жения $\varphi_k = \beta_k \cdot \alpha_k$. Можно показать (используя результат упражнения 5° § 6), что гомоморфизм $(\beta_k)_{*\,k-1}$ при четном $k-1$ (т. е. нечетном k) переводит образующую γ_1 в γ и γ_2 в $(-\gamma)$, а при нечетном $k-1$ (т. е. четном k) обе образующие, γ_1 и γ_2, переходят в γ. Поэтому $(\varphi_k)_{*\,k-1}\gamma = 0\cdot\gamma$ при нечетном k и $(\varphi_k)_{*\,k-1}\gamma = 2\cdot\gamma$ при четном k. Соответственно, $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 0$ при нечетном k и $[\tau^k, \tau^{k-1}] = 2$ при четном k. Таким образом, граничный гомоморфизм ∂_k тривиален при нечетном k и заключается в умножении на 2 при четном $k \leqslant n$. Следовательно, $H_0(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$, $H_1(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $H_2(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq 0$, $H_3(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_2$ и т. д. (при $n > 3$).

Получаем следующий результат:

при $n = 2m$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p+1, \ 1 \leqslant k < n, \\ 0 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

при $n = 2m+1$

$$H_k^s(\mathbb{R}\mathrm{P}^n; \mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{при} \quad k = 0,\ n, \\ \mathbb{Z}_2 & \text{при} \quad k = 2p+1, \ 1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следующее упражнение выполните, опираясь на описание гомотопического типа многообразия (см. п. 4 § 12 гл. IV).

Упражнение 3°. Покажите, что если M^n — компактное гладкое многообразие размерности n, то $H_k^s(M^n; G) = 0$ при $k > n$.

§ 8. Эйлерова характеристика и число Лефшеца

Весьма важным для приложений является вопрос о том, когда непрерывное отображение $f\colon X \to X$ топологического пространства X в себя имеет неподвижную точку, т. е. когда существует такая точка $x \in X$, что $f(x) = x$. Достаточные условия существования неподвижных точек могут быть даны в терминах групп гомологий и их гомоморфизмов. Этим вопросам посвящен настоящий параграф. Всюду ниже мы рассматриваем топологические пространства, являющиеся компактными полиэдрами.

1. Число Лефшеца симплициального отображения. Группу коэффициентов G в дальнейшем будем считать полем. Рассмотрим симплициальное отображение $f\colon |K| \to |K|$, где K в соответствии с договоренностью § 3 — конечный симплициальный комплекс. Индуцированный гомоморфизм группы симплициальных гомологий

$$f_{*p}\colon H_p(K; G) \to H_p(K; G)$$

является эндоморфизмом векторного пространства $H_p(K; G)$. Выбор базиса в $H_p(K; G)$ позволяет сопоставить эндоморфизму матрицу, след которой $\mathrm{Sp}(f_{*p})$ от выбора базиса не зависит.

Определение 1. *Числом Лефшеца симплициального отображения* $f\colon |K| \to |K|$ компактного полиэдра $|K|$ в себя называется величина

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \,\mathrm{Sp}\,(f_{*p}). \tag{1}$$

В силу конечности симплициального комплекса K сумма (1) является суммой конечного числа слагаемых (конечность K нужна также и для того, чтобы $H_p(K; G)$ были конечномерными векторными пространствами и следы $\mathrm{Sp}(f_{*p})$ были корректно определены).

Обозначим через $\mathrm{Sp}(\hat{f}_p)$ след матрицы эндоморфизма $\hat{f}_p\colon C_p(K; G) \to C_p(K; G)$ векторного пространства $C_p(K; G)$.

Теорема 1. *Для симплициального отображения f справедлива формула*

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \,\mathrm{Sp}(\hat{f}_p). \tag{2}$$

Теорема 1 утверждает, что альтернированная сумма следов эндоморфизма цепного комплекса равна альтернированной сумме следов индуцированного эндоморфизма групп гомологий.

Для доказательства теоремы 1 необходимы следующие две леммы, являющиеся легкими упражнениями по курсу линейной алгебры.

Лемма 1. *Пусть $A\colon E \to E$ — эндоморфизм векторного пространства E, E_0 — векторное подпространство пространства E и $AE_0 \subset E_0$. Тогда A определяет эндоморфизм $\tilde{A}\colon E/E_0 \to E/E_0$ и*

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A\big|_{E_0}) + \mathrm{Sp}(\tilde{A}). \tag{3}$$

Лемма 2. *Пусть $\Delta\colon E \to F$ — изоморфизм векторных пространств; $A\colon E \to E$, $B\colon F \to F$ — такие операторы, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "A"'] & F \arrow[d, "B"] \\ E \arrow[r, "\Delta"] & F \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $B\Delta = \Delta A$; тогда

$$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B). \tag{4}$$

Доказательство теоремы 1. Поскольку $f_*\colon C_*(K; G) \to C_*(K; G)$ — гомоморфизм цепных комплексов, то

$$\widehat{f}_p(\operatorname{Ker}\partial_p) \subset \operatorname{Ker}\partial_p \quad \text{и} \quad \widehat{f}_p(\operatorname{Im}\partial_{p+1}) \subset \operatorname{Im}\partial_{p+1}.$$

Введем следующие обозначения: $\operatorname{Ker}\partial_p = Z_p$, $\operatorname{Im}\partial_{p+1} = B_p$, $C_p(K; G)/\operatorname{Ker}\partial_p = T_p$, $Z_p/B_p = H_p$. По лемме 1 имеем

$$\operatorname{Sp}(\widehat{f}_p) = \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_p\big|_{Z_p}\right) + \operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_p\Big|_{T_p}\right) =$$
$$= \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_p\big|_{B_p}\right) + \operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_p\Big|_{H_p}\right) + \operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_p\Big|_{T_p}\right). \quad (5)$$

Но дифференциал ∂_p индуцирует канонический изоморфизм $\widetilde{\partial}_p\colon T_p \to B_{p-1}$, причем коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd} T_p \arrow[r, "\widetilde{\partial}_p"] \arrow[d, "\widetilde{f}_p"'] & B_{p-1} \arrow[d, "\widetilde{f}_{p-1}"] \\ T_p \arrow[r, "\widetilde{\partial}_p"] & B_{p-1} \end{tikzcd}$$

По лемме 2 получим

$$\operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_p\Big|_{T_p}\right) = \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_{p-1}\big|_{B_{p-1}}\right). \quad (6)$$

Ввиду того, что $C_0(K; G) = \operatorname{Ker}\partial_0$, имеем

$$\operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_0\Big|_{T_0}\right) = \operatorname{Sp}(\widehat{f}\,\big|_0). \quad (7)$$

Ясно, что гомоморфизм $\widetilde{\widehat{f}}\colon H_p \to H_p$ совпадает по определению с гомоморфизмом $f_{*p}\colon H_p(K; G) \to H_p(K; G)$. Таким образом, из равенств (5), (6), (7) получаем

$$\operatorname{Sp}\left(\widetilde{\widehat{f}}_p\Big|_{T_p}\right) = \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_p\big|_{B_p}\right) + \operatorname{Sp}(f_{*p}) + \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_{p-1}\big|_{B_{p-1}}\right),$$

откуда

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\operatorname{Sp}(\widehat{f}_p) = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left[\operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_p\big|_{B_p}\right) + \operatorname{Sp}(f_{*p}) + \right.$$
$$\left. + \operatorname{Sp}\left(\widehat{f}_{p-1}\big|_{B_{p-1}}\right)\right] = \sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\operatorname{Sp}(f_{*p});$$

итак,

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}(\widehat{f}_p)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}(f_{*p}). \blacksquare \tag{8}$$

Следствие. *Число Лефшеца Λ_f над полем коэффициентов характеристики нуль, в частности, над полями $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, — целое число.*

Действительно, рассмотрев в $C_p(K; G)$ базис из ориентированных симплексов, получим, что $\operatorname{Sp}(\widehat{f}_p)$ — целое число, а следовательно, в силу (4) Λ_f — целое число. ■

Роль числа Λ_f раскрывает следующая

Теорема 2. *Пусть $f\colon |K|\to|K|$ — симплициальное отображение и $\Lambda_f\neq 0$. Тогда существует неподвижная точка отображения f, т. е. такая точка $x\in|K|$, что $f(x)=x$.*

Доказательство. В силv (2) из условия $\Lambda_f\neq 0$ следует $\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}(\widehat{f}_p)\neq 0$, поэтому найдется p, для которого $\operatorname{Sp}(\widehat{f}_p)\neq 0$. В базисе, состоящем из ориентированных симплексов, матрица эндоморфизма $\widehat{f}_p$ состоит из элементов, равных 0, $+1$ и -1. Поскольку $\operatorname{Sp}(\widehat{f}_p)\neq 0$, то найдется $\tau_i^p\in K$, для которого $f_p[\tau_i^p]=\pm[\tau_i^p]$. Следовательно, $f\big|_{\tau_i^p}$ — гомеоморфизм τ_i^p на себя, линейный в барицентрических координатах, откуда вытекает, что барицентр τ_i^p — неподвижная точка отображения f. ■

Обсудим важное дополнение к теореме 2. Пусть $f\colon |K^{(r)}|\to|K|$ — симплициальное отображение; конечно же, оно является непрерывным отображением $f\colon |K|\to|K|$, но не обязательно симплициальным. Введем следующую суперпозицию $\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*$ (см. § 3) цепных гомоморфизмов:

$$C_*(K^{(r)}; G)\xrightarrow{\widehat{f}_*}C_*(K; G)\xrightarrow{\Xi_*^{(r)}}C_*(K^{(r)}; G).$$

Цепной гомоморфизм $\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $(\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*)\colon H_*(K^{(r)}; G)\to H_*(K^{(r)}; G)$. Положим по определению

$$\Lambda_f=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}\,[(\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*)_{*p}]. \tag{9}$$

Упражнение 1°. Докажите, что

$$\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}(\Xi_p^{(r)}\widehat{f}_p)=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p \operatorname{Sp}\,[(\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*)_{*p}] \tag{10}$$

и что если $\Lambda_f \neq 0$, то существуют такие симплексы $\tau^p \in K^{(r)}$ и $\mu^p \in K$, что $\tau^p \subset \mu^p$ и $f(\tau^p) = \mu^p$.

Указание. Рассмотрите цепной гомоморфизм $\Xi_*^{(r)}\widehat{f}_*$ и проведите для него рассуждения теорем 1, 2.

Рассмотрим теперь пример, когда $f = 1_K$: $|K| \to |K|$ — тождественное отображение полиэдра $|K|$. Обозначим через β_p размерность векторного пространства $H_p(|K|; G)$ *, а через d_p — число p-мерных симплексов в симплициальном комплексе K. Очевидно, что

$$\mathrm{Sp}\,((1_K)_{*p}) = \beta_p, \quad \mathrm{Sp}\,((1_K)_p) + \mathrm{Sp}\,(1_{C_p(K;\,G)}) = d_p.$$

Формула (8) приобретает вид

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p d_p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_p. \tag{11}$$

Формула (11) устанавливает соотношение между геометрическими и гомологическими характеристиками полиэдра.

Определение 2. *Эйлеровой характеристикой компактного полиэдра* $|K|$ называется величина

$$\chi(|K|) \overset{\text{def}}{=} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p d_p = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \beta_p. \tag{12}$$

Ясно, что $\chi(|K|) = \Lambda_{1_{|K|}}$.

Упражнение 2°. Покажите, что справедливо равенство $\chi(S^n) = 1 + (-1)^n$.

2. Число Лефшеца непрерывного отображения. В предыдущих рассуждениях мы рассматривали лишь симплициальные отображения. Оказывается, что конструкцию числа Лефшеца и утверждение теоремы 2 можно обобщить и для произвольных непрерывных отображений. При этом мы будем опираться на теорему единственности теории гомологий (см. § 5). Воспользуемся методом аппроксимации непрерывного отображения полиэдра симплициальным отображением.

Теорема 3 (о симплициальной аппроксимации). *Пусть $X = |L|$ — компактный полиэдр, f: $X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такая триангуляция K полиэдра X, ее r-кратное барицентрическое подразделение $K^{(r)}$ и такое симплициальное отображение f_ε: $|K^{(r)}| \to |K|$, что*

---

* Если G — поле характеристики нуль, то β_p совпадает с p-мерным числом Бетти ρ_p пространства $|K|$ в смысле определения § 7.

для любой точки $x \in X$ *выполняется неравенство* $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$.

Доказательство. Выберем на полиэдре X триангуляцию K такую, что мелкость триангуляции K меньше ε. Будем называть звездой $\mathrm{St}\, a$ с вершиной $a \in K$ внутренность объединения всех симплексов, вершиной которых является a. Очевидно, звезды всех вершин K образуют покрытие X; покрытие образуют также и прообразы $\{f^{-1}(\mathrm{St}\, a^p)\}_{a^p \in K}$.

Поскольку X компактно, по лемме о лебеговом числе (см. теорему 13 § 13 гл. II) существует число $\nu > 0$ такое, что всякое множество диаметра $\delta < \nu$ содержится в одном из множеств $f^{-1}(\mathrm{St}\, a^p)$. Выберем такое r, чтобы мелкость $K^{(r)}$ была меньше $\nu/2$. Тогда отображение f переводит всякую звезду $\mathrm{St}\, b^q$, $b^q \in K^{(r)}$, в некоторую звезду $\mathrm{St}\, a^p$, $a^p \in K$. Определим симплициальное отображение f_ε: $|K^{(r)}| \to |K|$ равенствами

$$f_\varepsilon(b^q) = a^p. \tag{13}$$

Упражнение 3°. Проверьте, что формула (13) действительно определяет симплициальное отображение.

Вычислим теперь $\rho(f(x), f_\varepsilon(x))$ для $x \in X$. Если x — вершина $K^{(r)}$, то $f(\mathrm{St}\, x) \subset \mathrm{St}\, a^p$, $a^p \in K$, и, в частности, $f(x) \in \mathrm{St}\, a^p$, поэтому

$$\rho(f(x), a^p) = \rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon.$$

Если же $x \in \mathrm{Int}\,(b^0, \ldots, b^q)$, где $(b^0, \ldots, b^q) \in K^{(r)}$, то $x \in \in \bigcap_{i=0}^{q} \mathrm{St}\, b^i$. Имеем $f(x) \in \bigcap_{a^i = f_\varepsilon(b^i)} \mathrm{St}\, a^i$, откуда следует, что $f(x)$ лежит в симплексе, определяемом вершинами $a^i = f_\varepsilon(b^i)$. В силу того, что f_ε — симплициальное отображение, $f_\varepsilon(x)$ попадает в этот же симплекс из K. Таким образом, и в этом случае $\rho(f(x), f_\varepsilon(x)) < \varepsilon$. ∎

Упражнения. 4°. Покажите, что отображение f_ε гомотопно отображению f.

5°. Покажите, что для компактного полиэдра X существует положительное число $\alpha = \alpha(X)$ такое, что из неравенства $\rho(f(x), g(x)) < \alpha$, выполненного для всех $x \in X$ (f, g: $X \to X$ — непрерывные отображения), следует, что отображения f и g гомотопны.

В силу теоремы единственности теории гомологий имеет место изоморфизм $H_*(K; G) \simeq H_*^s(X; G)$ для компактного полиэдра $X = |K|$ и, следовательно, $\dim_G \oplus H_p^s(X, G) < \infty$. Поэтому можно дать следующее определение.

Определение 3. *Числом Лефшеца непрерывного отображения* f: $X \to X$ компактного полиэдра X в себя называется величина

$$\Lambda_f = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(f^s_{*p}), \tag{14}$$

где f^s_{*p}: $H^s_p(X; G) \to H^s_p(X; G)$.

В силу теоремы единственности теории гомологий для симплициального отображения f: $|K^{(r)}| \to |K|$, $r \geqslant 1$, справедливо равенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}(f^s_{*p}) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \operatorname{Sp}[(\Xi^r_* \hat{f}_*)_{*p}]. \tag{15}$$

Таким образом, определения 1 и 3 согласованы между собой.

Очевидно, что для гомотопных непрерывных отображений f, g: $X \to X$ имеем $\Lambda_f = \Lambda_g$. Поэтому число Лефшеца его симплициальной аппроксимации f_ε: $|K^{(r)}| \to |K|$, где K — триангуляция X. Можно было бы определить число Лефшеца непрерывного отображения как число Лефшеца его симплициальной аппроксимации, не используя сингулярной теории гомологий.

Следующая теорема является весьма полезной для различных приложений. В ее доказательстве мы используем теорему единственности теории гомологий.

Теорема 4 (Лефшец). *Пусть* f: $X \to X$ — *непрерывное отображение компактного полиэдра* $X = |L|$ *в себя и* $\Lambda_f \neq 0$. *Тогда существует неподвижная точка отображения* f, *т. е. такая точка* $x \in X$, *что* $f(x) = x$.

Доказательство. Предположим, что f не имеет неподвижных точек. Тогда найдется такое $\gamma > 0$, что $\rho(f(x), x) \geqslant \gamma$ для всех $x \in X$.

Рассмотрим триангуляцию K мелкости $\gamma/3$ полиэдра $X = |L|$ и симплициальную аппроксимацию $f_{\gamma/3}$: $K^{(r)} \to K$ отображения f. Для произвольных точек x, y любого симплекса $\tau^q \in K^{(r)}$ имеем неравенства $\rho(f_{\gamma/3}(x), y) \geqslant \rho(f(x), x) - \rho(x, y) - \rho(f_{\gamma/3}(x), f(x)) \geqslant \gamma/3$. Это означает, что включение $\tau^q \subset f_{\gamma/3}(\tau^q)$ невозможно. С другой стороны, в силу того, что $\Lambda_{f_{\gamma/3}} = \Lambda_f \neq 0$, найдется $\tau^q \in K^{(r)}$, для которого такое включение имеет место (см. упр. 1°, 4°). Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. ■

Упражнения. 6°. Распространите определение 2 и теорему 4 для компактного полиэдра X, гомеоморфного $|L|$.

7°. Проверьте, что в условиях теоремы Брауэра о неподвижной точке (см. § 4 гл. III) $\Lambda_f + 1$.

Указание. Постройте гомотопию к постоянному отображению.

3. Эйлерова характеристика многообразия и особые точки векторного поля. Остановимся теперь на применении полученных результатов к теории многообразий.

Теорема 5. *Пусть M^n — одновременно гладкое компактное многообразие и полиэдр *. Пусть $\chi(M^n) \neq 0$. Тогда для всякого векторного поля X на M^n существует точка $x^0 \in M^n$ такая, что $X(x^0) = 0$.*

Другими словами, на многообразии с ненулевой эйлеровой характеристикой не существует векторного поля без нулей.

Доказательство. Как замечено в § 8 гл. IV, для векторного поля X существует однопараметрическое семейство диффеоморфизмов $U(x, t)$ такое, что $U(x, 0) \equiv x$ и поле X является его инфинитезимальной образующей. При этом орбита $\bigcup\limits_t U(x, t)$ точки x называется интегральной кривой поля X в точке x. Легко видеть, что семейство диффеоморфизмов $U(x, t)$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$, осуществляет гомотопию между диффеоморфизмами

$$U_0 = 1_{M^n} \text{ и } U_{t_0}\colon M^n \to M^n, \text{ где } U_{t_0}(x) \overset{\text{def}}{=} U(x, t_0).$$

Следовательно, $\Lambda_{1_{M^n}} = \Lambda_{U_{t_0}}$, но $\Lambda_{1_{M^n}} = \chi(M^n)$; таким образом, для всякого t_0 получаем $\Lambda_{U_{t_0}} = \chi(M^n) \neq 0$. Поэтому (см. теорему 4) диффеоморфизм U_{t_0} имеет неподвижную точку (для каждого t_0).

Предположим теперь, что поле X нигде на M^n не обращается в нуль. Тогда в силу компактности M^n найдутся положительные α и β такие, что для всякого $x \in M^n$ в римановой метрике выполнено неравенство $\alpha \leqslant \langle X(x), X(x)\rangle \leqslant \beta$. Отсюда следует, что каждая точка $x \in M^n$ обязательно сдвигается диффеоморфизмом U_t вдоль интегральной кривой точки x при достаточно малом $t > 0$; это можно проверить, рассмотрев интегральную кривую в карте точки x. Последнее противоречит существованию неподвижной точки у диффеоморфизма U_t. ■

Следствие. *Если n четно, то на сфере S^n не существует векторного поля без нулей.*

Лемма 3. *На компактном гладком многообразии существует гладкое векторное поле, сумма индексов особых точек которого равна эйлеровой характеристике многообразия.*

Доказательство. Пусть M^n — компактное гладкое многообразие, $f\colon M^n \to \mathbb{R}$ — функция Морса (гладкая функция, все критические точки которой невырожденны). Пространство M^n имеет гомотопический тип клеточного комплекса K, число клеток размерности λ которого равно числу $m(\lambda)$ критических точек x_i^λ

* Отметим, что все гладкие компактные многообразия являются полиэдрами.

индекса λ функции f (см. § 11 гл. IV). Эйлерова характеристика $\chi(K)$ пространства K равна

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \dim_G \widetilde{C}_{\lambda}(K; G) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \dim_G H_{\lambda}^{s}(K; G)$$

(сравните с определением 2 и теоремой 1 этого параграфа). Таким образом,

$$\chi(M^n) = \chi(K) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} m(\lambda). \tag{16}$$

С другой стороны, в силу упражнения 10° § 6 индекс особой точки x_i^{λ} поля градиента равен $(-1)^{\lambda}$. Поэтому $\sum\limits_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} m(\lambda)$ есть сумма индексов особых точек поля градиента функции f. ■

Лемма 4. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особыми точками на компактном гладком многообразии не зависит от выбора векторного поля.*

Доказательство этой леммы дадим вкратце. Пусть M^n — связное многообразие, вложенное в $\mathbb{R}^m$, $m > n+1$; выберем достаточно малую «трубчатую» окрестность многообразия M^n в $\mathbb{R}^m$, т. е. такую окрестность $U(M^n)$, которая является пространством локально тривиального расслоения с базой M^n и слоем, гомеоморфным диску D^{m-n}. При этом отображение проекции расслоения r — гладкая ретракция, а многообразие M^n — сильный деформационный ретракт пространства $U(M^n)$. Интуитивно трубчатую окрестность многообразия M^n можно представить себе состоящей из дисков $D_{\varepsilon}^{m-n}(x)$ над каждой точкой $x \in M^n$, лежащих в $(m-n)$-мерных плоскостях, ортогональных к касательным плоскостям многообразия M^n. Множество $\overline{U(M^n)}$ является компактным полиэдром. Нетрудно показать, что $H_{m-1}^{s}(\partial U(M^n); \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$; образующая этой группы есть цикл, ограничивающий $U(M^n)$. Поэтому всякое отображение φ: $\partial U(M^n) \to S^{m-1}$ определяет элемент $\deg \varphi \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим некоторое поле Φ: $\overline{U(M^n)} \to \mathbb{R}^m$, не обращающееся в нуль на $\partial U(M^n)$. Сопоставим полю Φ нормированное отображение

$$\widetilde{\Phi}: \partial U(M^n) \to S^{m-1}, \quad \widetilde{\Phi}x = \Phi x / \|\Phi x\|.$$

Степень $\deg \widetilde{\Phi}$ отображения $\widetilde{\Phi}$ равняется сумме индексов точек поля Φ. Пусть теперь v — векторное поле на многообразии M^n. Определим поле w: $U(M^n) \to \mathbb{R}^m$ формулой $w(x) = v(rx) + x - r(x)$. Сумма индексов особых точек поля w совпадает с суммой индексов особых точек касательного поля v (с помощью теоремы Сарда общий случай можно свести к изучению гладких полей с невырожденными особыми точками и применить результат упражнения 7° § 6). Поле w на $\partial U(M^n)$ гомотопно без особых точек векторному полю $z(x) = x - r(x)$. Отсюда для нормированных отображений $\widetilde{w}$, $\widetilde{z}$ получим $\deg \widetilde{w} = \deg \widetilde{z}$, и, следовательно, $\deg \widetilde{w}$ не зависит от поля v. ■

Из лемм 3, 4 вытекает следующая теорема.

Теорема 6. *Сумма индексов особых точек векторного поля с изолированными особыми точками на гладком компактном многообразии равняется эйлеровой характеристике многообразия.*

Упражнение 8°. Пусть M^n — гладкое компактное многообразие и $\beta_p(M^n) \overset{\text{def}}{=} \dim_G H_p^{s}(M^n; G) \neq 0$. Покажите, что любая функция Морса на многообразии M^n имеет не менее $\beta_p(M^n)$ критических точек индекса p (неравенства Морса).

4. Число Лефшеца как сумма индексов неподвижных точек. Замечательным фактом в алгебраической топологии является теорема Лефшеца—Хопфа, связывающая число Лефшеца непрерывного отображения компактного полиэдра с характеристиками (индексами) неподвижных точек этого отображения. Дадим ряд основных определений.

Определение 4. Симплициальный комплекс K называется *размерно-однородным*, если существует такое число n, что всякий симплекс из K является гранью (возможно, несобственной) некоторого n-мерного симплекса из K; полиэдр $|K|$ размерно-однородного симплициального комплекса K называется размерно-однородным полиэдром, а число n называется размерностью полиэдра $|K|$.

Упражнения. 9°. Покажите, что полиэдр, являющийся одновременно и многообразием (с краем или без края), является размерно-однородным полиэдром.

10°. Приведите пример размерно-однородного полиэдра, не являющегося многообразием.

Пусть $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение размерно-однородного (размерности n) полиэдра $x \subset \mathbb{R}^M$ в себя ($n \leqslant M$).

Определение 5. Точку $x_0 \in X$ будем называть *регулярной неподвижной точкой отображения* f, если: 1) $f(x_0) = x_0$; 2) существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, гомеоморфная n-мерному диску D^n, в которой нет других неподвижных (т. е. таких, что $f(x) = x$) точек; 3) вышеупомянутый гомеоморфизм $h\colon U(x_0) \to D^n$ есть ограничение на $U(x_0)$ отображения $H\colon \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^n$, являющегося суперпозицией двух отображений: проекции $\mathbb{R}^M$ на некоторое n-мерное подпространство и афинного отображения, сдвигающего проекцию точки x_0 в начало координат и растягивающего образ окрестности $U(x_0)$ на D^n.

Если, например, $x_0 \in \tau^n \backslash \partial\tau^n \subset X$, то в качестве H можно взять суперпозицию таких трех отображений: переноса несущей n-плоскости симплекса τ^n в соответствующее n-мерное подпространство, сдвига образа точки в начало координат и растяжения в достаточно большое число раз так, чтобы $H\tau^n \supset D^n$. Тогда $U(x_0)$ можно выбрать как $H^{-1}(D^n) \cap \tau^n$.

Упражнения 11°. Пусть X — одновременно полиэдр (криволинейный) и гладкое подмногообразие в $\mathbb{R}^M$ (возможно, с краем), $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение с конечным числом неподвижных точек, не принадлежащих краю многообразия X. Покажите, что все неподвижные точки — регулярные изолированные.

Указание. Используйте проекцию на касательное пространство.

12°. Покажите, что если f имеет только регулярные изолированные неподвижные точки, а полиэдр X компактен, то число неподвижных точек конечно.

Очевидно, если X — полиэдр и многообразие с краем, то регулярные изолированные точки отображения f не могут принадлежать краю.

Пусть x_0 — регулярная неподвижная изолированная точка отображения f, h: $U(x_0) \to D^n$ — гомеоморфизм, указанный в определении 5. Рассмотрим гомеоморфную D^n окрестность $V(x_0)$ точки x_0, настолько малую, что $\overline{V(x_0)} \subset U(x_0)$ и $f(\overline{V(x_0)}) \subset U(x_0)$. В этом случае можно рассмотреть векторное поле $\Phi(x) = 1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1}$, заданное на $h(\overline{V(x_0)})$.

Определение 6. Индексом ind (f, x_0) *регулярной изолированной неподвижной точки* x_0 отображения f называется индекс ind $(0, \Phi)$ изолированной особой точки $0 \in \mathbb{R}^n$ векторного поля $\Phi(x) = 1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1}$.

Упражнение 13°. Покажите, что индекс ind (f, x_0) не зависит от выбора гомеоморфизма h и окрестности $V(x_0)$.

Указание. Выберите достаточно малую окрестность $W(x_0)$ и воспользуйтесь тем, что

$$1_{\mathbb{R}^n} - h_2 f h_2^{-1} = h_2 h_1^{-1}(1_{\mathbb{R}^n} - h_1 f h_1^{-1}) h_1 h_2^{-1}$$

на $h_2(\overline{W(x_0)})$, когда $h_2 h_1^{-1}$ — линейный оператор.

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 7 (Лефшец—Хопф). *Пусть f: $X \to X$ — непрерывное отображение компактного размерно-однородного полиэдра в себя с регулярными изолированными неподвижными точками $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_N$, причем f не имеет других неподвижных точек. Тогда выполняется равенство*

$$\Lambda_f = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(f, x_i), \tag{17}$$

где Λ_f — число Лефшеца отображения f, а ind (f, x_i) — *индекс неподвижной точки x_i отображения f.*

Доказательство этой теоремы потребует дополнительных определений.

Определение 7. *Открытым k-мерным симплексом* с вершинами $a^0, a^1, \ldots, a^k$ называется множество тех точек обычного (замкнутого) симплекса $(a^0, a^1, \ldots, a^k)$, у которых все барицентричекие координаты строго положительны.

Другими словами, в размерности $k = 0$ открытый симплекс совпадает с замкнутым симплексом, а в размерности $k > 0$ — это внутренность (относительно несущей k-плоскости) замкнутого симплекса. Легко видеть, что замыкание открытого симплекса есть замкнутый симплекс той же размерности.

Определение 8. *Полным симплициальным комплексом* будем называть совокупность открытых симплексов, замыкания которых составляют симплициальный комплекс в смысле определения 4 § 3 гл. V.

Определение 9. *Неполным симплициальным комплексом* будем называть произвольное подмножество (т. е. совокупность открытых симплексов) некоторого полного симплициального комплекса, если оно само не является полным симплициальным комплексом.

Таким образом, как в полном, так и неполном комплексах примыкание симплексов должно быть правильным, но в неполном комплексе, в отличие от полного, симплекс может входить в комплекс без некоторых своих граней. Как для полных, так и для неполных симплициальных комплексов вводится понятие подкомплекса (полного или неполного) аналогично определению 11 § 3 гл. V и понятие полиэдра аналогично определению 5 § 3 гл. V.

Заметим, что понятие подчиненности одного симплекса другому, т. е. такой ситуации, когда один симплекс является гранью другого, полностью переносится на открытые симплексы. Везде ниже термин «симплекс» будет обозначать открытый симплекс, термин «комплекс» — полный или неполный симплициальный комплекс (из открытых симплексов); термин «грань симплекса» — открытый симплекс, являющийся гранью (быть может, несобственной) данного открытого симплекса; термин «*звезда симплекса*» — симплициальный комплекс (обычно неполный), состоящий из всех тех симплексов, гранью которых является данный симплекс. Термин «триангуляция» будет обозначать комплекс (всегда полный), полиэдр которого совпадает с данным пространством (или гомеоморфен ему). Отметим, что полиэдр полного комплекса открытых симплексов совпадает с полиэдром комплекса, состоящего из их замыканий.

Определение 10. Пусть K — комплекс (полный или неполный). Его *комбинаторным замыканием* называется полный симплициальный комплекс $\overline{K}$, состоящий из всех симплексов из K и всех их граней. Очевидно, что комбинаторное замыкание комплекса — полный комплекс; если K — полный комплекс, то $\overline{K}=K$.

Определение 11. Пусть K — полный симплициальный комплекс, L — комплекс, $f\colon |K|\to|\overline{L}|$ — симплициальное отображение, отображающее каждый симплекс из K в некоторый симплекс из L. Будем в этом случае называть f *симплициальным отображением симплициальных комплексов* и обозначать $f\colon K\to L$.

Определение 12. Пусть L — неполный комплекс, M — комплекс, $\overline{g}\colon L\to M$ — симплициальное отображение. Будем называть ограничение $g=\overline{g}\big|_L\colon L\to M$ отображения $\overline{g}$ на L *симплициальным отображением неполного комплекса* L в комплекс M.

Далее нам понадобится конструкция так называемого *центрального подразбиения комплекса относительно данного подразбиения его подкомплекса.*

Пусть K^n — размерно-однородный комплекс размерности n, K^l — его l-мерный остов, т. е. подкомплекс, состоящий из всех симплексов из K^n размерности не выше l, $l\leqslant n$. Пусть $\widehat{K}^l$ — некоторое подразбиение $\widehat{K}^l$, т. е. комплекс, полиэдр которого совпадает с полиэдром $|K^l|$ и каждый симплекс из K^l есть объединение нескольких (возможно, одного) симплексов из $\widehat{K}^l$.

Мы строим центральное подразбиение $\widehat{K}^n$ индуктивно. Опишем шаг индукции, т. е. построение подразбиения $\widehat{K}^{m+1}$ его $(m+1)$-мерного остова K^{m+1}, в предположении, что подразбиение $\widehat{K}^m$ уже построено.

Пусть симплекс τ^{m+1} принадлежит K^{m+1}, точка b_0 — барицентр симплекса τ^{m+1}. Тогда полиэдр $|\{\partial\tau^{m+1}\}|$ границы $\partial\tau^{m+1}$ можно представить как объединение некоторых симплексов из $\widehat{K}^m$ и, возможно, еще некоторых граней симплекса τ^{m+1}, не вошедших в K^m, следовательно, и в $\overline{K}^m$. Множество точек открытых интервалов, соединяющих барицентр b_0 симплекса τ^{m+1} со всеми точками какого-нибудь (одного) из перечисленных граничных симплексов, есть также симплекс размерности на единицу больше, чем размерность этого граничного симплекса. Совокупность всех построенных таким образом внутри τ^{m+1} симплексов вместе с барицентром b_0 представляет собой подразбиение симплекса τ^{m+1}. Осуществив такие подразбиения всех симплексов размерности $m+1$ и объединив их с имеющимся подразбиением $\widehat{K}^m$, получим новое подразбиение $\widehat{K}^{m+1}$ остова K^{m+1}, которое назовем центральным относительно $\widehat{K}^m$. Шаг индукции закончен.

Теперь, отправляясь от $\widehat{K}^l$, мы построим подразбиения $\widehat{K}^{l+1}$, $\widehat{K}^{l+2}$, ..., $\widehat{K}^n$, т. е. в итоге построим подразбиение $\widehat{K}^n$ всего комплекса K^n. Это подразбиение $\widehat{K}^n$ будем называть также центральным относительно исходного подразбиения $\widehat{K}^l$ остова K^l.

Заметим, что барицентрическое подразбиение полного комплекса является центральным относительно его 0-мерного остова.

Определение 13. Пусть $\widehat{K}$ — подразбиение комплекса K, φ: $\widehat{K} \to K$ — симплициальное отображение. Симплекс $\tau^r \in K$ будем называть *неподвижным относительно* φ, если $\tau^r \subset \varphi(\tau^r)$.

Поскольку мы рассматриваем открытые симплексы, из определения 13 следует, что размерности симплексов в τ^r и $\varphi(\tau^r)$ совпадают (равны).

Определение 14. *Звездой* $\mathrm{St}(\tau^r)$ *симплекса* τ^r из комплекса K называется совокупность всех симплексов в K, гранью которых является симплекс τ^r (включая и его самого).

Перейдем к доказательству теоремы. Оно распадается на несколько этапов, некоторые из них мы изложим в виде лемм; в формулировках лемм предполагается выполнение условий теоремы.

Лемма 5 (о специальной симплициальной аппроксимации). *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существуют конечные последовательности* $\{K_{(m)}\}$

подразбиений данной триангуляции K и $\{f_{(m)}\}$ симплициальных отображений ($m = 0, 1, 2, \ldots, n$), обладающих следующими свойствами:

1) $K_{(m+1)}$ *— центральное подразбиение* $K_{(m)}$;

2) $f_{(m)}$: $K_{(m)} \to K$ *— симплициальное отображение, имеющее неподвижные симплексы лишь в размерности не ниже* m;

3) $\rho(f_{(m)}(x), f_{(m+1)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$ *для всех* $x \in X$ *и* $m = 0, 1, \ldots, n$;

4) $\rho(f(x), f_{(0)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$ *для всех* $x \in X$;

5) *звезды любых двух различных неподвижных относительно* $f_{(m)}$ *m-мерных симплексов в* $K_{(m)}$ *не пересекаются.*

В частности, каждое отображение $f_{(m)}$, $m = 0, 1, \ldots, n$, является симплициальной ε-аппроксимацией отображения f, и если f_n имеет неподвижные симплексы, то только в размерности n.

Доказательство леммы 5. По теореме о симплициальной аппроксимации найдется r-кратное барицентрическое подразделение $K_{(0)} = K^{(r)}$ мелкости $d < \varepsilon/2(n+1)$ комплекса K и симплициальное отображение $f_{(0)}$: $K_{(0)} \to K$ такие, что для всех $x \in X$ $\rho(f(x), f_{(0)}(x)) < \varepsilon/(n+1)$. Очевидно, при $r \geqslant 1$ для $K_{(0)} = K^{(r)}$ выполняется свойство 5. Таким образом, при $r \geqslant 1$ построено первое из отображений, требуемых в лемме.

Теперь проведем индукцию по m. Считая, что подразбиение $K_{(m)}$ и отображение $f_{(m)}$: $K_{(m)} \to K$, обладающие вышеуказанными свойствами, уже построены, построим подразбиение $K_{(m+1)}$ и отображение $f_{(m+1)}$: $K_{(m+1)} \to K$. Будем подразбивать только симплексы, входящие в звезды неподвижных относительно $f_{(m)}$ симплексов размерности m. Пусть τ^m — такой неподвижный симплекс, $\mathrm{St}(\tau^m)$ — его звезда в $K_{(m)}$. Сделаем центральное подразбиение τ^m относительно его границы (неподразбитой). Затем выполняем центральное подразбиение комплекса $\mathrm{St}\,(\tau^m)$ относительно только что выполненного подразбиения τ^m (заметим, что τ^m есть m-мерный остов комплекса $\mathrm{St}\,(\tau^m)$), и переходим к комбинаторному замыканию подразбитой звезды. Выполнив указанное подразбиение для всех звезд неподвижных симплексов и оставив без изменения остальные симплексы из $K_{(m)}$, мы и получим искомое подразбиение $K_{(m+1)}$.

Теперь построим симплициальное отображение $f_{(m+1)}$: $K_{(m+1)} \to K$. Положим $f_{(m+1)} = f_{(m)}$ вне подразбитых звезд неподвижных симплексов. Построим новое симплициальное отображение на каждой подразбитой звезде неподвижного относительно $f_{(m)}$ симплекса. Барицентр неподвижного m-мерного симплекса τ^m переведем в произвольно выбранную вершину звезды $\mathrm{St}(f_{(m)}(\tau^m))$ образа

$f_{(m)}(\tau^m)$, но не в вершину самого образа. И наоборот, барицентры симплексов подразбиения звезды $\mathrm{St}(\tau^m)$, не являющихся неподвижными, переводим в произвольно выбранные вершины образа $f_{(m)}(\tau^m)$. Проделав описанную конструкцию для всех звезд (непересекающихся!) неподвижных m-мерных симплексов, получаем искомое симплициальное отображение $f_{(m+1)}\colon K_{(m+1)} \to K$.

Упражнение 14°. Проверьте корректность конструкции симплициального отображения $f_{(m+1)}$.

Теперь покажем, что отображение $f_{(m+1)}$ не имеет неподвижных симплексов в размерностях ниже $m+1$. Заметим прежде всего, что всякий неподвижный относительно симплициального отображения $f_{(m)}\colon K_{(m)} \to K$ симплекс из $K_{(m)}$ лежит в симплексе той же размерности (его образе) в K, а также в симплексе той же размерности любого из предыдущих разбиений. Кроме того, из определения неподвижного симплекса и конструкции центрального подразбиения вытекает, что если вершина b есть барицентр симплекса τ^r размерности r исходного подразбиения K или же одного из последующих подразбиений $K_{(0)}, \ldots, K_{(m-1)}$ и эта же вершина b является вершиной неподвижного симплекса τ^l размерности l из K, то $l \geqslant r$. Действительно, в противном случае симплекс τ^l должен быть подмножеством l-мерного симплекса из K, поэтому барицентр b симплекса τ^r, $r > l$, из K или одного из подразбиений $K_{(0)}, \ldots, K_{(m-1)}$ не может быть вершиной неподвижного симплекса τ^l. Нужный факт докажем от противного. Предположим, что в $K_{(m+1)}$ есть неподвижный относительно $f_{(m+1)}$ симплекс τ^s размерности s, $s < m+1$. Из построения $f_{(m+1)}$ следует, что τ^s содержится в одном из комбинаторных замыканий подразбитых, как описано выше, звезд типа $\mathrm{St}\,(\tau^m)$, где τ^m — неподвижный симплекс отображения $f_{(m)}$. Ведь вне этих звезд $f_{(m+1)} = f_{(m)}$, а там $f_{(m)}$ не имеет неподвижных симплексов. Далее, симплексы из комбинаторного замыкания подразбитой $\mathrm{St}\,(\tau^m)$, не лежащие в τ^m, либо являются симплексами из $K_{(m)}$ и поэтому не являются неподвижными, либо имеют в качестве одной из вершин барицентр симплекса размерности, большей чем m, и поэтому не могут быть неподвижными симплексами размерности, меньшей или равной m. Таким образом, мы получим, что $\tau^s \subset \tau^m$, и, следовательно, $s = m$. Но это противоречит конструкции $f_{(m+1)}$, так как одна из вершин симплекса τ^s непременно барицентр подразбиваемого неподвижного симплекса τ^m, а этот барицентр переводится отображением $f_{(m+1)}$ вне множества вершин симплекса $f_{(m)}(\tau^m)$, в котором содержится τ^m, а значит, и τ^s. Таким образом, мы пришли к противоречию с предположением $s < m+1$ и тем самым доказали, что у отображения $f_{(m+1)}$ нет неподвижных симплексов в размерностях, меньших $m+1$.

Покажем теперь, что звезды двух неподвижных (относительно $f_{(m+1)}$) симплексов τ_1^{m+1} и τ_2^{m+1} из $K_{(m+1)}$ не пересекаются. В самом деле, если бы они пересекались, то это означало бы, что оба неподвижных симплекса есть $(m+1)$-мерные грани одного и того же симплекса τ^s большей размерности $s > m+1$ в $K_{(m+1)}$. Но $K_{(0)}$ — r-кратное $(r > 0)$ барицентрическое подразделение комплекса K, а $K_{(m+1)}$ является результатом последовательных центральных подразбиений исходя из $K_{(0)}$, поэтому в симплексе τ^s может быть в каждой размерности не более одной грани, являющейся неподвижным симплексом, а именно той грани, которая лежит в грани изначального s-мерного симплекса из K, измельчением которого получен симплекс τ^s. Поэтому звезды двух неподвижных симплексов не пересекаются.

Осталось проверить выполнение неравенства

$$\rho(f_{(m)}(x), f_{(m+1)}(x)) < \frac{\varepsilon}{n+1}. \tag{18}$$

Действительно, $f_{(m)}$ и $f_{(m+1)}$ различаются лишь на звездах неподвижных относительно $f_{(m)}$ симплексов. Так как мелкость триангуляции $K_{(0)}$ была зафиксирована: $d < \varepsilon/2(n+1)$, диаметр любой звезды в $K_{(m)}$ не превосходит $\varepsilon/(n+1)$. Далее, поскольку образы точек неподвижного симплекса τ^m при отображениях $f_{(m)}$ и $f_{(m+1)}$ не выходят за пределы замыкания звезды образа $f_{(m)}(\tau^m)$, то указанное неравенство (18) справедливо для любого x из звезды симплекса τ^m, а следовательно, и для любого $x \in X = |K|$, что и требовалось.

Итак, исходя из подразбиения $K_{(m)}$ и симплициального отображения $f_{(m)}$: $K_{(m)} \to K$ мы построили следующее подразбиение $K_{(m+1)}$ и симплициальное отображение $f_{(m+1)}$: $K_{(m+1)} \to K$, удовлетворяющее требованиям леммы. Шаг индукции закончен.

Тем самым мы получим конечную последовательность симплициальных отображений $f_{(m)}$: $K_{(m)} \to K$, $m = 0, 1, \ldots, n$, имеющих неподвижные симплексы в размерностях не ниже m для $f_{(m)}$, следовательно, последнее из этих отображений, $f_{(n)}$, имеет только n-мерные неподвижные симплексы. Из неравенства (18) и выбора $f_{(0)}$ получаем, что

$$\rho(f(x), f_{(n)}(x)) \leqslant \rho(f(x), f_{(0)}(x)) + \rho(f_{(0))}(x)\ f_1(x)) + \ldots$$
$$\ldots + \rho(f_{(n-1)}(x), f_{(n)}(x)) < (n+1)\cdot\frac{\varepsilon}{n+1},$$

т. е.

$$\rho(f(x), f_{(n)}(x)) < \varepsilon$$

для всех $x \in X = |K|$. Лемма 5 доказана.

Построенная в лемме 5 специальная симплициальная аппроксимация $f_{(n)}$, как будет показано, удобна для подсчета индексов неподвижных точек.

Лемма 6. *Пусть $f_{(n)}$: $K_{(n)} \to K$ — симплициальное отображение и симплекс τ^n неподвижен относительно $f_{(n)}$, т. е. $\tau^n \subset f_{(n)}(\tau^n) = T^n \in K$, $\tau^n \in K_{(n)}$. Пусть на границе τ^n относительно несущей n-плоскости нет неподвижных точек отображения $f_{(n)}$. Тогда существует единственная в τ^n регулярная изолированная неподвижная точка x^* такая, что $f_{(n)}(x^*) = x^*$ и*

$$\operatorname{ind}(f_{(n)}, x^*) = \pm 1 = \operatorname{sign}(\det(1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1}_{h(x^*)})), \tag{19}$$

где h — отображение, описанное в определении 5, индекс $h(x^*)$ указывает точку, в окрестности которой рассматривается отображение.

Доказательство. Так как $f_{(n)}$ — афинное отображение, сохраняющее размерность, то оно — гомеоморфизм и, следовательно, композиция $\overline{T}^n \xrightarrow{(f_{(n)})^{-1}} \overline{\tau}^n \subset \overline{T}^n$ есть отображение замкнутого симплекса в себя. Тогда по теореме Брауэра существует хотя бы одна неподвижная точка x^* этого отображения. Эта же точка является и неподвижной точкой отображения $f_{(n)}$. Покажем, что она единственна на τ^n. Действительно, предположим, что таких точек две: $y_1 \neq y_2$, $y_1, y_2 \in \tau^n$. Тогда все точки прямой, проходящей через y_1, y_2, т. е. точки вида $y = ty_1 + (1-t)y_2$, $t \in \mathbb{R}$, тоже будут неподвижными. Но тогда есть неподвижные точки и на границе τ^n (при некоторых t), что противоречит условию. Отсюда вытекает, что x^* — регулярная изолированная неподвижная точка и что $(1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1})_{h(x^*)}$ — невырожденное линейное отображение. Остается заметить, что в силу результата упражнения 6° § 6 гл. V и определения индекса неподвижной точки имеем

$$\operatorname{ind}(f_{(n)}, x^*) = \operatorname{ind}(h(x^*), (1_{\mathbb{R}^n} - hf_{(n)}h^{-1})_{h(x^*)}) =$$
$$= \operatorname{sign}(\det(1_{\mathbb{R}^n} - hfh^{-1})_{h(x^*)}) = \pm 1.$$

Доказательство леммы 6 закончено.

Построенное в лемме 5 симплициальное отображение $f_{(n)}$ обладает замечательным свойством: ни один из неподвижных симплексов τ_i^n в подразбиении $K_{(n)}$ не имеет неподвижных точек на своей границе $\partial\tau_i^n$. В самом деле, в противном случае существовал бы неподвижный симплекс размерности меньшей, чем n, что противоречит построению $f_{(n)}$. Тогда в силу леммы 6 симплициальное отображение $f_{(n)}$ обладает еще более замечательным свойством: внутри каждого ее неподвижного симплекса τ_i^n, $i=1, \ldots, N$, размерности n существует единственная (в этом симплексе) регулярная изолированная неподвижная относительно $f_{(m)}$ точка x_i, причем ее индекс равен

$$\operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i) = \operatorname{sign}\left(\det(1_{\mathbb{R}^n} - h_i f_{(n)} h_i^{-1})_{h_i(x_i)}\right) = \pm 1,$$
$$i=1, \ldots, N. \quad (20)$$

Выясним теперь, как связаны эти индексы с числом Лефшеца симплициального отображения $f_{(n)}$.

Лемма 7. *Для числа Лефшеца $\Lambda_{f_{(n)}}$ специальной симплициальной аппроксимации $f_{(n)}$, построенной в лемме 5, верна формула*

$$\Lambda_{f_{(n)}} = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i), \quad (21)$$

где $x_1, \ldots, x_N$ — неподвижные точки отображения $f_{(n)}$.

Доказательство. С учетом определения числа Лефшеца и равенства (15) равенство (21) превращается в равенство

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \operatorname{Sp}(\Xi_p (f_{(n)})_p) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i), \quad (22)$$

где $(f_{(n)})_p$: $C_p(K_{(n)}; \mathbb{R}) \to C_p(K; \mathbb{R})$ — гомоморфизм, индуцированный отображением $f_{(n)}$, а Ξ_p: $C_p(K; \mathbb{R}) \to C_p(K_{(n)}; \mathbb{R})$ — цепной гомоморфизм, сопоставляющий ориентированному p-мерному симплексу $\tau^p \in K$ сумму согласованно ориентированных p-мерных симплексов $s_i^p \in K_{(n)}$, на которые подразбит симплекс τ^p (здесь мы вправе рассматривать замкнутые симплексы). Согласование ориентаций вводится аналогично тому, как это сделано для барицентрического подразделения в п. 4 § 3 гл. V. Ясно, что $\operatorname{Sp}(\Xi_p(f_{(n)})_p) = 0$ при $p < n$, поскольку при $p < n$ нет неподвижных симплексов у отображения $f_{(n)}$. Остается показать, что

$$(-1)^n \operatorname{Sp}(\Xi_n (f_{(n)})_n) = \sum_{i=1}^{N} \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i). \quad (23)$$

След цепного гомоморфизма равен сумме коэффициентов a_{jj} при всех n-мерных симплексах τ_j^n (элементах базиса) в матрице этого цепного гомоморфизма, рассматриваемого как линейный оператор. Выясним, что представляют собой эти коэффициенты. Из построения гомоморфизмов Ξ_* и $(f_{(n)})_n$ видно, что коэффициент при τ_j^n отличен от 0 лишь тогда, когда τ_j^n — неподвижный симплекс отображения

$f_{(n)}$, т. е. $\tau_j^n \subset T^n = f_{(n)}(\tau_j^n)$. В этом случае коэффициент при неподвижном симплексе τ_i^n может быть равен лишь ± 1, в зависимости от того, согласуется или нет ориентация образа $f_{(n)}(\tau_i^n) = T^n$ с ориентацией симплекса T^n в комплексе K. Перейдем от аффинного отображения $f_{(n)}$ несущей n-плоскости симплекса τ_i^n к линейному отображению $h_i f_{(n)} h_i^{-1}$. Отождествляя n-плоскость с подпространством, а подпространство с $\mathbb{R}^n$, мы можем записать $h_i f_{(n)} h_i^{-1}$ в виде F: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $F(y) = f_{(n)}(x_i + y) - x_i$. Тогда ясно, что искомый коэффициент при τ_i^n равен sign det F, поскольку именно знак определителя отвечает за сохранение ориентации базиса линейного пространства $\mathbb{R}^n$, а значит, и за сохранение ориентации симплекса. Осталось показать, что

$$\operatorname{sign} \det F = (-1)^n \operatorname{ind} (f_{(n)}, x_i). \tag{24}$$

Заметим, что sign det F есть индекс изолированной особой точки x_i векторного поля $f_{(n)}(x) - x_i$, заданного на замыкании $\bar{\tau}_i^n$ симплекса τ_i^n. Построим гомотопию, соединяющую это векторное поле с полем $f_{(n)}(x) - x = (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)$ на $\bar{\tau}_i^n$ без нулей на $\partial\tau^n$.

Сначала «растянем» векторное поле $f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n}$, «оттянув» образы $f_{(n)}(x)$ от границы симплекса τ_i^n. Это делает гомотопия

$$\Phi_t(x) = \frac{f_{(n)}(x) - x}{\|f_{(n)}(x) - x\|} \left(\|f_{(n)}(x) - x\| + t \cdot d \cdot w(x)\right), \tag{25}$$

где t — параметр гомотопии, $0 \leqslant t \leqslant 1$, d — диаметр симплекса τ_i^n, $w(x)$ — непрерывная функция на $\bar{\tau}_i^n$ такая, что $w(x_i) = 0$ и $w(x) = 1$ при $x \in \partial\tau_i^n$. Заметим, что $\Phi_0(x) = f_{(n)}(x) - x$, $\Phi_1(x)$ — векторное поле на $\bar{\tau}_i^n$, у которого векторы на границе направлены вовне τ_i^n, т. е. их концы лежат вне τ_i^n. Поэтому можно провести следующие две линейные гомотопии. Первая из них,

$$G_s(x) = \Phi_1(x) + s(x - x_i), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1,$$

связывает поле $G_0(x) = \Phi_1(x)$ с полем

$$G_1(x) = \Phi_1(x) + x - x_i =$$
$$= (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x) + \frac{d \cdot w(x)}{\|(f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\|} \cdot (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x) + x - x_i.$$

Вторая гомотопия,

$$H_\gamma(x) = G_1(x) - \gamma\left[x - x_i + \frac{d \cdot w(x)}{\|f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\|}(f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)\right], \; 0 \leqslant \gamma \leqslant 1,$$

связывает поле $H_0(x) = G_1(x)$ с полем $H_1(x) = f_{(n)}(x) - x_i$.

Таким образом, гомотопии Φ_t, G_s, H_γ, примененные последовательно, связывают векторное поле $f_{(n)}(x) - x = (f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n})(x)$ с векторным полем $f_{(n)}(x) - x_i$.

Упражнение 15°. Проверьте, что все эти гомотопии проходят без нулей на границе $\partial\tau_i^n$ симплекса τ_i^n.

Получаем следующую цепочку равенств:

$$\operatorname{sign}\det F = \operatorname{ind}(x_i, f_{(n)}(x) - x_i) = \operatorname{ind}(x_i, f_{(n)} - 1_{\mathbb{R}^n}) =$$
$$= (-1)^n\cdot\operatorname{ind}(x_i, 1_{\mathbb{R}^n} - f_{(n)}) = (-1)^n\cdot\operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i),$$

дающую нам равенство (24). Первое из этих равенств объяснено выше, второе дают построенные гомотопии, третье вытекает из результатов упражнения, четвертое равенство следует из определения индекса неподвижной точки. Суммируя равенство (2) по всем неподвижным точкам x_i, получаем, что

$$\operatorname{Sp}(\Xi_n(f_{(n)})_n) = \sum_{i=1}^{N}(-1)^n\operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i), \tag{26}$$

откуда немедленно следуют равенства (23), (22), (21). Лемма 7 доказана.

Выясним теперь, насколько малым следует взять $\varepsilon > 0$ при построении аппроксимации $f_{(n)}$ отображения f, чтобы были равны не только числа Лефшеца Λ_f и $\Lambda_{f_{(n)}}$, но и суммы индексов их неподвижных точек.

Если отображение f имеет только регулярные изолированные неподвижные точки $y_1, \ldots, y_Q$, то исходную триангуляцию K полиэдра X можно выбрать с самого начала так, что каждая точка y_i находится внутри своего n-мерного симплекса τ_j^n, $j = 1, \ldots, Q$. Подразбиение $K_{(0)}$ выберем так, чтобы все точки y_j находились также внутри n-мерных симплексов $s_j^n \subset \tau_j^n$, настолько малых, что $f(s_j^n) \subset \tau_j^n$. Этого можно добиться малым «шевелением» достаточно мелкого барицентрического подразделения исходной триангуляции K. Положим теперь

$$\alpha_j = \min_{x\in\partial S_j^n}\rho(x, f(x)), \qquad \partial = \min_{x\in\overline{X}\setminus\bigcup_{j=1}^{Q}s_j^n}\rho(x, f(x)).$$

Заметим, что $0 < \delta \leqslant \min(\alpha_1, \ldots, \alpha_Q)$. Теперь возьмем $\varepsilon < \delta$ и построим, как в лемме 5, по ε аппроксимацию $f_{(n)}$. Поскольку $\varepsilon < \delta$, отображение $f_{(n)}$ не имеет неподвижных точек вне $\bigcup_{j=1}^{Q} s_j^n$. Далее, поскольку $\varepsilon < \alpha_j$, характеристики векторных полей $(1_{\mathbb{R}^n} - h_j f h_j^{-1})$, $(1_{\mathbb{R}^n} - h_j f_{(n)} h_j)$ совпадают на границах ∂s_j^n симплексов s_j^n. Это следует из теоремы Руше, которую мы предлагаем вам доказать в качестве упражнения.

Упражнение 16°. Докажите следующее утверждение, известное как теорема Руше. Пусть векторные поля φ и ψ, заданные на множестве $B \subset \mathbb{R}^n$, таковы, что $\|\varphi(x)\| > 0$ и $\|\varphi(x) - \psi(x)\| < \|\varphi(x)\|$ при всех $x \in B$. Тогда векторные поля φ и ψ гомотопны без нулевых векторов на B.

В силу выбора s_j^n и построения $f_{(n)}$ получаем $\operatorname{ind}(f, y_l) = \operatorname{ind}(f, x_i)$ для $j = 1, \ldots, Q$ и

$$\sum_{j=1}^{Q} \operatorname{ind}(f, y_j) = \sum_{j=1}^{Q} \operatorname{ind}(f_{(n)}, x_i). \tag{27}$$

Как было указано выше (упражнение 5°), достаточно близкие отображения гомотопны, поэтому при достаточно малом ε все ε-аппроксимации гомотопны исходному отображению, так что $\Lambda_f = \Lambda_{f_{(n)}}$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Утверждение теоремы полностью доказано для полиэдра $|K|$ симплициального комплекса. На случай «криволинейного» полиэдра X, гомеоморфного $|K|$, доказательство переносится очевидным образом. Теорема Лефшеца—Хопфа доказана. ■

В заключение осталось заметить, что для произвольного непрерывного отображения f компактного полиэдра X в себя, не обязательно имеющего только регулярные изолированные неподвижные точки, также можно применять формулу (17), если под суммой индексов его неподвижных точек понимать сумму индексов регулярных изолированных неподвижных точек специальной симплициальной аппроксимации отображения f.

ОБЗОР РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Современные монографии, дающие систематическое изложение теории гомологий и ее приложений: [22, 23, 42, 59, 63, 65, 78, 79].

По отдельным вопросам полезней будет также следующая литература.

Возникновение и развитие теории гомологий — [61].

Гомологии цепных комплексов — [41].

Симплициальная теория гомологий — [54].

Сингулярная теория гомологий — [34, 71, 74].

Аксиоматический подход к теории гомологий — [70].

Теория гомологий Александрова—Чеха — [71].

Число Лефшеца, степень отображения, характеристика векторного поля и индекс особой точки на основе симплициальной теории гомологий — [1, 54], см. также [22].

Клеточная теория гомологий — [74].

Триангуляция гладких многообразий — [45].

Сумма индексов особых точек векторного поля на многообразии — [44, 46].

Задачник по теории гомологий — [48, 52].