

а концентрация электронов в зоне  $n \gg N_c$ . Взаимное расположение кривых  $N_c(E)$ ,  $f(E, T)$  и  $dn/dE$  для вырожденного полупроводника  $n$ -типа схематически показано на рис.

5.4. В этом случае в интеграле Ферми (4.5)  $\exp(x - \zeta^*) \ll 1$ . Далее, в качестве верхнего предела интеграла можно положить  $x_m = (F - E_c)/kT$ . Это совершенно точно при  $T = 0$ , однако справедливо с хорошим приближением и при  $T \neq 0$  вследствие быстрого убывания функции Ферми—Дирака при  $E > F$ . Тогда опять интеграл Ферми вычисляется непосредственно и мы имеем

$$n = N_c \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_m} x^{1/2} dx = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_c x_m^{3/2} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} N_c \left( \frac{F - E_c}{kT} \right)^{3/2}. \quad (6.1)$$

При температуре абсолютного нуля все состояния в зоне, энергия которых  $E > F$ , свободны, а все состояния с  $E < F$  заняты электронами. Поэтому химический потенциал электронов  $\zeta = F - E_c$  есть максимальная энергия электронов при  $T = 0$ . Эту величину, играющую важную роль в теории металлов, часто называют *энергией Ферми*. Подставляя в (6.1) для  $N_c$  его выражение (4.3), находим

$$\zeta = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 n^{2/3}}{2m_n}. \quad (6.2)$$

В случае вырожденного полупроводника  $p$ -типа, аналогично, в интеграле Ферми  $\Phi_{1/2}(\eta^*)$  можно положить  $\exp(y - \eta^*) \ll 1$ , а в качестве верхнего предела интеграла можно выбрать  $y_m = (E_v - F)/kT$ . Тогда вместо (6.2) мы получим

$$\eta = \frac{(3\pi^2)^{2/3} \hbar^2 p^{2/3}}{2m_p}. \quad (6.3)$$

## § 7. Эффективная масса плотности состояний

Во всех предыдущих параграфах мы считали закон дисперсии изотропным и параболическим. Весьма часто, однако, приходится иметь дело и с более сложными случаями. Так, например, для зоны проводимости в германии и кремнии изоэнергетические поверхности суть эллипсоиды вращения (см. § III.9). Центры этих эллипсоидов не совпадают с центром зоны Бриллюэна, и поэтому в ней имеется несколько эквивалентных минимумов энергии. Изоэнерге-

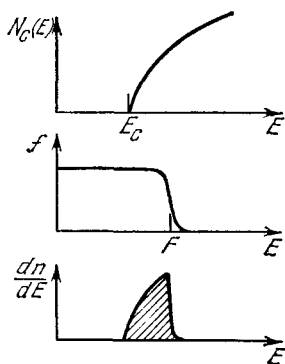


Рис. 5.4. Схематический ход функций  $N_c(E)$ ,  $f(E, T)$  и  $dn/dE$  в сильно вырожденном полупроводнике  $n$ -типа.

тические поверхности для дырок в этих полупроводниках имеют еще более сложную форму. Поэтому мы рассмотрим, что именно нужно понимать под величинами  $m_n$  и  $m_p$ , входящими в выражения эффективных плотностей состояний  $N_c$  и  $N_v$  при анизотропном или непараболическом законе дисперсии.

Рассмотрим случай эллиптических изоэнергетических поверхностей

$$E(\mathbf{p}) = E_c + \frac{p_x^2}{2m_x} + \frac{p_y^2}{2m_y} + \frac{p_z^2}{2m_z}, \quad (7.1)$$

где составляющие квазиимпульса  $p_x$ ,  $p_y$  и  $p_z$  отсчитываются от их значений в одном из эквивалентных минимумов в зоне Бриллюэна. Тогда, согласно формуле (2.1), концентрация электронов в зоне, обусловленная одним эквивалентным минимумом, равна

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int \frac{dp_x dp_y dp_z}{1 + \exp \frac{E - F}{kT}}, \quad (7.2)$$

где  $E$  теперь выражается формулой (7.1).

Написанное выражение можно просто вычислить для невырожденных полупроводников. В этом случае

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \exp \frac{F - E_c}{kT} \cdot \int \exp \left( - \frac{E - E_c}{kT} \right) dp_x dp_y dp_z.$$

При подстановке вместо  $E$  его значения из (7.1) написанный интеграл распадается на произведения трех интегралов типа

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left( - \frac{p_x^2}{2m_x kT} \right) \cdot dp_x = (2\pi m_x kT)^{1/2}.$$

Поэтому

$$n = 2 \left( \frac{2\pi kT}{(2\pi\hbar)^2} \right)^{3/2} (m_x m_y m_z)^{1/2} \exp \frac{F - E_c}{kT}.$$

Если в зоне Бриллюэна имеется  $\nu$  эквивалентных минимумов, то плотность квантовых состояний будет в  $\nu$  раз больше и во столько же раз увеличится концентрация электронов при заданном  $F$ .

Сравнивая полученный результат с формулой (5.1) и выражением (4.3) для  $N_c$ , видим, что в данном случае роль скалярной эффективной массы играет величина

$$m_{nd} = \nu^{2/3} (m_x m_y m_z)^{1/3}. \quad (7.3)$$

Она получила название *эффективной массы плотности состояний*.

Для вычисления эффективной массы  $m_d$  плотности состояний в общем случае удобно ввести в интеграле (7.2) новые переменные интегрирования. Именно, пусть

$$E(\mathbf{p}) = E = \text{const} \quad (7.4)$$

есть уравнение изоэнергетической поверхности. Очевидно, все пространство квазиимпульсов можно исчерпать, интегрируя сначала по поверхности (7.4), а затем — по всем возможным значениям  $E$ . Обозначим через  $dS$  элемент площади на поверхности (7.4), а через  $\eta$  — координату (в пространстве квазиимпульсов), постоянную на этой поверхности. Тогда для элемента объема в пространстве квазиимпульсов будем иметь

$$d\mathbf{p} = dS \cdot d\eta. \quad (7.5)$$

Очевидно, изменению координаты  $\eta$  соответствует изменение энергии

$$dE = (\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{p}} E) d\eta,$$

где  $\mathbf{v}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности (7.4). По определению градиента  $(\mathbf{v}, \nabla_{\mathbf{p}} E) = |\nabla_{\mathbf{p}} E|$ . Следовательно,

$$d\eta = \frac{dE}{|\nabla_{\mathbf{p}} E|}, \quad (7.6)$$

причем, выполнив здесь дифференцирование по компонентам вектора  $\mathbf{p}$ , надо затем выразить их через  $E$  и какие-нибудь удобные переменные, характеризующие положение точки на поверхности (7.4). Таким образом,

$$n = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_0^{\infty} dE f(E, T) \int_S \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{p}} E|}. \quad (7.7)$$

Отсюда следует, что при произвольном законе дисперсии плотность состояний в зоне проводимости определяется равенством

$$N_c(E) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int_S \frac{dS}{|\nabla_{\mathbf{p}} E|}. \quad (7.8)$$

Заметим, что  $|\nabla_{\mathbf{p}} E|$  есть не что иное, как абсолютная величина средней скорости электрона в данном состоянии  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ .

В частности, в применении к полупроводникам с узкой запрещенной зоной интересен случай изотропного, но непараболического закона дисперсии типа (III.9.2). В этом случае поверхность (7.4) есть сфера  $dS = p^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , где  $\theta$  и  $\varphi$  — полярные углы, и, следовательно,

$$N_c(E) = \frac{p^2(E)}{\pi^2 \hbar^3 v(E)}. \quad (7.8a)$$

Еще одно удобное выражение для плотности состояний можно получить, пользуясь правилами интегрирования с  $\delta$ -функцией (Приложение IV). Действительно, рассмотрим интеграл

$$\int d\mathbf{p} \cdot \delta(E - E(\mathbf{p})).$$

Пользуясь формулами (7.5), (7.6) и правилами Приложения IV, мы можем переписать его в виде

$$\int dS \int \frac{dE}{|\nabla_p E(\mathbf{p})|} \delta(E - E(\mathbf{p})) = \int \frac{dS}{|\nabla_p E(\mathbf{p})|_{E(\mathbf{p})=E}}.$$

С точностью до множителя  $2/(2\pi\hbar)^3$  это есть не что иное, как правая часть (7.8). Таким образом,

$$\begin{aligned} N_c(E) &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \cdot \delta(E - E_c(\mathbf{p})), \\ N_v(E) &= \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \int d\mathbf{p} \cdot \delta(E - E_v(\mathbf{p})). \end{aligned} \quad (7.86)$$

Заметим, что, согласно (7.86),  $N_c(E) = 0$  при  $E < E_c$  и  $N_v(E) = 0$  при  $E > E_v$ .

Согласно (7.7) общее выражение для эффективной плотности состояний в случае невырожденного электронного газа можно записать в виде

$$N_c = \int_0^{\infty} N_c(E) \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \cdot dE, \quad (7.9)$$

где  $N_c(E)$  выражается формулой (7.8). Приравнивая правые части выражений (7.9) и (4.3), находим эффективную массу плотности состояний:

$$m_{nd}^{3/2} = \frac{1}{(2\pi kT)^{3/2}} \int dE \cdot \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \int \frac{dS}{|\nabla_p E(\mathbf{p})|}. \quad (7.10)$$

Вообще говоря, она зависит от температуры.

Аналогичные формулы справедливы и для  $N_v$  и  $m_{pd}^{3/2}$ . Интегралы, фигурирующие в формуле (7.10), при непараболическом законе дисперсии обычно удается вычислить только численными методами.

Таким образом, мы видим, что полученные нами ранее результаты можно применять и к полупроводникам с более сложными законами дисперсии. Однако в этом случае нужно найти подходящее значение для эффективной массы, зависящее от формы изоэнергетических поверхностей, от числа эквивалентных минимумов в зоне Бриллюэна и, может быть, от температуры.

Отметим в заключение еще одно существенное обстоятельство. В случае параболического изотропного закона дисперсии эффективная масса, определяющая подвижность носителей заряда (гл. XIII), и эффективная масса плотности состояний равны друг другу. В более сложных случаях эти величины, вообще говоря, не совпадают. Результирующее значение эффективной массы, определяющее подвижность, получило название *эффективной массы электропроводности*, которую нужно отличать от эффективной массы плотности состояний.

Исходя из общей теории явлений переноса, основанной на использовании кинетического уравнения Больцмана, и зная форму изоэнергетических поверхностей и зависимость времени релаксации от энергии, эффективную массу электропроводности в ряде случаев можно вычислить. В таблице 5.1 приведены вычисленные значения эффективных масс плотности состояний  $m_d$  и электропроводности  $m_\sigma$  для двух важных полупроводников — германия и кремния.

Таблица 5.1

Эффективные массы в германии и кремнии \*)

Вещество	Эффективная масса плотности состояний					Эффективная масса электропроводности			
	электроны $m_{nd}/m_0$	тяжелые дырки, $m_{nd}^H/m_0$	легкие дырки, $m_{nd}^L/m_0$	результгирующая, $m_{pd}/m_0$	собственный полупроводник, $m_{id}/m_0$	электроны, $m_{n\sigma}/m_0$	тяжелые дырки, $m_{p\sigma}^H/m_0$	легкие дырки, $m_{p\sigma}^L/m_0$	результгирующая, $m_{r\sigma}/m_0$
Германий	0,57	0,36	0,043	0,37	0,46	0,12	0,31	0,044	0,25
Кремний	1,08	0,53	0,14	0,59	0,80	0,26	0,49	0,16	0,38

\*) По данным работы *B. Lax, J. G. Mavroides, Phys. Rev. 100, 1950 (1955)*.

## § 8. Плотность состояний в квантующем магнитном поле

Формулы (2.3), (2.5) и (7.8) описывают плотности состояний носителей заряда, свободно движущихся в периодическом поле идеальной решетки. В достаточно сильных электрическом или магнитном полях энергетический спектр свободных электронов и дырок претерпевает серьезные изменения, что отражается и на плотности состояний. Вычислим плотность состояний электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле индукции  $\mathcal{B}$ . Для этой цели заметим, что по правилам статистической физики общее число свободных электронов  $N$  в объеме  $V$  дается выражением

$$N = \sum_{\lambda} g_{\lambda} f(E_{\lambda}, T). \quad (8.1)$$

Здесь  $\lambda$  — совокупность квантовых чисел, от которых зависит энергия электрона  $E_{\lambda}$ ,  $g_{\lambda}$  — кратность вырождения энергетического уровня.

В рассматриваемой задаче (§ IV.5) роль квантовых чисел играют величины  $n$ ,  $k_z = \frac{2\pi}{L} n_z$  и проекция спина на ось  $Z$ , а кратность