

щие квантовые состояния совершенно не заполнены. При  $T \neq 0$  функция Ферми изображается непрерывной кривой и в узкой области энергий, порядка нескольких  $kT$ , в окрестности точки  $E = F$  быстро изменяется от 1 до 0. Размытие функции Ферми тем больше, чем выше температура.

Вероятность того, что данное квантовое состояние с энергией  $E$  не занято электроном,  $f_p$ , есть

$$f_p = (1 - f) = \left(1 + \exp \frac{F - E}{kT}\right)^{-1}. \quad (3.1a)$$

Вычисление различных статистических величин значительно упрощается, если  $F$  лежит в запрещенной зоне энергий и удален от края зоны  $E_c$  хотя бы на  $(2 \div 3)kT$ . Тогда в распределении (3.1) можно считать

$$\exp \frac{E - F}{kT} \gg 1$$

и оно переходит в распределение Максвелла — Больцмана классической статистики

$$f = C \exp\left(-\frac{E}{kT}\right), \quad (3.16)$$

где  $C$  — постоянная. В этом случае мы говорим, что электронный газ не вырожден. Аналогично, в полупроводнике  $p$ -типа для отсутствия вырождения дырочного газа необходимо, чтобы уровень Ферми  $F$  тоже лежал внутри запрещенной зоны и был расположен выше энергии  $E_v$  хотя бы на  $(2 \div 3)kT$ . Противоположный случай, когда уровень Ферми расположен внутри зоны проводимости или внутри валентной зоны, есть случай вырожденного электронного или, соответственно, дырочного газа. В этом случае существенно необходимо пользоваться распределением Ферми — Дирака (3.1) или (3.1a).

В дальнейшем при вычислении концентраций подвижных и связанных носителей заряда мы разделим задачу на две части. А именно, сначала мы выразим эти концентрации через уровень Ферми, а затем рассмотрим, как определить положение самого уровня Ферми.

#### § 4. Концентрации электронов и дырок в зонах

Согласно сказанному выше концентрация электронов в зоне проводимости равна

$$n = \int_{E_c}^{\infty} N_c(E) f(E, T) dE. \quad (4.1)$$

Отметим, что в качестве верхнего предела в написанном интеграле мы должны были бы взять энергию верхнего края зоны проводи-

мости. Однако так как функция  $f$  для значений энергий  $E > F$  быстро убывает с увеличением  $E$ , то замена верхнего предела на  $\infty$  практически не меняет значения интеграла.

Интеграл (4.1) удобно представить в следующем виде. Выберем новую переменную интегрирования

$$x = \frac{E - E_c}{kT} \quad (0 \leq x \leq \infty).$$

Обозначим, далее,

$$\zeta = F - E_c, \quad \zeta^* = \frac{\zeta}{kT}. \quad (4.2)$$

Величина  $\zeta$  носит название *химического потенциала для электронов*, а  $\zeta^*$  есть его безразмерное значение. Обозначим, наконец, для сокращения

$$N_c = 2 \left( \frac{2\pi m_n kT}{(2\pi\hbar)^2} \right)^{3/2}. \quad (4.3)$$

Эта величина получила название *эффективной плотности состояний в зоне проводимости* (смысл этого названия будет выяснен ниже). Тогда нетрудно убедиться, что интеграл (4.1) принимает вид

$$n = N_c \Phi_{1/2}(\zeta^*), \quad (4.4)$$

где

$$\Phi_{1/2}(\zeta^*) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{1/2} dx}{1 + \exp(x - \zeta^*)}. \quad (4.5)$$

Значение интеграла (4.5) зависит только от параметра  $\zeta^*$ , т. е. от химического потенциала, и температуры. Этот интеграл известен как интеграл Ферми — Дирака (или, точнее, интеграл Ферми — Дирака с индексом  $1/2$ ) и в общем случае не выражается через элементарные функции. Таблица его значений приведена в Приложении III.

Рассуждая аналогично, легко найти и выражение для концентрации положительных дырок в валентной зоне. Отличия от предыдущего случая заключаются лишь в том, что мы, во-первых, должны использовать выражение (2.5) для плотности состояний в валентной зоне. Во-вторых, мы должны подсчитывать не число заполненных, а число незанятых состояний. И, наконец, интегрирование по энергиям нужно производить в пределах валентной зоны. Поэтому

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} N_v(E) f_p(E, T) dE, \quad (4.6)$$

где  $f_p$  выражается формулой (3.1a). Вводя, как и выше, безразмерную переменную

$$y = \frac{E_v - E}{kT} \quad (0 \leq y \leq \infty)$$

и безразмерный параметр

$$\eta^* = \frac{E_v - F}{kT}, \quad (4.7)$$

мы приходим к формуле, аналогичной соотношению (4.4):

$$p = N_v \Phi_{1/2}(\eta^*). \quad (4.8)$$

Здесь  $N_v$  есть эффективная плотность состояний в валентной зоне:

$$N_v = 2 \left( \frac{2\pi m_p kT}{(2\pi\hbar)^2} \right)^{3/2}, \quad (4.9)$$

а  $\Phi_{1/2}(\eta^*)$  — прежний интеграл Ферми (4.5). Однако теперь он содержит другой параметр  $\eta^*$ , характеризующий положение уровня Ферми относительно края валентной зоны. Разность

$$\eta = E_v - F = -\zeta - E_g$$

есть *химический потенциал для дырок*.

Формулы (4.4) и (4.8) справедливы для полупроводника, однородного по составу и в отсутствие внешних полей. Легко обобщить их на случай, когда в образце имеется электрическое поле с потенциалом  $\varphi$ , плавно (в смысле, указанном в § IV.6) изменяющимся в пространстве. Действительно, в этом случае применимо представление об искривленных зонах и, следовательно, величины  $E_c$  и  $E_v$  надо заменить на  $E_c - e\varphi$  и  $E_v - e\varphi$ , где  $E_c$  и  $E_v$  — энергии краев зон при  $\varphi = 0$ . Поэтому, если  $\zeta_0^*$  есть безразмерный химический потенциал при  $\varphi = 0$ , то выражение для концентрации электронов принимает вид

$$n = N_c \Phi_{1/2} \left( \zeta_0^* + \frac{e\varphi}{kT} \right). \quad (4.4a)$$

Аналогично, для концентрации дырок получаем

$$p = N_v \Phi_{1/2} \left( \eta_0^* - \frac{e\varphi}{kT} \right). \quad (4.8a)$$

## § 5. Невырожденные полупроводники

Выражения (4.4) и (4.8) для концентраций значительно упрощаются для невырожденных полупроводников. Такой случай показан на рис. 5.3, где даны плотность квантовых состояний  $N_c(E)$ , функция Ферми  $f(E, T)$ , а также их произведение, равное  $dn/dE$  (здесь  $dn$  — концентрация электронов с энергией в интервале  $E, E + dE$ ). Полное количество электронов в зоне определяется пло-