Именно эти величины, R_n и R_p, мы должны подставлять в уравнения непрерывности (VII.3.3) для учета рекомбинации. Если изменения концентраций вследствие движения частиц малы, то эти уравнения принимают вид

$$\frac{dn}{dt} = g_n - R_n = g_n - \alpha_n N_t [n(1-f) - n_1 f], \tag{4.8}$$

$$\frac{dp}{dt} = g_p - R_p = g_p - \alpha_p N_t [pf - p_1(1-f)]. \tag{4.9}$$

Здесь g_n и g_p — темпы внешней генерации электронов и, соответственно, дырок.

Так как при рекомбинации через ловушки каждый исчезающий свободный электрон оседает на ловушку (то же относится и к дыркам), то изменение концентрации заполненных ловушек $N_t f$ определяется уравнением

$$N_t \frac{df}{dt} = R_n - R_p + (g_p - g_n). \tag{4.10}$$

Кроме того, мы имеем еще уравнение квазинейтральности (ср. § VII.3)

$$p - p_0 = n - n_0 + N_t (f - f_0). \tag{4.11}$$

Уравнения (4.8) — (4.11) вполне определяют кинетику изменения концентрации неравновесных электронов и дырок вследствие рекомбинации.

Отметим, что одно из четырех указанных уравнений может быть получено как следствие из других. Так, например, дифференцируя уравнение квазинейтральности (4.11), мы имеем

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dn}{dt} + N_t \frac{df}{dt}.$$

Подставляя сюда для каждого из слагаемых их выражения (4.8) — (4.10), мы получаем тождество. Остающиеся же три независимых уравнения определяют три искомые величины $n(t)$, $p(t)$ и $f(t)$.

Так как уравнения (4.8) и (4.9) нелинейны, то в общем случае закон изменения концентраций n и p не выражается экспонентой. Однако в специальных случаях существуют постоянные характерные времена процесса. Ниже приведены некоторые примеры.

§ 5. Нестационарные процессы

а. Монополярное возбуждение. Положим, что в полупроводнике генерируются неравновесные носители только одного знака, скажем только электроны (это имеет место, например, при примесном возбуждении фотопроводимости). Тогда мы имеем только одно дифференциальное уравнение (4.8). Полагая в нем

$$n = n_0 + \delta n, \qquad f = f_0 + \delta f$$

и учитывая, что

$$n_0(1-f_0)-n_1f_0=0,$$

находим

$$\frac{d\delta n}{dt}=g_n-\alpha_nN_t(1-f_0)\,\delta n-\alpha_nN_t(n_0+n_1+\delta n)\,\delta f.$$

Исключая отсюда δf с помощью уравнения квазинейтральности

$$\delta n+N_t\,\delta f=0,$$

получаем

$$\frac{d\delta n}{dt}=g_n-\alpha_n\left(N_t^0+n_0+n_1+\delta n\right)\delta n.$$

Здесь через $N_t^0=N_t(1-f_0)$ обозначена равновесная концентрация пустых ловушек. Отсюда видно, что мгновенное время жизни электронов (ср. § VII.2) равно

$$\tau_n=\frac{1}{\alpha_n\left(N_t^0+n_0+n_1+\delta n\right)}. \tag{5.1}$$

Оно само зависит от δn и изменяется в процессе релаксации концентрации электронов. Однако если неравновесная концентрация электронов не слишком велика, так что

$$\delta n\ll N_t^0+n_0+n_1,$$

то δn изменяется по экспоненциальному закону, рассмотренному нами в § VII.2, а время жизни оказывается постоянным.

В случае генерации дырок мы получили бы аналогичное выражение:

$$\tau_p=\frac{1}{\alpha_p\left(N_t^-+p_0+p_1+\delta p\right)}. \tag{5.2}$$

6. Биполярное возбуждение. Рассмотрим теперь более сложный случай, когда генерируются и электроны и дырки. При этом будем считать, что $g_n=g_p=g$ (как, например, при возбуждении светом в собственной полосе поглощения). Выделяя по-прежнему в величинах n, p и f их равновесные части n_0, p_0 и f_0 и неравновесные приращения δn, δp и δf, мы найдем для темпа рекомбинации электронов

$$R_n=\alpha_nN_t\,[n(1-f)-n_1f]=\alpha_nN_t\,[(1-f_0)\,\delta n-(n_0+n_1+\delta n)\,\delta f]. \tag{5.3}$$

Исключая отсюда δf с помощью уравнения квазинейтральности

$$\delta p=\delta n+N_t\,\delta f, \tag{5.4}$$

получаем

$$R_n=a\,\delta n+b\,\delta p, \tag{5.5}$$

где

$$a=\alpha_n\left(N_t^0+n_0+n_1+\delta n\right),\qquad b=-\,\alpha_n(n_0+n_1+\delta n).$$

При биполярном возбуждении темп рекомбинации электронов определяется не только избыточной концентрацией электронов δn, но еще и концентрацией избыточных дырок δp. Это происходит по той причине, что неравновесные дырки, так же как и электроны, изменяют степень заполнения ловушек, а эта последняя влияет на темп рекомбинации.

Рассуждая совершенно аналогично, мы получили бы для темпа рекомбинации дырок выражение

$$R_p = \alpha_p N_t [pf - p_1(1-f)] = c\,\delta p + d\,\delta n, \tag{5.6}$$

где

$$c = \alpha_p (N_t^- + p_0 + p_1 + \delta p), \qquad d = -\alpha_p (p_0 + p_1 + \delta p).$$

Здесь $N_t^- = N_t f_0$ есть равновесная концентрация заполненных ловушек.

Таким образом, для определения неравновесных концентраций $\delta n(t)$ и $\delta p(t)$ мы получаем систему двух связанных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\,\delta n}{dt} = g - a\,\delta n - b\,\delta p, \qquad \frac{d\,\delta p}{dt} = g - c\,\delta p - d\,\delta n. \tag{5.7}$$

Так как a, b, c и d зависят от δn и δp, то эта система нелинейна.

Уравнения кинетики становятся линейными, если выполняются условия

$$\delta n \ll n_0 + n_1, \qquad \delta p \ll p_0 + p_1. \tag{5.8}$$

Отметим, что одно из этих условий относится к основным носителям и соблюдается довольно часто. Однако условию для неосновных носителей удовлетворить гораздо труднее, и поэтому при биполярном возбуждении кинетика рекомбииации оказывается, как правило, неэкспоненциальной.

Если неравенства (5.8) выполняются, то, исключая из системы (5.7) концентрацию δp, мы получаем для δn уравнение

$$\frac{d^2(\delta n)}{dt^2} + (a+c)\frac{d(\delta n)}{dt} + (ac - bd)\,\delta n + g(b-c) = 0. \tag{5.9}$$

Для концентрации избыточных дырок получается аналогичное уравнение:

$$\frac{d^2(\delta p)}{dt^2} + (a+c)\frac{d(\delta p)}{dt} + (ac - bd)\,\delta p + g(d-a) = 0. \tag{5.10}$$

Пользуясь стандартным методом решения дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами, мы находим, что концентрации неравновесных носителей изменяются по закону

$$\delta n\,(\delta p) = A_{n(p)} + B_{n(p)}\,e^{-t/\tau_1} + C_{n(p)}\,e^{-t/\tau_2}. \tag{5.11}$$

Здесь

$$A_n = g\,\frac{c-b}{ac-bd}, \qquad A_p = g\,\frac{a-d}{ac-bd},$$

а постоянные B и C определяются из начальных условий. Величины τ_1 и τ_2 дают времена релаксации избыточной концентрации и являются корнями характеристического уравнения

$$\left(\frac{1}{\tau}\right)^2 - (a+c)\,\frac{1}{\tau} + (ac - bd) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{1}{2}(a+c) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(a+c)^2 - (ac-bd)}. \tag{5.12}$$

Легко убедиться, что эти корни всегда вещественны и положительны.

Таким образом, при биполярном возбуждении, даже при выполнении неравенств (5.8) (линеаризованная задача), изменение неравновесных концентраций электронов и дырок описывается двумя экспонентами и существуют два различных времени релаксации τ_1 и τ_2. Эти времена одинаковы для электронов и дырок. Из формулы (5.12) также видно, что времена релаксации неравновесных концентраций довольно сложным образом зависят от параметров ловушек — их коэффициентов захвата α_n и α_p и энергетических уровней (входящих в величины n_1 и p_1).

Соотношения, однако, упрощаются при некоторых специальных условиях. Так, например, если концентрация ловушек достаточно велика и температура кристалла низка, так что выполняются условия

$$N_t^0 \gg n_0 + n_1, \qquad N_t^- \gg p_0 + p_1, \tag{5.13}$$

то мы имеем $a \gg |b|$, $c \gg |d|$ и, следовательно, $bd \ll ac$. Тогда получается

$$\frac{1}{\tau_{1,2}} = \frac{1}{2}(a+c) \pm \frac{1}{2}(a-c),$$

т. е.

$$\frac{1}{\tau_1} = a \simeq \alpha_n N_t^0, \qquad \frac{1}{\tau_2} = c \simeq \alpha_p N_t^-. \tag{5.14}$$

В этом случае время τ_1 определяется только темпом захвата электронов, а время τ_2 — только темпом захвата дырок.

§ 6. Стационарные состояния

Остановимся теперь подробнее на стационарных (но неравновесных) состояниях, которые устанавливаются в полупроводнике через достаточное время после включения внешней постоянной генерации носителей заряда. В этом случае все производные по времени в уравнениях кинетики рекомбинации равны нулю и вычисление установившихся концентраций $(\delta n)_s$ и $(\delta p)_s$ сильно упрощается. Эти концентрации всегда можно выразить соотношениями (VII.2.6), и поэтому задача сводится к нахождению времени жизни τ_n и τ_p в стационарном состоянии. Отметим, что эти времена могут и не совпадать с временами релаксации τ_1 и τ_2 неравновесных концентраций в нестационарных процессах.

Для монополярного возбуждения результат получается непосредственно и искомые времена жизни выражаются формулами (5.1) или, соответственно, (5.2). Поэтому мы рассмотрим только биполярное возбуждение. Темпы генерации электронов и дырок будем считать одинаковыми.

Так как в стационарном состоянии концентрации заполненных и пустых ловушек не изменяются, то

$$R_n = R_p = R. \tag{6.1}$$

Это условие определяет неравновесную степень заполнения ловушек электронами f. Подставляя эту величину в формулу (4.7) или (4.7а), можно найти общий темп захвата электронов и дырок R и, пользуясь еще условием квазинейтральности, выразить его как функцию либо только концентрации неравновесных электронов $R(\delta n)$, либо только концентрации неравновесных дырок $R(\delta p)$.