скую ее трактовку, справедливую в применении к кристаллам типа германия и кремния, можно найти в монографии [M7]. В более сложных случаях кинетическое уравнение решают численными методами.

Несмотря на известную грубость принятых нами предположений, формулы (6.11) и (6.12) все же оказываются очень полезными. В ряде случаев они позволяют правильно указать зависимость кинетических коэффициентов от экспериментально варьируемых параметров, а также оценить порядок их величины. Дело в том, что анизотропия изоэнергетических поверхностей не всегда играет принципиальную роль. Зачастую учет ее приводит просто к появлению не слишком существенных численных коэффициентов. Более подробно этот вопрос рассматривается в § 7 и в § XIV.6.

§ 7. Элементарные стационарные решения кинетического уравнения в случае малых отклонений от равновесия

Решение кинетического уравнения в условиях, когда справедливы неравенство (5.3) и соотношение (6.11), не представляет труда. В настоящем параграфе мы будем интересоваться только стационарными состояниями, в которых функция распределения f не зависит от времени. Это соответствует постоянным полям (или постоянному градиенту температуры), со времени включения которых прошло время, заметно превышающее как время свободного пробега, так и максвелловское время релаксации.

Вновь рассмотрим по отдельности три случая, указанные в § 6. Ограничимся при этом материалами, пространственно однородными в отсутствие внешних воздействий (в частности, в отсутствие градиента температуры).

а. Статическая электропроводность. В рассматриваемом случае нет причин для возникновения зависимости функции распределения от координат, $\mathfrak{B} = 0$ и $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$.

Таким образом, кинетическое уравнение (5.4′) с учетом соотношений (6.6а) и (6.11) принимает вид

$$e(\mathfrak{E}, \mathbf{v}) f_0' - (\mathbf{p}, \mathfrak{E}) \frac{\psi}{\tau} = 0. \tag{7.1}$$

В изотропном случае (6.3) скорость $\mathbf{v}$ параллельна $\mathbf{p}$. Положим

$$\mathbf{p} = m(E)\,\mathbf{v}, \tag{7.2}$$

где $m(E)$ — некоторая величина размерности массы. При квадратичном законе дисперсии это есть просто эффективная масса носителя заряда; при учете непараболичности она зависит от энергии.

Уравнение (7.1) теперь принимает вид

$$\left(\frac{e}{m} f_0' - \frac{\psi}{\tau}\right)(\mathbf{p}, \mathfrak{E}) = 0. \tag{7.3}$$

Для краткости мы не выписываем здесь энергетические аргументы у функций m, ψ и τ.

Поскольку угол между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathscr{E}$ может быть произвольным, коэффициент при скалярном произведении $(\mathbf{p}, \mathscr{E})$ должен обращаться в нуль. Отсюда

$$\psi = \frac{e}{m} \tau f_0'. \tag{7.4}$$

Поскольку τ и f_0 зависят только от E, видим, что и ψ, как мы и предполагали, действительно зависит только от энергии, но не от направления квазиимпульса. Для функции распределения мы имеем теперь, согласно (7.4), (6.6а) и (5.1),

$$f(\mathbf{p}) = f_0(E) + \frac{e}{m} \tau (\mathbf{p}, \mathscr{E}) f_0'. \tag{7.5}$$

Теперь легко раскрыть содержание неравенства (5.3) применительно к рассматриваемой задаче. Для этой цели надо заменить скалярное произведение $(\mathbf{p}, \mathscr{E})$ в (7.5) произведением абсолютных значений и потребовать, чтобы второе слагаемое в (7.5) было по абсолютной величине много меньше первого при всех существенных значениях p и E. Это приводит к следующему неравенству:

$$\frac{e\tau p \mathscr{E}}{mkT} \ll 1. \tag{7.6}$$

В случае невырожденного газа главную роль играют «тепловые» значения

$$p \simeq p_T \equiv \sqrt{mkT}, \qquad v \simeq v_T \equiv \sqrt{kT/m}. \tag{7.7}$$

Таким образом, условие (7.6) принимает вид

$$\frac{e\mathscr{E}}{m} \tau p_T \ll kT, \tag{7.8}$$

причем под τ следует понимать значение функции $\tau(E)$, взятое при $E \simeq kT$. Левая часть (7.8) по порядку величины представляет собой не что иное, как энергию, получаемую электроном (дыркой) от поля за время свободного пробега. Видно, что она должна быть пренебрежимо мала по сравнению со средней энергией носителя заряда, уже имеющейся у него в условиях термодинамического равновесия.

С помощью второй из формул (7.7) условие (7.8) удобно переписать в виде

$$\frac{e\mathscr{E}\tau}{m} \equiv v_d \ll v_T \tag{7.9}$$

или

$$\mathscr{E} \ll \mathscr{E}_{\text{крит}} = \frac{m v_T}{e\tau}. \tag{7.9'}$$

Таким образом, принятое выше приближение оправдано, коль скоро дрейфовая скорость достаточно мала по сравнению с тепловой.

В случае полностью вырожденного газа главную роль играет область энергий $E \simeq \zeta$, где ζ — уровень Ферми, отсчитанный от края зоны, а квазиимпульс и скорость следует заменить «фермиевскими» их значениями $p_\zeta \equiv p(\zeta)$ и $v_\zeta \equiv v(\zeta)$. Вместо неравенства (7.6) при этом получается

$$\frac{e\mathcal{E}}{m}\tau p_\zeta \ll \zeta, \tag{7.6'}$$

причем $\tau = \tau(\zeta)$.

Иначе говоря, мы вновь получаем здесь условие вида (7.9):

$$v_d \ll v_\zeta,$$

или

$$\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_{\text{крит}} = \frac{mv_\zeta}{e\tau}. \tag{7.9''}$$

При $T = 77$ К, $m = 0{,}1\, m_0$ и $\tau = 10^{-13}$ с величина $\mathcal{E}_{\text{крит}}$ в невырожденном случае составляет примерно 10^4 В/см.

Неравенства (7.9′), (7.9″) определяют условия применимости линейного (по $\mathcal{E}$) приближения, принятого выше при решении кинетического уравнения. Как будет видно из дальнейшего, они же составляют и условия применимости закона Ома.

Согласно программе, намеченной в § 2, функцию распределения (7.5) надо подставить в формулу для плотности тока (2.2) и, вычислив интеграл, получить явное выражение для $\mathbf{j}$. Найденный таким путем коэффициент пропорциональности между $\mathbf{j}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ следует отождествить с электропроводностью σ. Мы имеем

$$\mathbf{j} = -\frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3}\int \frac{(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mathcal{E}})}{m^2(E)}\,\mathbf{p}\tau f_0'\,d\mathbf{p}. \tag{7.10}$$

Как и при выводе формулы (6.11), здесь удобно ввести сферические координаты, направив полярную ось вдоль вектора $\boldsymbol{\mathcal{E}}$. Из соображений симметрии ясно (и легко проверить непосредственно), что компоненты $\mathbf{j}$, перпендикулярные $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, равны нулю. Вновь вводя вместо p переменную E, отсчитываемую от E_c, мы получаем с учетом (7.2)

$$\mathbf{j} = -\frac{e^2\boldsymbol{\mathcal{E}}}{3}\int_0^\infty N(E)\,\tau(E)\,v^2(E)\,f_0'\,dE. \tag{7.11}$$

Сравнивая соотношения (7.11) и (I.1.3), находим

$$\sigma = -\frac{e^2}{3}\int_0^\infty N(E)\,\tau(E)\,v^2(E)\,f_0'\,dE. \tag{7.12}$$

Эта формула выражает электропроводность вещества через величину $\tau(E)$, характеризующую решение механической части задачи. Концентрация носителей заряда входит сюда через уровень Ферми, фигурирующий в равновесной функции распределения f_0. Согласно (V.3.1) $f_0' < 0$ и, следовательно, $\sigma > 0$, как и должно быть. Дрейфовая подвижность μ определяется равенством

$$\sigma = en\mu, \tag{7.13}$$

причем концентрация носителей заряда n дается выражением (V.4.1). Комбинируя равенства (7.12), (7.13) и (V.4.1), находим

$$\mu = -\frac{e}{3}\frac{\int\limits_0^\infty \tau v^2 N f_0'\,dE}{\int\limits_0^\infty N f_0\,dE}. \tag{7.14}$$

Это есть не что иное, как формула (I.3.13), с той лишь разницей, что здесь указан точный смысл усреднения, обозначенного там символом $\langle\ldots\rangle$. Именно, определим *эффективную массу электропроводности* m_σ *) соотношением

$$m_\sigma = -\frac{3\int\limits_0^\infty N(E) f_0(E)\,dE}{\int\limits_0^\infty N(E)\, v^2(E)\, f_0'\,dE} \equiv m_{\text{opt}}. \tag{7.15}$$

Тогда формулу (7.14) можно переписать в виде

$$\mu = \frac{e\tau_p}{m_\sigma}, \tag{7.14$'$}$$

где

$$\tau_p \equiv \langle\tau\rangle = \frac{\int\limits_0^\infty f_0 \frac{d}{dE}(\tau v^2 N)\,dE}{\int\limits_0^\infty f_0 \frac{d}{dE}(v^2 N)\,dE} = \frac{\int\limits_0^\infty f_0' \tau v^2 N\,dE}{\int\limits_0^\infty f_0' v^2 N\,dE}. \tag{7.16}$$

Как будет видно из дальнейшего, правило усреднения (7.16) справедливо и в применении к формулам, описывающим термоэдс, постоянную Холла и т. д. Величина m_σ зависит от формы изоэнергетических поверхностей и, вообще говоря, от температуры и от концентрации частиц. В случае изотропного параболического закона

*) Величину m_σ называют также оптической эффективной массой m_{opt}, с чем и связано другое ее обозначение (см. § 8 и гл. XVIII).

дисперсии она превращается в эффективную массу m, фигурирующую в законе дисперсии (III.8.4).

Отметим два предельных случая — полностью вырожденного и невырожденного газа носителей заряда. Первый из них реализуется при $\zeta \gg kT$; как видно из формулы (V.3.1), величина $|f_0'|$ тогда имеет острый максимум при $E=\zeta$ и для вычисления интегралов с гладкими функциями ее можно заменить δ-функцией:

$$f_0' \to -\delta(E-\zeta) \tag{7.17}$$

(см. Приложение XV).

При этом интегралы в (7.16) сразу вычисляются, и мы получаем

$$\tau_p = \tau(\zeta). \tag{7.18}$$

Заметим, что при любом механизме рассеяния подвижность здесь может зависеть от концентрации частиц. Это обусловлено концентрационной зависимостью энергии Ферми ζ, т. е. в конечном счете принципом Паули.

В случае невырожденного газа, когда $f_0 \simeq \exp\left(\frac{\zeta-E}{kT}\right)$, формула (7.14) принимает вид

$$\mu = \frac{e}{3kT} \frac{\int\limits_0^\infty \tau v^2 N \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE}{\int\limits_0^\infty N \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE}. \tag{7.19}$$

Поскольку принцип Паули в отсутствие вырождения роли не играет, это выражение может зависеть от концентрации частиц n только через время релаксации $\tau(E)$: функция S, фигурирующая в формуле (6.12) и получающаяся из решения механической части задачи, может зависеть от n, если играет роль взаимодействие электронов друг с другом.

При параболическом законе дисперсии мы имеем согласно (V.2.3)

$$N(E) = \frac{(2m)^{3/2} E^{1/2}}{2\pi^2 \hbar^3}.$$

Следовательно, интеграл в знаменателе (7.19) равен

$$\frac{(2m^3)^{1/2} (kT)^{3/2}}{2\pi^{3/2} \hbar^3}$$

и мы получаем, заменяя в числителе v^2 на $2E/m$,

$$\mu = \frac{4e}{3m (kT)^{5/2} \sqrt{\pi}} \int\limits_0^\infty E^{3/2} \tau \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) dE. \tag{7.20}$$

Для дальнейшего нужно знать явную зависимость времени релаксации от энергии. Как будет показано в гл. XIV, весьма часто эта зависимость оказывается степенной:

$$\tau(E) = CE^r, \tag{7.21}$$

где величина C не зависит от энергии, а r — некоторая постоянная (значения ее для ряда механизмов рассеяния указаны в таблице 14.2). Подставляя выражение (7.21) в правую часть (7.20), мы получаем

$$\mu = \frac{4e\Gamma(r + {}^5/_2)\, C}{3m\sqrt{\pi}} (kT)^r. \tag{7.20'}$$

Здесь $\Gamma(r + {}^5/_2)$ есть Γ-функция Эйлера, определяемая равенством

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty y^{x-1} e^{-y}\, dy.$$

б. Термоэдс и коэффициент Пельтье. В соответствии с § 1 (п. б) рассмотрим случай, когда внешние электрическое и магнитное поля отсутствуют, но $\nabla T \neq 0$ и имеется поле $\mathcal{E}'$ (§ 1 и § 6 (п. б)). При этом уравнение (5.4') с учетом (6.11) принимает вид

$$\left\{(e\mathcal{E}', \mathbf{v}) + (\mathbf{v}, \nabla T)\frac{E(\mathbf{p}) - \zeta}{T}\right\} f_0' = \frac{f_1}{\tau}. \tag{7.22}$$

Подставляя сюда выражение (6.6б) для f_1 и принимая во внимание соотношение (7.2), мы получаем

$$\chi_1 = \tau \frac{E(\mathbf{p}) - \zeta}{mT} f_0', \qquad \chi_2 = \frac{e\tau}{m} f_0'. \tag{7.23}$$

Как мы и предполагали, χ_1 и χ_2 зависят только от энергии электрона. Функция χ_2 имеет, как и следовало ожидать, тот же вид (7.4), что и функция φ в п. а; соответствующий вклад в плотность тока дается выражением (7.11). Для функции распределения находим согласно (5.1)

$$f = f_0 + \frac{E(\mathbf{p}) - \zeta}{mT} \tau f_0' \cdot (\mathbf{p}, \nabla T) + (\mathbf{p}, \mathcal{E}')\frac{e\tau}{m} f_0'. \tag{7.24}$$

Подставляя выражение (7.24) в формулу (2.2) для плотности тока и выполняя интегрирование так же, при выводе формулы (7.11), получим для плотности тока электронов

$$\mathbf{j} = \frac{e}{3}\nabla T \int_0^\infty v^2(E)\, N(E)\, \frac{\zeta - E}{T} f_0' \tau\, dE + \ldots, \tag{7.25}$$

где многоточием обозначено слагаемое, содержащее $(\mathbf{p}, \mathcal{E}')$; оно имеет вид (7.11) с заменой $\mathcal{E}$ на $\mathcal{E}'$.

Величина ζ в (7.25), как и всегда, отсчитывается от края зоны проводимости. При этом, поскольку перед интегралом уже имеется множитель ∇T, а градиент электрического потенциала в данном случае отличен от нуля лишь за счет градиента температуры, учитывать искривление зон при вычислении ζ не следует. Сравнивая (7.25) с равенством (1.2), находим фигурирующий там феноменологически введенный коэффициент a и, по формулам (1.6) и (7.12), дифференциальную термоэдс α:

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left\{-\frac{\zeta}{kT} + \frac{1}{kT}\frac{\int\limits_0^\infty E v^2 N \tau f_0' \, dE}{\int\limits_0^\infty v^2 N \tau f_0' \, dE}\right\}. \tag{7.26}$$

Аналогичная формула справедлива и для тока дырок — с очевидной заменой скорости, плотности состояний, функции распределения и химического потенциала на соответствующие «дырочные» величины. Это означает, в частности, что ζ надо заменить на $-E_g - \zeta$ (ср. § V.4). При параболическом законе дисперсии, когда $v^2 = 2E/m$, выражение (7.26) с учетом (V.2.3) принимает вид

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left\{-\frac{\zeta}{kT} + \frac{1}{kT}\frac{\int\limits_0^\infty E^{5/2} \tau f_0' \, dE}{\int\limits_0^\infty E^{3/2} \tau f_0' \, dE}\right\}. \tag{7.27}$$

Это — так называемая формула Писаренко.

Первое слагаемое в фигурных скобках зависит только от равновесных характеристик системы, второе же определяется и механизмом рассеяния.

Рассмотрим формулу (7.27) в частных случаях невырожденного и полностью вырожденного газа носителей заряда.

В первом из них мы получаем

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left\{-\frac{\zeta}{kT} + \frac{1}{kT}\frac{\int\limits_0^\infty E^{5/2} \tau \exp(-E/kT) \, dE}{\int\limits_0^\infty E^{3/2} \tau \exp(-E/kT) \, dE}\right\}. \tag{7.28}$$

Второе слагаемое в фигурных скобках есть некоторое безразмерное число, зависящее от вида функции $\tau(E)$. Обычно оно — порядка единицы. Так, в случае (7.21) это отношение составляет

$$\frac{\Gamma(r + 7/2)}{\Gamma(r + 5/2)} = r + 5/2,$$

т. е.

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left\{-\frac{\zeta}{kT} + (r + 5/2)\right\}. \tag{7.28'}$$

Выражения в фигурных скобках формул (7.28), (7.28′), очевидно, положительны: в отсутствие вырождения $\zeta < 0$.

С другой стороны, обращаясь к дырочному образцу, мы должны были бы, в соответствии с § IV.2, изменить знак перед k/e. Иначе говоря, для дырок мы имеем

$$\alpha = \frac{k}{e}\left\{\frac{\zeta + E_g}{kT} + (r + {}^5/_2)\right\}. \qquad (7.28'')$$

Выражение в фигурных скобках вновь положительно.

Таким образом, знак дифференциальной термоэдс определяется знаком заряда доминирующих носителей.

В случае полного вырождения аппроксимация (7.17) оказывается недостаточной. Действительно, полагая

$$f_0' = -\delta(E - \zeta),$$

мы получили бы из (7.27)

$$\alpha = -\frac{k}{e}\left\{-\frac{\zeta}{kT} + \frac{1}{kT}\,\frac{\zeta^{5/2}\,\tau(\zeta)}{\zeta^{3/2}\,\tau(\zeta)}\right\} \equiv 0.$$

Следовательно, для вычисления интегралов в (7.27) необходимо воспользоваться более точной, нежели (7.17), формулой (П.XV.5). Тогда получается

$$\alpha = -\frac{\pi^2 k^2 T}{3e\zeta}\,\tau(\zeta)\left[\frac{3}{2} + \left.\frac{d\ln\tau(E)}{d\ln E}\right|_{E=\zeta}\right]. \qquad (7.28''')$$

В качестве ζ здесь следует взять значение уровня Ферми при $T = 0$ (отсчитанное от дна зоны проводимости).

Выражение в квадратных скобках в формуле (7.28‴) представляет собой число порядка единицы. Так, в условиях (7.21) оно равно

$${}^3/_2 + r.$$

Сравнивая формулы (7.28′) и (7.28‴), видим, что в невырожденных полупроводниках термоэдс значительно больше, нежели в металлах. Действительно, вместо фигурирующего в (7.28′) отношения ζ/kT в правой части (7.28‴) появляется малый множитель kT/ζ (в металлах он составляет величину порядка 10^{-3}).

Вычислим теперь плотность потока энергии. Ограничимся при этом случаем невырожденного газа носителей заряда. Подставляя (7.24) в правую часть (2.3), мы получаем

$$\mathbf{I} = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\int \mathbf{v}(\mathbf{p})\,\tau\,\frac{E(\mathbf{p}) - \zeta}{mT}\,(\mathbf{p},\ \nabla T)\,[E(\mathbf{p}) - e\varphi]\,f_0'\,d\mathbf{p} + \\ + \frac{2e}{(2\pi\hbar)^3 m}\int \mathbf{v}(\mathbf{p})\,[E(\mathbf{p}) - e\varphi]\,\tau\,(\mathbf{p}\mathcal{E}')\,f_0'\,d\mathbf{p}. \qquad (7.29)$$

Интегралы по квазиимпульсам преобразуются здесь так же, как и в п. а. Сравнивая выражения (7.25) и (7.29), видим, что слагаемые в (7.29), содержащие $e\varphi$, в сумме равны просто $\mathbf{j}\varphi$. Пользуясь для τ формулой (7.21), мы получаем

$$\mathbf{I}=\mathbf{j}\varphi+\mathbf{I}'-\frac{2enC\Gamma\,(r+{}^7/_2)}{3m\Gamma\,({}^3/_2)}(kT)^{r+1}\mathcal{E}', \qquad (7.29')$$

где

$$\mathbf{I}'=\frac{4nC\,(kT)^{r+1}\,\Gamma\,(r+{}^7/_2)\,k}{3m\sqrt{\pi}}\left\{-\nabla T-\frac{e}{k}\mathcal{E}'+\left[\frac{\zeta}{kT}-({}^5/_2+r)\right]\nabla T\right\}. \qquad (7.30)$$

Слагаемое, заключенное в (7.30) в квадратные скобки, есть не что иное, как $e\alpha/k$. Величину $\mathcal{E}'$ можно выразить через $\mathbf{j}$ и ∇T с помощью соотношения (1.7). Обращаясь, далее, к формулам (7.13) и (7.20′), видим, что вклад в $\mathbf{I}$ от второго и третьего слагаемых в фигурных скобках в (7.30) и от последнего слагаемого в (7.29) можно записать в виде

$$-\frac{kT}{e}({}^5/_2+r)\,\mathbf{j}=-\frac{kT}{e}\left[({}^5/_2+r)-\frac{\zeta}{kT}\right]\mathbf{j}-\frac{\zeta}{e}\mathbf{j}=-\frac{\zeta}{e}\mathbf{j}+T\alpha\mathbf{j}. \qquad (7.31)$$

Отсюда явствует, что первое слагаемое в фигурных скобках в (7.30) связано с плотностью потока энергии при $\mathbf{j}=0$, т. е. с теплопроводностью электронного газа. Сопоставив формулы (7.31), (7.13) и (7.20′), найдем коэффициент теплопроводности газа носителей заряда:

$$\varkappa=\frac{4nkC\,(kT)^{r+1}\,\Gamma\,(r+{}^7/_2)}{3m\sqrt{\pi}}=\frac{k^2T\sigma}{e^2}(r+{}^5/_2). \qquad (7.32)$$

Комбинируя теперь выражения (7.29′) и (7.30) — (7.32), получаем окончательную формулу для плотности потока энергии электронов:

$$\mathbf{I}=-\frac{\zeta}{e}\mathbf{j}-\varkappa\nabla T+T\alpha\mathbf{j}. \qquad (7.33)$$

Сравнивая ее с (1.8) (при выбранном начале отсчета энергии $\zeta=F$), получаем соотношение (I.1.18):

$$\Pi=\alpha T.$$

Заметим, однако, что справедливость последнего равенства не связана непременно с теми упрощающими предположениями, которые мы сделали при выводе формулы (7.33). Фактически оно вытекает из очень общих соотношений термодинамики неравновесных процессов *).

Раскроем теперь условие (5.3) применительно к рассматриваемой задаче. Ограничимся при этом случаем невырожденного полупроводника. Пользуясь формулами (7.2) и (7.23), приходим к

---

*) Общий вывод термоэлектрических соотношений (I.1.18) и (I.1.19) можно найти в книге [M13].

следующему неравенству:

$$v_T\tau\frac{|\nabla T|}{T}\left|\frac{\zeta}{kT}-1\right|\ll 1. \tag{7.34}$$

Произведение

$$v_T\tau = l \tag{7.35}$$

называют *длиной свободного пробега* (по импульсу). Видим, что для выполнения неравенства (7.34) необходимо (но, вообще говоря, еще недостаточно), чтобы изменение температуры на длине свободного пробега было мало по сравнению с самой температурой. Последнее условие, впрочем, имеет гораздо более общий характер: при нарушении его вообще нельзя ввести представление о температуре, изменяющейся в пространстве. Действительно, понятие температуры вводится в термодинамике равновесных процессов, причем одно из условий равновесия как раз и состоит в постоянстве температуры во всей рассматриваемой системе. Обобщить определение температуры на неравновесный случай можно с помощью так называемой *гипотезы локального равновесия*. Именно, допустим, что рассматриваемое макроскопическое тело можно разделить на ряд физически бесконечно малых объемов — достаточно малых областей, каждая из которых содержит все же макроскопически много частиц (при этом линейные размеры каждой области должны быть велики по сравнению с длиной свободного пробега). Эти области можно в свою очередь рассматривать как макроскопические системы, описывая их состояние с помощью обычных понятий термодинамики. Естественно думать, что равновесие устанавливается прежде всего внутри каждой области (локально); лишь спустя известное время после этого может установиться и равновесие между областями. Мы имеем здесь еще один пример разделения процессов на быстрые и медленные (ср. § 3). Установление равновесия внутри каждой физически бесконечно малой части тела представляет собой быстрый процесс (происходящий за время порядка времени релаксации); установление же равновесия во всем объеме может быть связано с гораздо более медленными макроскопическими процессами теплопроводности, диффузии и т. д. Таким образом, оказывается возможным говорить о локальном равновесии в пределах каждого физически бесконечно малого объема при отсутствии равновесия во всей системе в целом. При этом состояние каждого малого объема можно характеризовать своей (постоянной в его пределах) температурой, своей концентрацией частиц и т. д. Тем самым приобретает ясный смысл и представление об изменяющейся в пространстве температуре. Соображения такого типа постоянно используются в задачах кинетики. В частности, они составляют основу обычной теории теплопроводности, диффузии и т. д. Тем не менее справедливость их заранее не очевидна. Действительно, как уже отмечалось, «физически бесконечно малые объемы» должны быть, с одной стороны, достаточно велики, а с другой — достаточно малы, и эти два условия должны быть совместны. Именно по этой причине мы употребляем термин «гипотеза локального равновесия», понимая под этим предположение о возможности разбить макроскопическое тело на области указанным выше образом.

в. Постоянная Холла и магнетосопротивление. Как и в случае одного лишь постоянного и однородного электрического поля, здесь нет причин для возникновения координатной зависимости функции распределения и $\mathfrak{E}' = \mathfrak{E}$. Таким образом, уравнение (5.4′), написанное для электронов, принимает вид

$$-e(\mathfrak{E},\ \mathbf{v}) f_0' - \frac{e}{c}([\mathbf{v}\times\mathfrak{B}],\ \nabla_{\mathbf{p}} f_1) = \frac{f_1}{\tau}. \tag{7.36}$$

При этом функция f_1 дается выражением (6.6в).

Преобразуем теперь второе слагаемое в левой части (7.36). Для этой цели воспользуемся известным из векторной алгебры равенством, справедливым для произвольных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$:

$$([\mathbf{a}\times\mathbf{b}],\ [\mathbf{c}\times\mathbf{d}]) = (\mathbf{a},\ \mathbf{c})(\mathbf{b},\ \mathbf{d}) - (\mathbf{a},\ \mathbf{d})(\mathbf{b},\ \mathbf{c}).$$

Получим, с учетом (6.6в),

$$([\mathbf{v}\times\mathfrak{B}],\ \nabla_{\mathbf{p}} f_1) = (\mathbf{v},\ [\mathfrak{B}\times\mathfrak{E}])\,\psi_1 + (\mathbf{v},\ \mathfrak{E})\,\mathscr{B}^2\psi_2 - (\mathbf{v},\ \mathfrak{B})(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})\,\psi_2. \tag{7.37}$$

Выражение (7.37), вообще говоря, отлично от нуля. Введем по-прежнему массу $m(E)$ равенством (7.2). Тогда, подставляя (7.37) в уравнение (7.36), мы получим

$$\left\{\left(\frac{e}{m} f_0' - \frac{1}{\tau}\right)\psi_1 + \frac{e}{mc}\mathscr{B}^2\psi_2\right\}(\mathbf{p},\ \mathfrak{E}) - \left\{\frac{e}{mc}\psi_1 + \frac{\psi_2}{\tau}\right\}(\mathbf{p},\ [\mathfrak{E}\times\mathfrak{B}]) - \\ - \left\{\frac{e}{mc}(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})\,\psi_2 + \frac{\psi_3}{\tau}\right\}(\mathbf{p},\ \mathfrak{B}) = 0. \tag{7.38}$$

Поскольку углы между векторами $\mathbf{p}$, $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{B}$ произвольны, равенство (7.38) влечет за собой условие обращения в нуль порознь всех трех выражений в фигурных скобках — коэффициентов при скалярных произведениях $(\mathbf{p},\ \mathfrak{E})$, $(\mathbf{p},\ [\mathfrak{E}\times\mathfrak{B}])$ и $(\mathbf{p},\ \mathfrak{B})$. Это дает три линейных уравнения для определения трех искомых функций ψ_1, ψ_2 и ψ_3. Решая их, находим

$$\psi_1 = -\frac{e\tau}{m(1+\omega_c^2\tau^2)} f_0', \tag{7.39а}$$

$$\psi_2 = -\frac{1}{c}\,\frac{e^2\tau}{m^2(1+\omega_c^2\tau^2)} f_0', \tag{7.39б}$$

$$\psi_3 = -(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})\,\frac{1}{c^2}\,\frac{e^3\tau}{m^3(1+\omega_c^2\tau^2)} f_0'. \tag{7.39в}$$

Здесь

$$\omega_c(E) = \frac{\mathscr{B}e}{m(E)\,c}. \tag{7.40}$$

При параболическом законе дисперсии, когда функция $m(E)$ превращается в константу, это есть уже известная нам (§ IV.3), циклотронная частота. Произведение $\omega_c\tau$ определяет дугу, описываемую электроном (дыркой) за время свободного пробега τ. Это позволяет наглядно интерпретировать сомножитель $\tau(1+\omega_c^2\tau^2)^{-1}$, фигурирующий во всех трех формулах (7.39а — в). Как мы видели в гл. I, во время между столкновениями частица в магнитном поле движется не по прямой, а по циклоиде; в то же время вклад в ток определяется лишь проекцией перемещения частицы на направление плотности тока. Таким образом, магнитное поле действует в известном смысле как «рассеиватель», отклоняя частицы от движения вдоль линий тока. Знаменатель $(1+\omega_c^2\tau^2)$ как раз и учитывает это отклонение, приводя к уменьшению «эффективного времени свободного пробега» $\tau(1+\omega_c^2\tau^2)^{-1}$ по сравнению с системой без магнитного поля. При исчезновении магнитного поля ($\mathscr{B}\to 0$) решение (6.6в) (7.39а — в), разумеется, переходит в (6.6а), (7.4).

Подставляя теперь выражение (6.6в) в формулу (2.2) для плотности тока и выполняя интегрирование так же, как и в п. *а*, получим выражение вида (1.15), но с явно вычисленными коэффициентами при векторах ($\mathfrak{E}$, $[\mathfrak{E}\times\mathfrak{B}]$) и $\mathfrak{B}(\mathfrak{B},\ \mathfrak{E})$. Эти коэффициенты и следует отождествить с феноменологически введенными там величинами a_1, a_2, a_3.

Ограничимся случаем параболического закона дисперсии. При подстановке (6.6в) с учетом (7.39а — в) в формулу (2.2) появятся интегралы

$$\mathscr{J}_k=-\int\limits_0^\infty E^{3/2}f_0'\,\frac{\tau^k(E)}{1+\omega_c^2\tau^2}\,dE, \tag{7.41}$$

где k — целые числа.

Получим для коэффициентов a_1, a_2, a_3

$$a_1=\frac{2e^2\sqrt{2m}}{3\pi^2\hbar^3}\mathscr{J}_1,\quad a_2=\frac{2e^2\sqrt{2m}}{3\pi^2\hbar^3}\,\frac{e}{mc}\mathscr{J}_2,\quad a_3=\frac{2e^2\sqrt{2m}}{3\pi^2\hbar^3}\,\frac{e^2}{m^2c^2}\mathscr{J}_3. \tag{7.42}$$

В случае полного вырождения

$$\mathscr{J}_k=\frac{\zeta^{3/2}\,\tau^k(\zeta)}{1+\omega_c^2(\zeta)\,\tau^2(\zeta)}. \tag{7.41'}$$

В невырожденном случае интегралы $\mathscr{J}_k$ довольно сложным образом зависят от магнитной индукции и от температуры. Явный вид их можно найти, лишь решив механическую часть задачи.

Исключение составляют только случаи слабого и сильного магнитных полей, определяемые, соответственно, неравенствами

$$\omega_c^2\tau^2(E)\ll 1 \quad \text{и} \quad \omega_c^2\tau^2(E)\gg 1. \tag{7.43}$$

В первом из них мы получаем

$$\mathcal{J}_k \simeq -\int_0^\infty E^{3/2}\tau^k(E)f_0'(1-\omega_c^2\tau^2)\,dE, \tag{7.44а}$$

а во втором

$$\mathcal{J}_k \simeq -\frac{1}{\omega_c^2}\int_0^\infty E^{3/2}\tau^{k-2}(E)f_0'\,dE. \tag{7.44б}$$

Отметим, что при $k=2$ время релаксации выпадает из (7.44б) и мы получаем

$$\mathcal{J}_2 = \frac{3(kT)^{3/2}\sqrt{\pi}}{4\omega_c^2}\Phi_{1/2}\left(\frac{\zeta}{kT}\right). \tag{7.44б$'$}$$

Подставляя выражения (7.44а) при $k = 1, 2, 3$ в правые части (7.42), получим для плотности тока в слабом поле выражение вида (1.15′), причем

$$\delta = -\beta = \frac{2e^2\sqrt{2m}}{3\pi^2\hbar^3}\frac{e^2}{m^2c^2}\int_0^\infty E^{3/2}\tau f_0'\,dE, \qquad \gamma = 0. \tag{7.45}$$

Последнее равенство явствует уже из ссображений симметрии изложенных в § 1.

Формулы (7.42) позволяют, в частности, вычислить постоянную Холла и магнетосопротивление для двух специальных ориентаций магнитного поля, рассмотренных в § I.3. Рассмотрим эти два случая по отдельности.

1) Поперечное поле: $\mathfrak{B} \perp \mathbf{j}$. Согласно (1.19) и (7.42) выражение для постоянной Холла имеет вид

$$R = -\frac{3\pi^2\hbar^3}{2ec\sqrt{2m^3}}\frac{\mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1^2+\omega_c^2\mathcal{J}_2^2}.$$

Удобно явно ввести сюда концентрацию носителей заряда n, пользуясь формулой (V.4.4).

Тогда для постоянной Холла получается формула вида (I.3.17):

$$R = -\frac{\gamma}{nec}, \tag{7.46}$$

причем безразмерный коэффициент γ дается равенством

$$\gamma = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\Phi_{1/2}\left(\frac{\zeta}{kT}\right)(kT)^{3/2}\frac{\mathcal{J}_2}{\mathcal{J}_1^2+\omega_c^2\mathcal{J}_2^2}. \tag{7.47}$$

Он зависит от степени вырождения и от вида функции $\tau(E)$, т. е. от механизма рассеяния.

В случае полного вырождения правая часть (7.47) легко вычисляется: согласно § V.6 и (7.41′) в указанных условиях

$$\gamma_{\text{вырожд}} = 1. \tag{7.47$'$}$$

Этот результат справедлив при любом механизме рассеяния и при любом значении магнитной индукции.

То же значение γ получается и при любой степени вырождения, если магнитное поле сильное. Действительно, согласно (7.44б) и (7.44б′) мы имеем в этом случае

$$\gamma_{\text{сильн. поле}} = 1 + O\left(\frac{1}{\omega_c^2\tau^2}\right). \tag{7.47″}$$

Как можно показать *), этот результат справедлив и при учете квантовых эффектов, если только выполняется второе из неравенств (7.43). Это обстоятельство особенно важно потому, что, как мы знаем (§ IV.5), именно в области сильных магнитных полей квантовые эффекты могут играть заметную роль.

С другой стороны, в слабом поле мы имеем согласно (7.44а)

$$\gamma_{\text{слаб. поле}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}\Phi_{1/2}\left(\frac{\zeta}{kT}\right)(kT)^{3/2}\frac{\mathcal{J}_2^{(0)}}{(\mathcal{J}_1^{(0)})^2}, \tag{7.48}$$

где

$$\mathcal{J}_k^{(0)} = -\int_0^\infty E^{3/2}\tau^k f_0'\,dE.$$

В частности, для невырожденной системы формула (7.48) принимает вид

$$\gamma_{\text{слаб. поле, невырожд}} = \frac{3\sqrt{\pi}\,(kT)^{5/2}}{4}\,\frac{\int_0^\infty E^{3/2}\tau^2\exp(-E/kT)\,dE}{\left[\int_0^\infty E^{3/2}\tau\exp(-E/kT)\,dE\right]^2}. \tag{7.48′}$$

Как и в задаче о подвижности, мы получили формулу того же вида (I.3.19), что и в элементарной кинетической теории. В случае степенной зависимости τ от энергии (7.21) формула (7.48′) принимает вид

$$\gamma_{\text{слаб. поле, невырожд}} = \frac{3\sqrt{\pi}\,\Gamma(2r+5/2)}{4\Gamma^2(r+5/2)}. \tag{7.48″}$$

Граница между сильными и слабыми полями определяется характерным значением индукции

$$\mathcal{B}_{\text{крит}} = \frac{mc}{e\tau}. \tag{7.49}$$

Полагая для оценки $\tau = 10^{-13}$ с, мы имеем

$$\mathcal{B}_{\text{крит}} = 6\cdot 10^5\frac{m}{m_0}\ \text{Гс}, \tag{7.49′}$$

*) См. [1] (статья № 10).

где m_0, как всегда, есть масса свободного электрона. Согласно (7.43) магнитное поле называется, соответственно, сильным или слабым, если $\mathcal{B} \gg \mathcal{B}_{\text{крит}}$ или $\mathcal{B} \ll \mathcal{B}_{\text{крит}}$. Видно, что в веществах с малыми эффективными массами сильные в указанном смысле поля могут быть не так уж велики. Так, при $m/m_0 = 0{,}01$ получаем $\mathcal{B}_{\text{крит}} = 6000$ Гс.

Заметим, однако, что, как уже отмечалось в гл. IV, в достаточно сильном магнитном поле может оказаться несостоятельной вся схема расчета, основанная на кинетическом уравнении. Действительно, как мы видели в § IV.5, сильное магнитное поле радикально меняет энергетический спектр носителя заряда. Пренебречь этими квантовыми эффектами можно, лишь если выполняется неравенство (IV.5.19).

Таким образом, рассматривая влияние магнитного поля на кинетические характеристики и энергетический спектр носителей заряда, следует различать три случая:

1) классические слабые поля: $\mathcal{B} \ll \mathcal{B}_{\text{крит}}$, $\dfrac{e\hbar\mathcal{B}}{mc} < \bar{E}$;

2) классические сильные поля: $\mathcal{B} \gg \mathcal{B}_{\text{крит}}$, $\dfrac{e\hbar\mathcal{B}}{mc} < \bar{E}$;

3) квантующие поля: $\dfrac{e\hbar\mathcal{B}}{mc} > \bar{E}$.

Здесь $\bar{E}$ есть характерная энергия носителей заряда. В отсутствие вырождения $\bar{E} \simeq kT$, в условиях полного вырождения $\bar{E} = \zeta$.

Кинетические коэффициенты, описывающие поведение вещества в квантующих полях, вычисляют методами квантовой теории необратимых процессов (см., например, книгу [1]).

Поперечное магнетосопротивление $\dfrac{\rho_\perp - \rho_0}{\rho_0}$, согласно формулам (1.20), (7.12) и (7.42), дается равенством

$$\frac{\rho_\perp - \rho_0}{\rho_0} = \frac{\mathcal{J}_1 \mathcal{J}_1^{(0)}}{\mathcal{J}_1^2 + \omega_c^2 \mathcal{J}_2^2} - 1. \tag{7.50}$$

Подставляя сюда выражения (7.41) и (7.44б), видим, что формула (7.50), как и следовало ожидать, воспроизводит результат элементарной теории (I.3.21).

С помощью формулы (7.41′) легко убедиться, что в случае полного вырождения правая часть (7.50) тождественно обращается в нуль — магнетосопротивление отсутствует. Как можно показать [M7], этот результат связан с использованной нами идеализацией — пренебрежением анизотропией изоэнергетических поверхностей. При учете анизотропии магнетосопротивление вырожденного электронного газа оказывается, вообще говоря, конечным.

Конечное значение магнетосопротивления получается также, если вырождение неполное и время релаксации зависит от энергии. Зависимость магнетосопротивления от величины магнитной индукции при этом оказывается довольно сложной, определяясь видом функции $\tau(E)$, т. е. механизмом рассеяния. В предельных случаях слабого и сильного поля справедливы формулы (I.3.22) и (I.3.26). В случае, когда зависимость τ от энергии описывается степенной функцией (7.21) и газ носителей заряда не вырожден, мы получаем, пользуясь формулой (7.41),

$$\left.\frac{\rho_{\perp}-\rho_0}{\rho_0}\right|_{\text{сильн. поле}} = \frac{16}{9\pi}\Gamma(5/2-r)\,\Gamma(5/2+r)-1 \qquad (7.50')$$

и

$$\left.\frac{\rho_{\perp}-\rho_0}{\rho_0}\right|_{\text{слаб. поле}} = \omega_c^2 C^2 (kT)^{2r}\,\frac{\Gamma(3r+5/2)\,\Gamma(r+5/2)-\Gamma^2(2r+5/2)}{\Gamma^2(r+5/2)}. \qquad (7.50'')$$

Заметим, однако, что именно магнетосопротивление оказывается очень чувствительным к анизотропии изоэнергетических поверхностей. Поэтому область применимости формул (7.50) — (7.50″) довольно ограничена. В частности, при более сложном законе дисперсии насыщение магнетосопротивления может и не иметь места.

2) *Продольное поле:* $\mathfrak{B} \parallel \mathbf{j}$. Согласно (1.21) и (7.42) мы имеем

$$\frac{\rho_{\parallel}-\rho_0}{\rho_0} = \frac{\mathcal{J}_1^{(0)}-\mathcal{J}_1-\omega_c^2\mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1+\omega_c^2\mathcal{J}_3}. \qquad (7.51)$$

Согласно (7.41) эта величина тождественно обращается в нуль: в рамках принятой модели продольное магнетосопротивление отсутствует при любой степени вырождения носителей заряда. Этот результат связан с пренебрежением анизотропией изоэнергетических поверхностей. При учете последней продольное магнетосопротивление становится, вообще говоря, конечным. Действительно, в этом случае равенства (7.45), вообще говоря, уже не имеют места и правая часть равенства (1.24) остается конечной. Таким образом, обнаружив на опыте конечное значение продольного магнетосопротивления в неквантующем магнитном поле, мы можем утверждать, что изоэнергетические поверхности в данном материале анизотропны.

В условиях применимости кинетического уравнения намеченная и проиллюстрированная выше схема вычисления кинетических коэффициентов носит вполне общий характер. Выражения для различных кинетических коэффициентов, в том числе описывающих термомагнитные явления, можно найти, например, в книге [М7].

§ 8. Носители заряда в слабом переменном электрическом поле

Рассмотрим задачу об электропроводности однородного образца n-типа в переменном электромагнитном поле. Пусть напряженности электрического и магнитного полей гармонически меняются со временем с круговой частотой ω. Изменением $\mathcal{E}$ в пространстве, равно