определению среднего значения любой величины, есть

$$\bar{t} = \int_0^\infty t f(t)\, dt,$$

где $f(t)$ — нормированная к единице вероятность рассматриваемой величине иметь значение t. Подставляя сюда для $f(t)$ выражение (2.2), мы находим

$$\bar{t} = \tau. \tag{2.4}$$

Таким образом, постоянная τ есть среднее время свободного пробега.

Выше мы считали τ постоянным. Однако это, вообще говоря, неверно. Дело в том, что, говоря о соударениях электронов, мы имеем в виду процессы изменения их импульса, которые возникают вследствие силового взаимодействия электронов с различными нерегулярностями решетки (вызванными тепловым движением, примесными атомами и структурными дефектами). Но результаты этого взаимодействия зависят от состояния движения электрона и, в частности, от его полной энергии. Поэтому τ может быть разным для разных электронов. Одно из простейших предположений заключается в том, что τ зависит только от полной энергии электрона.

Когда мы рассматривали выше распределение времен пробега у совокупности электронов, мы молчаливо предполагали, что либо τ не зависит от энергии, либо энергии всех электронов близки по величине, так что τ можно считать постоянным. Точно так же, применяя распределение (2.2) к одному электрону, мы должны считать, что полная энергия электрона существенно не меняется при его движении.

Для отдельного электрона это предположение во многих случаях справедливо. Это имеет место, если электрические поля не слишком сильны, так что энергия, приобретаемая электроном за один свободный пробег в его упорядоченном движении, мала по сравнению с энергией теплового движения, и если эта энергия не накапливается, а передается решетке при соударениях. При нахождении же среднего для всей совокупности электронов $\langle\tau\rangle$ нужно учитывать, что электроны в твердом теле могут иметь весьма различную энергию, и, вообще говоря, нужно считать τ зависящим от энергии. Величину $\langle\tau\rangle \equiv \tau_p$ называют временем релаксации импульса. Более подробно смысл этой величины будет рассмотрен в гл. XIII.

§ 3. Элементарная теория гальваномагнитных явлений

Тензор электропроводности в магнитном поле. Пользуясь понятием времени релаксации, можно вычислить тензор электропроводности в магнитном поле $\sigma_{\alpha\beta}$, который, как мы видели, определяет все гальваномагнитные эффекты. Для этого мы сначала рассмотрим движение одной частицы между двумя последовательными соударениями, а затем усредним полученный результат по всем свободным пробегам. Это позволит нам найти скорость дрейфа $\langle \mathbf{v} \rangle$, а следовательно, и плотность тока, откуда непосредственно определяются и компоненты тензора $\sigma_{\alpha\beta}$.

Положим, что магнитная индукция $\mathcal{B}$ направлена вдоль оси Z прямоугольной системы координат. Тогда составляющие силы Лоренца, действующей на частицу, равны

$$F_x = e\mathcal{E}_x + \frac{1}{c} e\dot{y}\mathcal{B}, \quad F_y = e\mathcal{E}_y - \frac{1}{c} e\dot{x}\mathcal{B}, \quad F_z = e\mathcal{E}_z,$$

где e — заряд частицы, а $\dot{x}$ и $\dot{y}$ — составляющие скорости по осям X и Y. Уравнения движения между последовательными соударениями имеют вид

$$\ddot{x} = \frac{e}{m}\mathcal{E}_x + \omega_c\dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{e}{m}\mathcal{E}_y - \omega_c\dot{x}, \quad \ddot{z} = \frac{c}{m}\mathcal{E}_z, \tag{3.1}$$

где через ω_c обозначена «циклотронная» частота:

$$\omega_c = \frac{e\mathcal{B}}{cm}, \tag{3.2}$$

т. е. частота равномерного вращения частицы в магнитном поле, которая не зависит от радиуса орбиты и энергии частицы.

В качестве начальных условий, как и раньше, примем:

$$t = 0: \quad x = y = z = \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0. \tag{3.3}$$

Решение последнего из уравнений (3.1) получается сразу:

$$z = \frac{e}{m}\mathcal{E}_z t^2. \tag{3.4}$$

Так как при выбранном направлении $\mathcal{B}$ сила Лоренца лежит в плоскости XY, то движение вдоль Z не изменяется в магнитном поле. Решения же первых двух уравнений (3.1), удовлетворяющие граничным условиям, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, имеют вид

$$\begin{aligned} x - a &= -a\cos\omega_c t - b\sin\omega_c t + b\omega_c t, \\ y - b &= -b\cos\omega_c t + a\sin\omega_c t - a\omega_c t. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Здесь a и b — постоянные размерности длины, равные

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\omega_c^2}\frac{e}{m}\mathcal{E}_x, \\ b &= \frac{1}{\omega_c^2}\frac{e}{m}\mathcal{E}_y. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Это движение имеет простой характер. Последние слагаемые в (3.5) описывают переносное движение в плоскости XY с постоянной скоростью v_t. Ее составляющие по осям равны

$$v_{tx} = b\omega_c = \frac{\mathcal{E}_y}{\mathcal{B}}, \quad v_{ty} = -a\omega_c = -\frac{\mathcal{E}_x}{\mathcal{B}}. \quad (3.7)$$

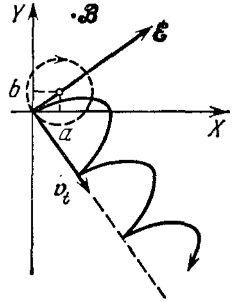

Рис. 1.7. Движение заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях.

При этом скалярное произведение $(\mathbf{v}_t\mathcal{E}) = v_{tx}\mathcal{E}_x + v_{ty}\mathcal{E}_y = 0$, а следовательно, $\mathbf{v}_t$ перпендикулярно $\mathcal{E}$ (и перпендикулярно $\mathcal{B}$). Остальные слагаемые в (3.5) описывают равномерное вращение с частотой ω_c по окружности $(x-a)^2+(y-b)^2 = a^2+b^2$, центр которой расположен в точке (a, b). В результате сложения обоих этих движений частица движется по циклоиде, изображенной на рис. 1.7.

Умножая x, y и z на вероятность (2.2) частице иметь время свободного пробега t и интегрируя по t от 0 до ∞, мы получим средние перемещения $\bar{x}$, $\bar{y}$ и $\bar{z}$ для одной частицы, а деля полученные средние на τ, найдем средние скорости $\bar{v}_x$, $\bar{v}_y$, $\bar{v}_z$. Учитывая, что

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cdot \sin\omega_c t \cdot \frac{dt}{\tau} = \frac{\omega_c\tau}{1+\omega_c^2\tau^2},$$

$$\int_0^\infty \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\cdot \cos\omega_c t \cdot \frac{dt}{\tau} = \frac{1}{1+\omega_c^2\tau^2},$$

мы получаем

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{e}{m}\mathcal{E}_x\frac{\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} + \omega_c\frac{e}{m}\mathcal{E}_y\frac{\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2}, \\ \bar{v}_y &= \frac{e}{m}\mathcal{E}_y\frac{\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} - \omega_c\frac{e}{m}\mathcal{E}_x\frac{\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2}, \\ \bar{v}_z &= \frac{e}{m}\mathcal{E}_z\tau. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Чтобы получить дрейфовые скорости, эти значения нужно еще усреднить по всем частицам. Введем для сокращения записи следующие обозначения:

$$\zeta_1 = \left\langle\frac{\tau}{1+\omega_c^2\tau^2}\right\rangle, \qquad \zeta_2 = \left\langle\frac{\tau^2}{1+\omega_c^2\tau^2}\right\rangle, \quad (3.9)$$

где $\langle\ldots\rangle$, как и раньше, обозначает усреднение по всем частицам. Тогда для плотности тока получаем

$$\begin{aligned} j_x &= en\langle v_x\rangle = \frac{e^2n}{m}(\zeta_1\mathscr{E}_x + \omega_c\zeta_2\mathscr{E}_y),\\ j_y &= en\langle v_y\rangle = \frac{e^2n}{m}(-\omega_c\zeta_2\mathscr{E}_x + \zeta_1\mathscr{E}_y),\\ j_z &= en\langle v_z\rangle = \frac{e^2n}{m}\langle\tau\rangle\,\mathscr{E}_z. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Сравнивая эти выражения с соотношениями (1.5), находим компоненты тензора электропроводности в виде

$$\begin{aligned} &\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \frac{e^2n}{m}\zeta_1, \qquad \sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = \omega_c\frac{e^2n}{m}\zeta_2,\\ &\sigma_{zz} = \frac{e^2n}{m}\langle\tau\rangle, \qquad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = 0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Если магнитного поля нет, то $\omega_c = 0$ и недиагональные компоненты $\sigma_{\alpha\beta}$ равны нулю. При этом $\zeta_1 = \langle\tau\rangle$ и все диагональные компоненты становятся равными. Электропроводность превращается в скалярную величину

$$\sigma = \frac{e^2n}{m}\langle\tau\rangle. \tag{3.12}$$

Подвижность носителей заряда в отсутствие магнитного поля равна

$$\mu = \frac{e}{m}\langle\tau\rangle. \tag{3.13}$$

Она определяется величиной (и знаком) удельного заряда и средним временем релаксации.

Для получения численных значений $\sigma_{\alpha\beta}$ необходимо провести усреднение в соответствии с формулами (3.9) для ζ_1 и ζ_2. Для этого надо явно определить правило усреднения, обозначаемого символом $\langle\ldots\rangle$. К этому мы вернемся в гл. XIII, а сейчас ограничимся результатами, которые не требуют фактического проведения указанного усреднения.

б. *Угол Холла и постоянная Холла.* Подставляя найденные значения (3.11) для σ_{xx} и σ_{xy} в формулу (1.8), находим для угла Холла выражение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}} = \omega_c\frac{\zeta_2}{\zeta_1}.$$

Или, подставляя для ω_c ее значение (3.2),

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{c}\mu_H\mathscr{B}, \tag{3.14}$$

где введено обозначение

$$\mu_H = \frac{e}{m}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}. \tag{3.15}$$

Так как отношение ζ_2/ζ_1 имеет размерность времени, то μ_H имеет размерность подвижности. Однако она, вообще говоря, не равна дрейфовой подвижности μ, выражаемой формулой (3.13). Подвижность μ_H, определяемая из эффекта Холла, получила название холловской подвижности.

В слабых магнитных полях, определяемых условием

$$\operatorname{tg}\varphi \simeq \omega_c\tau \leqslant 1, \tag{3.16}$$

мы имеем $\zeta_1 \simeq \langle\tau\rangle$, $\zeta_2 \simeq \langle\tau^2\rangle$. В этом случае

$$\mu_H = \frac{e}{m}\frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle}. \tag{3.15a}$$

Постоянная Холла получается непосредственно из формулы (1.9). Ограничиваясь случаем не очень сильных магнитных полей, удовлетворяющих условию (3.16), мы имеем $\sigma_{xy} \leqslant \sigma_{xx}$ и, кроме того, $\sigma_{xx} \simeq \sigma = en\mu$. Тогда

$$R \simeq \frac{\sigma_{xy}}{\mathscr{B}\sigma^2} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\mathscr{B}\sigma} = \gamma\frac{1}{cen}, \tag{3.17}$$

где $\gamma = \mu_H/\mu$. Отсюда видно, что при известном «холловском факторе» γ из измерений постоянной Холла можно определить концентрацию носителей заряда n. Произведение же постоянной Холла на удельную электропроводность равно

$$R\sigma = \frac{1}{c}\,\mu_H \tag{3.18}$$

и дает холловскую подвижность μ_H.

Остановимся теперь на факторе γ. Для слабых магнитных полей из формул (3.15а) и (3.13) имеем

$$\gamma = \frac{\langle\tau^2\rangle}{\langle\tau\rangle^2}. \tag{3.19}$$

Так как среднее значение квадрата всегда больше (или равно) квадрата среднего значения, то всегда $\gamma \geqslant 1$. Если τ не зависит от энергии, то $\langle\tau\rangle = \tau$, $\langle\tau^2\rangle = \tau^2$ и поэтому $\gamma = 1$. Для определения значения γ необходимо знать зависимость времени релаксации от энергии. Она определяется тем, какие типы процессов рассеяния импульса играют главную роль в рассматриваемом полупроводнике при данной температуре, и поэтому γ имеет различное значение в разных случаях. Сейчас мы укажем без вывода (см. гл. XIV) некоторые наиболее важные случаи.

Если полупроводник относительно чист (т. е. не содержит примесей в больших концентрациях), его температура достаточно высока и, кроме того, концентрация подвижных частиц не слишком велика (так называемый невырожденный полупроводник), то главную роль играют процессы рассеяния на тепловых колебаниях решетки. В этом случае $\gamma = 3\pi/8 = 1{,}18$.

Если, напротив, полупроводник находится при низкой температуре, когда решеточное рассеяние мало, и содержит значительное количество примесей, атомы которых заряжены, то главным процессом является рассеяние на заряженных примесях. Тогда расчет показывает, что $\gamma = 315\pi/512 \simeq 1{,}93$.

Наконец, если мы имеем проводник с очень большой концентрацией подвижных частиц, как это имеет место, например, в металлах (так называемые вырожденные проводники), то $\gamma = 1$.

Однако во всех указанных случаях γ оказывается порядка единицы и, более того, различные его значения лежат в сравнительно узком интервале от 1 до 2. Поэтому во многих случаях, где не требуется большая точность, вопрос о типе главного процесса рассеяния не очень существен и приближенно можно считать $\gamma \simeq 1$.

в. Магнетосопротивление. Подставляя в соотношение (1.11) значения σ_{xx} и σ_{xy} из формул (3.11), получаем

$$\sigma_\perp(\mathscr{B}) = \frac{e^2 n}{m}\left(\zeta_1 + \omega_c^2 \frac{\zeta_2^2}{\zeta_1}\right).$$

Найдем теперь относительное изменение электропроводности $\Delta\sigma_\perp/\sigma$, где $\Delta\sigma_\perp = \sigma_\perp(\mathscr{B}) - \sigma$, а $\sigma = e^2 n\langle\tau\rangle/m$ — электропроводность без магнитного поля. Учитывая, что

$$\zeta_1 - \langle\tau\rangle = \left\langle \frac{\tau}{1+\omega_c^2\tau^2} - \tau \right\rangle = -\omega_c^2 \zeta_3,$$

где для краткости введено обозначение

$$\zeta_3 = \left\langle \frac{\tau^3}{1+\omega_c^2\tau^2} \right\rangle, \tag{3.20}$$

получаем

$$-\frac{\Delta\sigma_\perp}{\sigma} = \frac{\Delta\rho_\perp}{\rho} = \omega_c^2 \frac{\zeta_3 - \zeta_2^2/\zeta_1}{\langle\tau\rangle}. \tag{3.21}$$

Так как ω_c пропорциональна магнитной индукции $\mathscr{B}$, а все величины в (3.21) содержат только ω_c^2, то изменение сопротивления в магнитном поле (как и следовало ожидать) есть четный эффект, т. е. не зависит от направления магнитного поля. Однако зависимость $\Delta\sigma$ от $\mathscr{B}$, вообще говоря, не квадратичная, а более сложная.

Как и для эффекта Холла, важным предельным случаем являются слабые магнитные поля, определяемые условием (3.16). Тогда выражения для ζ_1, ζ_2 и ζ_3 можно разложить в ряд по степеням $(\omega_c\tau)^2$ и удержать в (3.21) только члены разложения со степенью не выше $(\omega_c\tau)^2$. После этого (3.21) дает

$$-\frac{\Delta\sigma_\perp}{\sigma} = \frac{\Delta\rho_\perp}{\rho} = \varkappa_\perp^2 \mathscr{B}^2, \tag{3.22}$$

где

$$\varkappa_\perp^2 = \left(\frac{e}{cm}\right)^2 \frac{\langle\tau^3\rangle\langle\tau\rangle - \langle\tau^2\rangle^2}{\langle\tau\rangle^2}. \tag{3.23}$$

В слабых полях изменение сопротивления в магнитном поле пропорционально квадрату магнитной индукции.

Если бы τ не зависело от энергии, то мы имели бы $\varkappa_{\perp}^{2} = 0$, а следовательно, изменения сопротивления (в слабых полях) не было бы вовсе. Отметим, однако, что при наличии двух (или больше) различных типов частиц изменение сопротивления уже не равно нулю, даже если τ не зависит от энергии.

Рассмотрим теперь другой предельный случай — очень сильных магнитных полей,

$$(\omega_c \tau)^2 \gg 1. \tag{3.24}$$

При этом, однако, мы должны сделать важное ограничение. Так как заряженные частицы совершают в магнитном поле прецессионное движение, то это движение квантуется (подробнее см. § IV.5). Чтобы используемый нами классический способ описания был применим, необходимо, чтобы кванты энергии $\hbar\omega_c$, связанные с этим движением, были малы по сравнению со средней энергией теплового движения kT. Поэтому под сильными полями мы будем понимать такие поля, которые, с одной стороны, удовлетворяют условию (3.24), но, с другой стороны, подчиняются условию

$$\frac{\hbar\omega_c}{kT} \ll 1. \tag{3.25}$$

(Для сильно вырожденных полупроводников вместо kT входит энергия Ферми, см. ниже.)

В случае сильного поля удобнее рассматривать не изменение электропроводности, а само значение электропроводности. Разлагая теперь ζ_1, ζ_2 и ζ_3 в ряд по степеням малой величины $1/\omega_c^2\tau^2$ и пренебрегая малыми второго порядка и выше, после несложных преобразований получаем

$$\sigma_\infty = \frac{e^2 n}{m} \left\langle \frac{1}{\tau} \right\rangle^{-1}.$$

Электропроводность в очень сильном магнитном поле перестает зависеть от магнитного поля и достигает постоянного значения σ_∞. Отношение предельных значений электропроводности или, соответственно, удельного сопротивления равно

$$\frac{\sigma}{\sigma_\infty} = \frac{\rho_\infty}{\rho} = \left\langle \frac{1}{\tau} \right\rangle \langle \tau \rangle. \tag{3.26}$$

Этот результат, как и все предыдущие, был получен в предположении, что эффективная масса и время релаксации не зависят от направления движения. Однако в действительности эффективная масса может сильно зависеть от направления и является не скаляром, а тензором 2-го ранга (см. гл. III). Выражения для постоянной Холла и для изменения сопротивления в магнитном поле становятся при этом более сложными. Это обстоятельство не вносит принципиальных изменений в закономерности эффекта Холла, но может иметь решающее значение в явлениях магнетосопротивления. В частности, в этом случае магнитное поле, параллельное электрическому, тоже может привести к изменению сопротивления; отношение ρ_∞/ρ в сильных магнитных полях может оказаться зависящим от магнитной индукции (см. гл. XIII).

§ 4. Смешанная проводимость

Как мы увидим ниже, в полупроводниках встречаются часто случаи, когда необходимо считать, что перенос электрического заряда производится частицами разных типов. Поэтому для дальнейшего необходимо обобщить полученные результаты на случай одновременного присутствия различных носителей заряда.

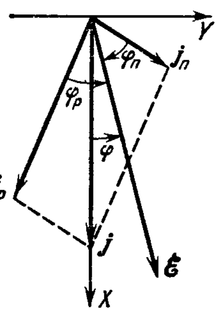

Рис. 1.8. Эффект Холла при смешанной проводимости.

а. Эффект Холла. Качественная картина эффекта Холла при двух разных типах частиц показана на рис. 1.8. Для определенности принято, что частицы одного типа заряжены положительно, а другого — отрицательно. Тогда векторы плотности тока положительных частиц $\mathbf{j}_p$ и отрицательных частиц $\mathbf{j}_n$ будут направлены так, что вектор результирующего электрического поля $\mathcal{E}$ окажется повернутым относительно $\mathbf{j}_p$ на угол Холла φ_p в положительном направлении и на угол φ_n относительно $\mathbf{j}_n$ в отрицательном направлении. Результирующая плотность тока равна $\mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_n$. Наблюдаемый на опыте результирующий угол Холла φ есть угол, на который повернут вектор $\mathcal{E}$ относительно вектора $\mathbf{j}$. Этот угол может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от величин и направлений $\mathbf{j}_p$ и $\mathbf{j}_n$, т. е. в зависимости от соотношения между концентрациями и подвижностями частиц обоих типов.

Для вычисления результирующего угла Холла вернемся опять к выражениям для плотности тока, создаваемой частицами сорта «i», которые, учитывая соотношение (1.8), запишем в виде

$$j_x^{(i)} = \sigma_{xx}^{(i)} (\mathcal{E}_x + \mathcal{E}_y \operatorname{tg} \varphi^{(i)}), \qquad j_y^{(i)} = \sigma_{yy}^{(i)} (\mathcal{E}_y - \mathcal{E}_x \operatorname{tg} \varphi^{(i)}). \tag{4.1}$$

Составляющие полного тока, с учетом (3.11), можно записать в виде

$$\begin{aligned} j_x &= \sum_i j_x^{(i)} = \mathcal{E}_x \sum \sigma_{xx}^{(i)} + \mathcal{E}_y \sum \sigma_{xx}^{(i)} \operatorname{tg} \varphi^{(i)}, \\ j_y &= \sum_i j_y^{(i)} = -\mathcal{E}_x \sum \sigma_{xx}^{(i)} \operatorname{tg} \varphi^{(i)} + \mathcal{E}_y \sum \sigma_{xx}^{(i)}. \end{aligned} \tag{4.2}$$