Предисловие

Роль топологии — дисциплины, введенной в учебные планы математических факультетов в середине 70-х годов, — в системе университетского образования, на наш взгляд, весьма значительна. Без привлечения топологических понятий вряд ли возможно построить курсы математического анализа, дифференциальных уравнений, дифференциальной геометрии, механики, функционального анализа, отвечающие современному состоянию этих математических дисциплин. Необходимо уже на младших курсах знакомить студентов с топологическими методами исследования.

Опыт чтения топологии для младших курсов показал, что нужна книга, доступная студентам с минимальной математической подготовкой (общие сведения по теории множеств, курс общей алгебры, начала линейной алгебры и математического анализа), вводящая читателя в круг основных понятий современной топологии и содержащая определенный запас топологических фактов и методов.

Данное пособие — один из возможных вариантов начального курса топологии, на выборе которого, безусловно, отразились и личные вкусы авторов, и их опыт педагогической и исследовательской работы. В нем излагаются разделы топологии, наиболее тесно связанные с фундаментальными общематематическими курсами и приложениями; учебный материал позволяет лектору выбирать различные варианты построения курса топологии и вести факультативные занятия.

Отметим ряд методических особенностей нашего пособия. Изложение общей топологии мы стремились вести активно, вводя конструктивные элементы, например, связанные с понятием факторпространства. По этой причине оно вводится гораздо ранее других общетопологических понятий и дает возможность сразу изучать важные примеры многообразий как топологические пространства (двумерные поверхности, проективные пространства, пространства орбит и др.), на которых позднее (гл. IV) появляются и гладкие структуры. Теория двумерных поверхностей излагается не в одном месте, а рассредоточивается по гл. I, II, III в соответствии с развитием основных понятий топологии. В теории гомотопий вводится понятие категории и функтора и объясняется идея алгебраизации топологических задач. Функториальная точка зрения обеспечивает единство изложений гомотопической и гомологической теорий и позволяет естественно завершить описание различных теорий гомологий аксиоматикой Стинрода—Эйленберга, компенсируя в некоторой степени отсутствие в пособии доказательства инвариантности симплициальной теории гомологий. Далее, вычислительная техника в гомотопиях (гл. III) ограничивается вычислением фундаментальных групп окружности и замкнутых поверхностей, однако равенство $\pi_n(S^n)\simeq\mathbb{Z}$, $n\geqslant 2$, (и ряд других) сообщается без доказательства и служит для пропедевтического введения степени отображения сфер и характеристики векторного поля (с выводом теоремы Брауэра и основной теоремы алгебры); в гомологиях (гл. V) техника доведена до уровня точных последовательностей, в частности, вычисляются группы $H_k(S^n, \mathbb{Z})$, $H_k(\mathbb{R}P^n, \mathbb{Z})$, $H_k(\mathbb{C}P^n, \mathbb{Z})$ и доказываются теоремы Брауэра, Лефшеца и Хопфа о неподвижных точках. Хотя все подготовлено, чтобы развить технику дальше, мы сознательно останавливаемся на этом уровне, имея в виду целевое назначение данного пособия.

Понятие гладкого многообразия, гладкой структуры, касательного расслоения (гл. IV) разрабатывались как можно более детально, обращалось внимание на связи с механикой, динамическими системами, теорией Морса. Нам представляется, что уже на раннем этапе изучения теории гомологий необходимо знакомиться с рядом ее вариантов (сингулярная, симплициальная, клеточная), так как даже в простейших приложениях читатель может встретиться с любым из них; в гл. V излагаются указанные выше варианты.

Мы получили много откликов на первое издание этой книги и признательны их авторам за ряд полезных предложений и критических замечаний. Многие из них учтены при подготовке второго издания. Кроме того, нами введен новый материал и расширен прежний (добавлен материал по теории гладких многообразий, теории накрытий, теории неподвижных точек; вводная глава дополнена параграфом о некоторых приложениях топологии в физике; расширено изложение гомологий и когомологий, переработан и несколько сокращен раздел общей топологии).

Читателю — студенту I—II курсов — следует иметь в виду, что в отдельных параграфах (§ 4 гл. I; § 5 гл. II; § 9 гл. IV) используются элементарные факты теории функций комплексного переменного; при первом чтении можно опустить эти места без ущерба для понимания дальнейшего. Упражнения в тексте параграфа часто заменяют простое рассуждение и имеют целью активизировать работу читателя. Петитом набран дополнительный к основному материал. Мы фиксируем окончание доказательства теорем знаком ■; в случае необходимости отделить текст примера от последующего текста используется знак ◆. При ссылках на предыдущий материал в пределах одной главы мы не указываем номер главы.

Отметим, что в основу книги положены лекции, прочитанные Ю. Г. Борисовичем студентам математического факультета Воронежского университета. Их текст, составленный Н. М. Близняковым и Т. Н. Фоменко, был затем существенно и неоднократно переработан с привлечением дополнительного материала лектором совместно с Н. М. Близняковым (гл. IV), Я. А. Израилевичем (гл. IV, V), Т. Н. Фоменко (гл. II, III, V). Рисунки к тексту выполнены Т. Н. Фоменко, иллюстрации на обложке и перед главами выполнены по просьбе авторов академиком РАН А. Т. Фоменко, которому авторы выражают глубокую благодарность.

В заключение нам хотелось бы выразить искреннюю благодарность академикам Д. В. Аносову, С. П. Новикову, А. Т. Фоменко, а также профессорам С. В. Матвееву, А. С. Мищенко, М. М. Постникову, Е. Г. Скляренко, Ю. П. Соловьёву, Д. Б. Фуксу, А. В. Чернавскому, способствовавшим улучшению книги. Авторы благодарят коллектив сотрудников и аспирантов кафедры алгебры и топологических методов анализа ВГУ за полезные обсуждения и замечания. Особую признательность авторы выражают Г. Н. Борисович за техническую помощь в подготовке рукописи и за постоянную поддержку и внимание.

Авторы