Исходя из общей теории явлений переноса, основанной на использовании кинетического уравнения Больцмана, и зная форму изоэнергетических поверхностей и зависимость времени релаксации от энергии, эффективную массу электропроводности в ряде случаев можно вычислить. В таблице 5.1 приведены вычисленные значения эффективных масс плотности состояний m_d и электропроводности m_σ для двух важных полупроводников — германия и кремния.

Таблица 5.1

Эффективные массы в германии и кремнии *)

Вещество	Эффективная масса плотности состояний					Эффективная масса электропроводности			
	электроны m_{nd}/m_0	тяжелые дырки, m_{pd}^H/m_0	легкие дырки, m_{pd}^L/m_0	результирующая, m_{pd}/m_0	собственный полупроводник, m_{id}/m_0	электроны, $m_{n\sigma}/m_0$	тяжелые дырки, $m_{p\sigma}^H/m_0$	легкие дырки, $m_{p\sigma}^L/m_0$	результирующая, $m_{p\sigma}/m_0$
Германий	0,57	0,36	0,043	0,37	0,46	0,12	0,31	0,044	0,25
Кремний	1,08	0,53	0,14	0,59	0,80	0,26	0,49	0,16	0,38

*) По данным работы *B. Lax, J. G. Mavroides*, Phys, Rev. **100**, 1950 (1955).

§ 8. Плотность состояний в квантующем магнитном поле

Формулы (2.3), (2.5) и (7.8) описывают плотности состояний носителей заряда, свободно движущихся в периодическом поле идеальной решетки. В достаточно сильных электрическом или магнитном полях энергетический спектр свободных электронов и дырок претерпевает серьезные изменения, что отражается и на плотности состояний. Вычислим плотность состояний электрона, движущегося в постоянном и однородном магнитном поле индукции $\mathcal{B}$. Для этой цели заметим, что по правилам статистической физики общее число свободных электронов N в объеме V дается выражением

$$N = \sum_{\lambda} g_\lambda f(E_\lambda, T). \tag{8.1}$$

Здесь λ — совокупность квантовых чисел, от которых зависит энергия электрона E_λ, g_λ — кратность вырождения энергетического уровня.

В рассматриваемой задаче (§ IV.5) роль квантовых чисел играют величины n, $k_z = \frac{2\pi}{L} n_z$ и проекция спина на ось Z, а кратность вырождения дается формулой (IV.5.18). Таким образом,

$$N = N_+ + N_-, \tag{8.2}$$

где $N_\pm$ — числа электронов с положительной и отрицательной проекциями спина:

$$N_\pm = \frac{L^2 m\omega_c}{2\pi\hbar} \sum_{n,\, n_3} f(E_\lambda,\ T), \tag{8.3}$$

а значения энергии $E_\pm$ даются формулой (IV.5.12).

Расстояние между двумя соседними значениями k_3 составляет $\Delta k_z = 2\pi/L$. При $L \to \infty$ эта величина сколь угодно мала, что позволяет перейти от суммирования по n_z к интегрированию по k_z. Действительно,

$$\sum_{n_3} f(E_\pm,\ T) = \frac{L}{2\pi} \sum_{n_3} f(E_\pm,\ T)\,\Delta k_z \to \frac{L}{2\pi} \int f(E_\pm,\ T)\,dk_z. \tag{8.4}$$

Пользуясь тем, что $E_\pm$ есть четная функция k_z, мы можем заменить здесь интеграл по k_z в бесконечных пределах удвоенным интегралом от нуля до бесконечности. Тогда получаем

$$N_\pm = L^3 \frac{m\omega_c}{(2\pi)^2 \hbar}\, 2 \int_0^\infty dk_z \sum_n f(E_\pm,\ T). \tag{8.5}$$

Очевидно, множитель при $L^3 = V$ есть концентрация электронов с данной проекцией спина $n_\pm$.

Наконец, введем вместо k_z переменную интегрирования $E_\pm$. Получим, опуская значок «$\pm$» у переменной интегрирования,

$$n_\pm = \int_{{}^1\!/_2 \hbar\omega_c \pm \beta g \mathscr{B}}^{\infty} N_\pm(E) f(E,\ T)\,dE, \tag{8.6}$$

где

$$N_\pm(E) = \frac{e\mathscr{B}\sqrt{2m}}{(2\pi\hbar)^2 c} \sum_{n \geqslant 0} \left[E - E_c - \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right) \pm \beta g \mathscr{B}\right]^{-1/2}. \tag{8.7}$$

Сумма берется здесь по всем значениям n, удовлетворяющим условию

$$E - E_c - \hbar\omega_c\,(n + {}^1\!/_2) \pm \beta g \mathscr{B} \geqslant 0. \tag{8.8}$$

Величины $N_\pm(E)$ и представляют собой искомые плотности состояний в магнитном поле, относящиеся к электронам с положительной и отрицательной проекцией спина. Сумма их

$$N(E) = N_+(E) + N_-(E)$$

есть аналог величины $N_c(E)$.

Формула (8.7) применима и к дыркам (если можно пренебречь эффектами, связанными с вырождением валентной зоны). Следует лишь заменить в ней $E - E_c$ на $E_v - E$ и изменить знак ω_c.

Из выражений (8.7) и (8.8) видно, что плотность состояний электронов в магнитном поле есть осциллирующая функция магнитной индукции. Она имеет острые максимумы при тех значениях магнитной индукции, при которых энергия $(E - E_c \pm \beta g \mathcal{B})$ близка к одному из уровней Ландау $\hbar\omega_c (n + {}^1/_2)$. Это обстоятельство проявляется в том, что в вырожденном электронном газе (в металлах, полуметаллах и вырожденных полупроводниках) многие термодинамические, электрические и оптические величины, выражающиеся через плотность состояний, при определенных условиях осциллируют при изменении магнитной индукции. Так как в вырожденном электронном газе существенную роль играют только электроны на поверхности Ферми, то осцилляции свойств происходят при прохождении какого-либо из уровней Ландау через уровень Ферми. Впервые такие квантовые осцилляции были обнаружены в величине магнетосопротивления (эффект Шубникова—де Гааза) и магнитной восприимчивости (эффект де Гааза — ван Альфена) при низких температурах. Количественная теория квантовых осцилляций довольно громоздка (ее можно найти в книге [М8]). Экспериментальное исследование квантовых осцилляций позволяет получить информацию о форме поверхностей Ферми.

Наряду с указанными выше, существуют также квантовые осцилляции различных физических величин, имеющие другое происхождение. Они тоже связаны с уровнями Ландау, но, в отличие от эффектов Шубникова—де Гааза и де Гааза—ван Альфена, не требуют вырождения электронного газа и наблюдаются при более высоких температурах. Когда энергетический интервал между какими-либо уровнями Ландау $n\hbar\omega_c$ ($n = 1, 2, \ldots$) становится равным энергии оптических фононов (см. § XII.6), резко возрастает вероятность неупругого рассеяния электронов на колебаниях решетки. Поэтому все эффекты, зависящие от характера рассеяния электронов, такие, как магнетосопротивление, дифференциальная термоэдс и др., испытывают осцилляции при изменении магнитного поля. Эти явления получили название магнитофононных осцилляций (подробнее см., например, [М8]).

§ 9. Концентрации электронов и дырок на локальных уровнях. Простые центры

Обратимся теперь к вычислению концентраций электронов и дырок, связанных на локальных уровнях энергии. Рассмотрим сначала простейший случай, когда примесный атом или структурный дефект может либо иметь один электрон, либо быть пустым, т. е. может находиться только в двух различных зарядовых состояниях. Если не рассматривать пока возможные возбужденные состояния, то такой центр будет характеризоваться одним уровнем энергии E_1. Если, кроме того, каждому зарядовому состоянию центра соответствует только одно квантовое состояние электрона, то концентрация