Принимая во внимание равенство $[z^1_{n-1}]^s = \sum_i [\partial_n[t^n_i]]^s$, перепишем (11) в виде

$$\left(\Phi \Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi \Big|_{\partial Q_2}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s. \qquad (12)$$

Так как $\partial Q_2 = \partial P_\alpha \cup \left(\bigcup_i \partial t^n_i\right)$ и симплексы t^n_i не пересекаются, то группы C^s_*, H^s_* сингулярных цепей и гомологий полиэдра ∂Q_2 разлагаются в прямые суммы групп, соответствующих симплексам t^n_i в ∂Q_2 и ∂P_α. Отождествляя классы $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t^n_i]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial Q_2; \mathbb{Z})$ с классами $[z_{n-1}]^s$, $[\partial_n[t^n_i]]^s$ в $H^s_{n-1}(\partial P_\alpha; \mathbb{Z})$, $H^s_{n-1}(\partial t^n_i; \mathbb{Z})$ в соответствии с указанным разложением, перепишем последнее соотношение (12) в виде

$$\left(\Phi \Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i \left(\Phi \Big|_{\partial t^n_i}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s;$$

учитывая, что

$$\left(\Phi \Big|_{\partial t^n_i}\right)_{*\,n-1}[\partial_n[t^n_i]]^s = m_i \cdot \tilde{\gamma}^s_{n-1},$$

где $m_i = \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, получим $\left(\Phi \Big|_{\partial P_\alpha}\right)_{*\,n-1}[z_{n-1}]^s = \sum_i m_i \tilde{\gamma}^s_{n-1}$, следовательно, $\varkappa(\Phi, \partial P_\alpha) = \sum_i \operatorname{ind}(x_i, \Phi)$, что и завершает доказательство теоремы. ■

Формула (9) является одной из важнейших в теории особых точек векторных полей и неподвижных точек отображений.

§ 7. Гомологии клеточного комплекса

Перейдем к изучению гомологий пространств, имеющих гомотопический тип клеточного комплекса. Этот класс пространств интересен, во-первых, потому, что он достаточно широк (см. § 12 гл. IV), а во-вторых, потому, что гомологии клеточного комплекса могут быть вычислены весьма простым и изящным способом.

Пусть X — конечный клеточный комплекс. Построим цепной комплекс $\tilde{C}_*(X; G)$ следующим образом. В качестве группы $\tilde{C}_k(X; G)$ возьмем абелеву группу формальных линейных комбинаций $\sum_i g_i \cdot \tau^k_i$, где $g_i \in G$ — произвольные элементы, τ^k_i — k-мерные клетки комплекса X; суммирование идет по всем k-мерным клеткам. Следовательно, группа $\tilde{C}_k(X; G)$ изоморфна прямой сумме стольких экземпляров группы G, сколько клеток размерности k в клеточном разбиении X. Будем при этом считать, что каждый экземпляр G соответствует одной из k-мерных клеток.

Определим дифференциал $\tilde{\partial}_k\colon \tilde{C}_k(X; G) \to \tilde{C}_{k-1}(X; G)$. Пусть τ^k — k-мерная клетка X; ее граница содержится в объединении клеток размерности, не выше $k-1$ ($(k-1)$-*мерном остове* X, обозначаемом X^{k-1}). По определению клеточного комплекса, клетка τ^k задается отображением приклеивания $f\colon S^{k-1} \to X^{k-1}$. Рассмотрим композицию $S^{k-1} \to X^{k-1} \to X^{k-1}/X^{k-2}$, где последняя стрелка — отображение факторизации. Пространство X^{k-1}/X^{k-2} является клеточным комплексом; оно состоит из одной клетки размерности нуль — точки $*$, в которую перешло пространство X^{k-2} при факторизации, и стольких клеток размерности $(k-1)$, приклеенных по границам к точке $*$, сколько их было в остове X^{k-1}, т. е. в X. Такое пространство называется букетом $(k-1)$-мерных сфер. Выделим в X^{k-1} клетку τ_j^{k-1}; в букете сфер X^{k-1}/X^{k-2} ей соответствует некоторая сфера S_j^{k-1}. Рассмотрим композицию отображений

$$S^{k-1} \xrightarrow{f} X^{k-1} \to X^{k-1}/X^{k-2} \to S_j^{k-1},$$

где последняя стрелка обозначает отображение факторизации по подпространству пространства X^{k-1}/X^{k-2}, состоящему из всех сфер, кроме S_j^{k-1}. Степень отображения этой композиции называется *коэффициентом инцидентности* клеток τ^k и τ_j^k и обозначается $[\tau^k, \tau_j^{k-1}]$; коэффициент инцидентности показывает, сколько раз граница клетки τ^k «накручивается» на клетку τ_j^{k-1} при приклеивании клетки τ^k к остову X^{k-1}. Обозначим через Ω^{k-1} множество клеток размерности $k-1$ в клеточном комплексе X. Для каждой клетки τ^k определим дифференциал $\tilde{\partial}_k$ формулой

$$\tilde{\partial}_k \tau^k = \sum_{j \in \Omega^{k-1}} [\tau^k, \tau_j^{k-1}] \cdot \tau_j^{k-1}$$

и распространим $\tilde{\partial}_k$ и $\tilde{C}_k(X; G)$ по линейности *.

При $k = 1$ коэффициент инцидентности $[\tau^1, \tau_j^0]$ может быть равен 0, 1 и -1. Если $f((0; 1))$ — 1-мерная клетка τ^1, то

$$[\tau^1, \tau_j^0] = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad [f(0) \cup f(1)] \cap \tau_j^0 = \varnothing \\ & \qquad\qquad \text{или} \quad f(0) = f(1) = \tau_j^0, \\ 1, & \text{если} \quad f(1) = \tau_j^0 \quad \text{и} \quad f(0) \neq \tau_j^0, \\ -1, & \text{если} \quad f(0) = \tau_j^0 \quad \text{и} \quad f(1) \neq \tau_j^0. \end{cases}$$

Можно показать, что $\tilde{\partial}_{k-1} \cdot \tilde{\partial}_k = 0$.

* Как и в § 4, мы считаем, что G — кольцо с единицей.

Итак, построен цепной комплекс $\widetilde{C}_*(X; G)$. Оказывается, что его гомологии совпадают с группами сингулярных гомологий комплекса X. Доказательство этого факта использует лишь технику точных последовательностей; мы не приводим его, поскольку оно чересчур длинно.

Выгода метода вычисления гомологий с помощью комплекса $\widetilde{C}_*(X; G)$ очевидна: группы $\widetilde{C}_k(X; \mathbb{Z})$ имеют конечное число образующих в отличие от групп $C_k^s(X; \mathbb{Z})$. Следовательно, подгруппы k-мерных циклов и границ тоже имеют конечное число образующих, как и их факторгруппа $H_k^s(X; \mathbb{Z})$. Из теории абелевых групп следует, что

$$H_k^s(X; \mathbb{Z}) \simeq \underbrace{(\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z})}_{\rho_k} \oplus \mathbb{Z}_{\rho_1^k} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{\rho_{s_k}^k},$$

где $\mathbb{Z}_{\rho_i^k}$ — конечная циклическая группа порядка ρ_i^k, причем ρ_i^k делится на ρ_{i-1}^k. Число ρ_k называется k-мерным числом Бетти, а числа ρ_i^k — k-мерными числами кручения пространства X.

Описанный способ, несмотря на некоторую сложность его обоснования, является весьма удобным с практической точки зрения и позволяет просто вычислить гомологии целого ряда конкретных пространств.

Упражнение 1°. Представив сферу S^n в виде клеточного комплекса $S^n = e^n \cup e^0$, $n \geqslant 1$, подсчитайте гомологии S^n. Покажите, что $\rho_k = 0$, $k \neq 0, n$; $\rho_0 = \rho_n = 1$ и что все $\rho_i^k = 0$.

Вычислим группы гомологий комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$. Для этого представим $\mathbb{C}P^n$ в виде клеточного комплекса. Точка из $\mathbb{C}P^n$ задается большим кругом $(e^{i\alpha}\xi_1, e^{i\alpha}\xi_2, \ldots$ $\ldots, e^{i\alpha}\xi_{n+1})$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, из $S^n_{\mathbb{C}}$ (т. е. $\xi_i \in \mathbb{C}$, $|\xi_1|^2 + \ldots$ $\ldots + |\xi_{n+1}|^2 = 1$). Определим клетку τ^{2k}, где $0 \leqslant k \leqslant n$, с помощью характеристического отображения $g^{2k}\colon \overline{D}^{2k} \to \mathbb{C}P^n$, сопоставляющего точке

$$(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \left\{\xi \in \mathbb{C}^k\colon \sum_{j=1}^{k} |\xi_j|^2 \leqslant 1\right\} \simeq \overline{D}^{2k}$$

точку из $\mathbb{C}P^n$, заданную большим кругом

$$(e^{i\alpha}\xi_1, \ldots, e^{i\alpha}\xi_k, \quad e^{i\alpha}\sqrt{1 - |\xi_1|^2 - \ldots - |\xi_k|^2}, 0, \ldots, 0).$$

При $k = 0$ это большой круг (точка в $\mathbb{C}P^n$) $(e^{i\alpha}\cdot 1, 0, \ldots, 0)$.

Таким образом, пространство $\mathbb{C}P^n$ представлено в виде клеточного комплекса (проверьте!), имеющего по одной клетке в четных размерностях до $2n$ включительно, и не имеющего клеток в остальных размерностях. Поэтому

$$\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2m \quad \text{и} \quad k \leqslant 2n, \\ 0 & \text{при} \quad k = 2m+1 \quad \text{или} \quad k > 2n. \end{cases}$$

Поскольку одна из групп $\tilde{C}_{k-1}(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, $\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$ тривиальна, в комплексе $\tilde{C}_*(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, состоящем из групп $\tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, граничный гомоморфизм может быть только тривиальным. Получаем изоморфизм $H^s_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \tilde{C}_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G)$, т. е.

$$H^s_k(\mathbb{C}\mathrm{P}^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2i \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Гомологии комплексного проективного пространства $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ могут быть вычислены и другим способом. Сначала мы зададим гладкую функцию f на многообразии $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, все критические точки которой невырождены, а затем с ее помощью установим структуру клеточного комплекса, гомотопически эквивалентного $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$, и вычислим его группы гомологий.

Будем рассматривать $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ как пространство орбит группы S^1, действующей на S^{2n+1}. Определим функцию $\varphi\colon \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$, положив $\varphi(z_0, \ldots, z_n) = \sum\limits_{j=0}^{n} c_j |z_j|^2$, где c_j — вещественные числа, причем $c_j < c_{j+1}$. Пусть

$$(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}, \quad \text{т. е.} \quad \sum_{j=0}^{n} |z_j|^2 = 1.$$

Легко видеть, что для любого комплексного числа λ такого, что $|\lambda| = 1$, выполнено равенство $\varphi(z_0, \ldots, z_n) = \varphi(\lambda z_0, \ldots, \lambda z_n)$. Таким образом, φ определяет функцию на $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$. Обозначим ее $f\colon \mathbb{C}\mathrm{P}^n \to \mathbb{R}$.

Построим на $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$ следующую локальную систему координат. Пусть U_j — множество классов эквивалентности точек $(z_0, \ldots, z_n) \in S^{2n+1}$ таких, что $z_j \neq 0$. Положим $|z_j| \cdot \frac{z_k}{z_j} = x_{jk} + i y_{jk}$. Функции $x_{jk}(z_0, \ldots, z_n)$, $y_{jk}(z_0, \ldots, z_n)$, $k = 0, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$, задают диффеоморфизм множества U_j на открытый единичный шар в $\mathbb{R}^{2n}$.

Упражнение 2°. Проверьте, что множества U_j и отображения, задаваемые функциями

$$x_{jk}, y_{jk}, \quad k = 0, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n, \quad j = 0, 1, \ldots, n$$

образуют атлас гладкого многообразия $\mathbb{C}\mathrm{P}^n$.

Поскольку $|z_k|^2 = x_{jk}^2 + y_{jk}^2$ и $|z_j|^2 = 1 - \sum_{k \neq j} (x_{jk}^2 + y_{jk}^2)$, то в локальных координатах в U_j функцию f можно представить в виде

$$f(\ldots, x_{jk}, y_{jk}, \ldots) = c_j + \sum_{k \neq j} (c_k - c_j)(x_{jk}^2 + y_{jk}^2).$$

Единственной критической точкой функции f в U_j является точка $x_{jk} = y_{jk} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$. Эта критическая точка невырождена, ее индекс равен удвоенному числу отрицательных разностей $c_k - c_j$, т. е. удвоенному числу c_k, меньших c_j. Поэтому индекс критической точки в U_0 равен нулю, индекс критической точки в U_1 равен двум и т. д. Вообще, индекс критической точки в U_j равен $2j$.

Итак, функция f имеет n критических точек, индексы которых равны $2j$, $0 \leqslant j \leqslant n$. Поэтому (см. § 12 гл. IV) пространство $\mathbb{C}P^n$ имеет гомотопический тип клеточного комплекса K, состоящего из клеток четных размерностей $2j$, $0 \leqslant j \leqslant n$, по одной в каждой размерности. Для такого комплекса K имеем

$$\tilde{C}_k(K; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при} \quad k = 2j \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Поскольку одна из групп $\tilde{C}_k(K; G)$, $\tilde{C}_{k-1}(K; G)$ тривиальна, в комплексе $\tilde{C}_*(K; G)$, состоящем из групп $\tilde{C}_k(K; G)$, дифференциал может быть только тривиальным. Получаем изоморфизм

$$H_k^s(K; G) \simeq \tilde{C}_k(K; G).$$

Учитывая, что группы гомологий гомотопически эквивалентных пространств совпадают, имеем окончательный результат:

$$H_k^s(\mathbb{C}P^n; G) \simeq \begin{cases} G & \text{при } k = 2j \leqslant 2n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Рассмотрим теперь вещественное проективное пространство $\mathbb{R}P^n$. Его группы гомологий также можно вычислить, представив $\mathbb{R}P^n$ в виде клеточного комплекса.

Точка из $\mathbb{R}P^n$ задается как пара $\{x, -x\}$, где $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n+1}) \in S^n$, т. е. $\sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1$. Определим клетку τ^k, где $0 \leqslant k \leqslant n$, с помощью характеристического отображения $g^k\colon \bar{D}^k \to \mathbb{R}P^n$, сопоставляющего точке $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \left\{\xi \in \mathbb{R}^k\colon \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2 \leqslant 1\right\} = \bar{D}^k$ точку из $\mathbb{R}P^n$ вида $(x, -x)$, где

$$x = (\xi_1, \ldots, \xi_k, \sqrt{1 - \xi_1^2 - \ldots - \xi_k^2}, 0, \ldots, 0).$$

При $k = 0$ имеем $x = (1, 0, \ldots, 0)$.

Таким образом, пространство $\mathbb{R}P^n$ представлено в виде клеточного комплекса, имеющего по одной клетке в каждой размерности от 0 до n. Заметим, что в полученном клеточном комплексе его k-мерный остов является пространством $\mathbb{R}P^n$, где $0 \leqslant k \leqslant n$.

Вычислим сначала $H_*^s(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$. В соответствующем цепном комплексе

$$\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Для вычисления граничного гомоморфизма рассмотрим коэффициенты инцидентности $[\tau^k, \tau^{k-1}]$ — степени отображений $\varphi_k\colon S^{k-1} \to S^{k-1}$, возникающих как композиции

$$S^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1} \to \mathbb{R}P^{k-1}/\mathbb{R}P^{k-2} \to S^{k-1},$$

где $2 \leqslant k \leqslant n$.

Каждое из этих отображений φ_k можно представить иным способом в виде композиции $\varphi_k = \beta_k \alpha_k$. Отображение φ_k действует так: сначала в сфере S^{k-1} стягивается экватор S^{k-2} в точку, а затем в полученном пространстве («букете») две сферы склеиваются таким образом, что каждая точка склеивается с точкой, «в прошлом» (в исходной сфере) центрально симметричной данной. Таким образом, α_k отображает S^{k-1} на букет двух $(k-1)$-мерных сфер, причем образующая γ группы $H_{k-1}^s(S^{k-1}; \mathbb{Z})$ переходит на сумму $\gamma_1 + \gamma_2$ образующих $(k-1)$-мерной группы гомологий. Отображение β_k склеивает две сферы; в группах гомологий образующие γ_1 и γ_2 переходят на $\pm\gamma$, поскольку на каждой из сфер букета β_k — гомеоморфизм. Таким образом, гомоморфизм $(\varphi_k)_{*\,k-1}$ может переводить образующую γ либо в $2\cdot\gamma = \gamma + \gamma$, либо в $0\cdot\gamma = \gamma - \gamma$. В любом случае $\deg \varphi_k \equiv 0 \pmod 2$, т. е. $[\tau^k, \tau^{k-1}] \equiv 0 \pmod 2$ при $2 \leqslant k \leqslant n$. Таким образом, граничный гомоморфизм $\tilde{\partial}_k$ в $C_*(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ тривиален при $2 \leqslant k \leqslant n$. При $k = 1$ нетрудно видеть, что $[\tau^1, \tau^0] = 0$. Следовательно, граничный гомоморфизм $\tilde{\partial}_k$ тривиален при всех $k = 0, 1, \ldots, n$. Поэтому группы гомологий $H_k^s(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$ изоморфны группам цепей $C_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2)$, т. е.

$$H_k^s(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad k > n. \end{cases}$$

Перейдем к вычислению целочисленных групп гомологий $H_*^s(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z})$. Очевидно, $\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ при $0 \leqslant k \leqslant n$, при $k > n$ имеем $\tilde{C}_k(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}) = 0$. Для вычисления $\tilde{\partial}_k$ снова рассмотрим отображения $\varphi_k = \beta_k \cdot \alpha_k$. Можно показать (используя результат упражнения 5° § 6), что гомоморфизм $(\beta_k)_{*\,k-1}$ при четном $k-1$ (т. е. нечетном k) переводит образующую γ_1 в γ и γ_2 в $(-\gamma)$, а при нечетном $k-1$ (т. е. четном k) обе образующие, γ_1 и γ_2, переходят в γ. Поэтому $(\varphi_k)_{*\,k-1}\gamma = 0 \cdot \gamma$ при нечетном k и $(\varphi_k)_{*\,k-1}\gamma = 2 \cdot \gamma$ при четном k. Соответственно, $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 0$ при нечетном k и $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 2$ при четном k. Таким образом, граничный гомоморфизм ∂_k тривиален при нечетном k и заключается в умножении на 2 при четном $k \leqslant n$. Следовательно, $H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq 0$, $H_3(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$ и т. д. (при $n > 3$).

Получаем следующий результат:

при $n = 2m$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p+1, \quad 1 \leqslant k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $n = 2m + 1$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0,\ n, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p+1, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следующее упражнение выполните, опираясь на описание гомотопического типа многообразия (см. п. 4 § 12 гл. IV).

Упражнение 3°. Покажите, что если M^n — компактное гладкое многообразие размерности n, то $H_k^s(M^n; G) = 0$ при $k > n$.

§ 8. Эйлерова характеристика и число Лефшеца

Весьма важным для приложений является вопрос о том, когда непрерывное отображение $f\colon X \to X$ топологического пространства X в себя имеет неподвижную точку, т. е. когда существует такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$. Достаточные условия существования неподвижных точек могут быть даны в терминах групп гомологий и их гомоморфизмов. Этим вопросам посвящен настоящий параграф. Всюду ниже мы рассматриваем топологические пространства, являющиеся компактными полиэдрами.

1. Число Лефшеца симплициального отображения. Группу коэффициентов G в дальнейшем будем считать полем. Рассмотрим симплициальное отображение $f\colon |K| \to |K|$, где K в соответствии с договоренностью § 3 — конечный симплициальный комплекс. Индуцированный гомоморфизм группы симплициальных гомологий

$$f_{*p}\colon\ H_p(K; G) \to H_p(K; G)$$