ: $S_r^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}^n \backslash 0$ индуцирует гомоморфизм Φ_*: $H_{n-1}^s(S_r^{n-1}(x_0); \mathbb{Z}) \to H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n \backslash 0; \mathbb{Z})$; пусть $\Phi_{*\, n-1}[\gamma_{n-1}^r]^s = m \cdot \tilde{\gamma}_{n-1}^s$. Число m назовем индексом ind (x_0, Φ) особой точки x_0 векторного поля Φ.

Если воспользоваться зависимостью между классами гомологий $[\gamma_{n-1}^r]^s$ и $[\gamma_{n-1}^1]^s$, то получим равносильное равенство $\Phi_{*\, n-1}\pi_{*\, n-1}[\gamma_{n-1}^1]^s = m\tilde{\gamma}_{n-1}^s$; так как $\Phi_{*\, n-1}\pi_{*\, n-1} = (\Phi\pi)_{*\, n-1}$, и учитывая, что $\Phi\pi$: $S_1^{n-1}(x_0) \to \mathbb{R}^n \backslash 0$ задается формулой $(\Phi\pi)(x) = \Phi(r(x - x_0) + x_0)$, $x \in S_1^{n-1}(x_0)$, заключаем об эквивалентности определения ind (x_0, Φ) ранее данному (определению 2, п. 2); индекс ind (x_0, Φ) не зависит от радиуса сферы $S_r^{n-1}(x_0)$ (r можно брать как угодно малым).

Теорема 6 (об алгебраическом числе особых точек). *Пусть векторное поле Φ на границе области $\overline{U}$ непрерывно и не имеет особых точек, а внутри области имеет конечное число особых точек $\{x_i\}_{i=1}^k$ в расширенном смысле. Тогда справедливо равенство*

$$\varkappa(\Phi, \partial U) = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{ind}(x_i, \Phi), \tag{9}$$

где сумма справа называется алгебраическим числом особых точек.

Доказательство. Так как отображение Φ непрерывно на $\overline{U} \backslash \{x_1, \ldots, x_k\}$, то можно построить полиэдр P_α, указанный на первом шаг. Некоторые из точек $x_1, \ldots, x_k$ могут оказаться на $(n-1)$-мерных симплексах триангуляции полиэдра P_α; путем достаточно малых сдвигов полиэдра, задаваемых параллельным переносом на вектор, ортогональный плоскости, содержащей такую грань, можно добиться того, что все особые точки окажутся внутри n-мерных симплексов $\{t_i^n\}_{i=1}^k$ триангуляции.

Будем считать, что P_α уже обладает этим свойством, и что такие симплексы t_i^n не пересекаются один с другим и с ∂P_α, т. е. $t_i^n \cap t_j^n = \varnothing$ при $i \neq j$ и $t_i^n \cap \partial P_\alpha = \varnothing$. Фундаментальную цепь x_n полиэдра P_α разобьем на две части: $x_n = x_n^1 + x_n^2$, где $x_n^1 = \sum_{i=1}^{k} 1 \cdot [t_i^n]$, а x_n^2 состоит из остальных симплексов $\{\tau_j^n\}$: $x_n^2 = \sum 1 \cdot [\tau_j^n]$; напомним, что все n-мерные симплексы ориентированы одинаково (в соответствии с ориентацией $\mathbb{R}^n$). Будем называть носителем некоторой цепи

$c_l = \sum_i g_i \tau_i^l$ комплекса $C_*(K; G)$, соответствующего симплициальному комплексу K, объединение всех симплексов τ_i^l, входящих в цепь c_l с ненулевыми коэффициентами. Носители цепей x_n^1, x_n^2 обозначим соответственно Q_1, Q_2. Для фундаментального цикла границы ∂P_α имеем равенство $z_{n-1} = z_{n-1}^1 + z_{n-1}^2$, где $z_{n-1}^1 = \partial_n x_n^1$, $z_{n-1}^2 = \partial_n x_n^2$ — фундаментальные циклы полиэдров ∂Q_1 (Q_1 не связен, если $k > 1$) и ∂Q_2; так как носитель $|\partial_n x_n^1|$ содержится в $Q_1 \cap Q_2$, то можно считать z_{n-1}^1, z_{n-1}^2 циклами полиэдра ∂Q_2, причем класс гомологий $[z_{n-1}^2] = 0$ в $H_{n-1}(Q_2; \mathbb{Z})$; так как $\partial P_\alpha \subset \partial Q_2$, можно считать z_{n-1} циклом полиэдра ∂Q_2.

Из равенства $z_{n-1}^2 = z_{n-1} - z_{n-1}^1$ получаем $[z_{n-1}^2] = [z_{n-1}] - [z_{n-1}^1]$ в $H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ и $[z_{n-1}^2]^s = [z_{n-1}]^s - [z_{n-1}^1]^s$ в $H_{n-1}^s(\partial Q_2; \mathbb{Z})$, где верхний индекс s указывает на то, что рассматривается соответствующий класс сингулярных гомологий. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_{*\,n-1}} & H_n(Q_2; \mathbb{Z}) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h'_{n-1}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h''_n} \\ H_{n-1}^s(\partial Q_2; \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i_{*\,n-1}} & H_n^s(Q_2; \mathbb{Z}) \end{array} \tag{10}$$

где $i_{*\,n-1}$ — гомоморфизмы, порожденные вложением $i\colon \partial Q_2 \to Q_2$, а h', h'' — изоморфизмы гомологий H_* и H_*^s. Класс $[z_{n-1}^2]$ из $H_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ принадлежит ядру $\operatorname{Ker} i_{*\,n-1}$, так как $[z_{n-1}^2] = 0$ в $H_{n-1}(Q_2; \mathbb{Z})$. Из коммутативности диаграммы, как в теореме 5, получаем $i_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^s = 0$ в $H_{n-1}^s(Q_2; \mathbb{Z})$; более того, полиэдры ∂Q_2, Q_2 теперь играют роль полиэдров ∂P_α, P_α в доказательстве теоремы 5; поэтому имеем еще равенство $\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^s = 0$ в $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$. С другой стороны, в $H_{n-1}^s(\mathbb{R}^n \setminus 0; \mathbb{Z})$ имеем

$$\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^2]^2 = \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s - \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^1]^s,$$

что в итоге приводит к равенству

$$\left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \left(\Phi\big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}^1]^s. \tag{11}$$

Принимая во внимание равенство $[z^1_{n-1}]^s = \sum_i [\partial_n [t^n_i]]^s$, перепишем (11) в виде

$$\left(\Phi\Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi\Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s. \tag{12}$$

Так как $\partial Q_2 = \partial P_\alpha \cup (\bigcup_i \partial t^n_i)$ и симплексы t^n_i не пересекаются, то группы C^s_*, H^s_* сингулярных цепей и гомологий полиэдра ∂Q_2 разлагаются в прямые суммы групп, соответствующих симплексам t^n_i в ∂Q_2 и ∂P_α. Отождествляя классы $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t^n_i]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ с классами $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t^n_i]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$, $H^s_{n-1}(\partial t^n_i; \mathbb{Z})$ в соответствии с указанным разложением, перепишем последнее соотношение (12) в виде

$$\left(\Phi\Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi\Big|_{\partial t^n_i}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s;$$

учитывая, что

$$\left(\Phi\Big|_{\partial t^n_i}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s = m_i\cdot\tilde{\gamma}^s_{n-1},$$

где $m_i = \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, получим $\left(\Phi\Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i m_i\tilde{\gamma}^s_{n-1}$, следовательно, $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha) = \sum_i \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Формула (9) является одной из важнейших в теории особых точек векторных полей и неподвижных точек отображений.

§ 7. Гомологии клеточного комплекса

Перейдем к изучению гомологий пространств, имеющих гомотопический тип клеточного комплекса. Этот класс пространств интересен, во-первых, потому, что он достаточно широк (см. § 12 гл. IV), а во-вторых, потому, что гомологии клеточного комплекса могут быть вычислены весьма простым и изящным способом.

Пусть X — конечный клеточный комплекс. Построим цепной комплекс $\tilde{C}_*(X; G)$ следующим образом. В качестве группы $\tilde{C}_k(X; G)$ возьмем абелеву группу формальных линейных комбинаций $\sum_i g_i\cdot\tau^k_i$, где $g_i \in G$ — произвольные элементы, τ^k_i — k-мерные клетки комплекса X; суммирование идет по всем k-мерным клеткам. Следовательно, группа $\tilde{C}_k(X; G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько клеток размерности k в клеточном разбиении X. Будем при этом считать, что каждый экземпляр G соответствует одной из k-мерных клеток.