индукции при этом оказывается довольно сложной, определяясь видом функции $\tau(E)$, т. е. механизмом рассеяния. В предельных случаях слабого и сильного поля справедливы формулы (I.3.22) и (I.3.26). В случае, когда зависимость τ от энергии описывается степенной функцией (7.21) и газ носителей заряда не вырожден, мы получаем, пользуясь формулой (7.41),

$$\left.\frac{\rho_\perp-\rho_0}{\rho_0}\right|_{\text{сильн. поле}}=\frac{16}{9\pi}\Gamma\left({}^5/_2-r\right)\Gamma\left({}^5/_2+r\right)-1 \tag{7.50$'$}$$

и

$$\left.\frac{\rho_\perp-\rho_0}{\rho_0}\right|_{\text{слаб. поле}}=\omega_c^2C^2(kT)^{2r}\,\frac{\Gamma\left(3r+{}^5/_2\right)\Gamma\left(r+{}^5/_2\right)-\Gamma^2\left(2r+{}^5/_2\right)}{\Gamma^2\left(r+{}^5/_2\right)}. \tag{7.50$''$}$$

Заметим, однако, что именно магнетосопротивление оказывается очень чувствительным к анизотропии изоэнергетических поверхностей. Поэтому область применимости формул (7.50) — (7.50″) довольно ограничена. В частности, при более сложном законе дисперсии насыщение магнетосопротивления может и не иметь места.

2) *Продольное поле:* $\mathfrak{B}\parallel\mathbf{j}$. Согласно (1.21) и (7.42) мы имеем

$$\frac{\rho_\parallel-\rho_0}{\rho_0}=\frac{\mathcal{J}_1^{(0)}-\mathcal{J}_1-\omega_c^2\mathcal{J}_3}{\mathcal{J}_1+\omega_c^2\mathcal{J}_3}. \tag{7.51}$$

Согласно (7.41) эта величина тождественно обращается в нуль: в рамках принятой модели продольное магнетосопротивление отсутствует при любой степени вырождения носителей заряда. Этот результат связан с пренебрежением анизотропией изоэнергетических поверхностей. При учете последней продольное магнетосопротивление становится, вообще говоря, конечным. Действительно, в этом случае равенства (7.45), вообще говоря, уже не имеют места и правая часть равенства (1.24) остается конечной. Таким образом, обнаружив на опыте конечное значение продольного магнетосопротивления в неквантующем магнитном поле, мы можем утверждать, что изоэнергетические поверхности в данном материале анизотропны.

В условиях применимости кинетического уравнения намеченная и проиллюстрированная выше схема вычисления кинетических коэффициентов носит вполне общий характер. Выражения для различных кинетических коэффициентов, в том числе описывающих термомагнитные явления, можно найти, например, в книге [M7].

§ 8. Носители заряда в слабом переменном электрическом поле

Рассмотрим задачу об электропроводности однородного образца n-типа в переменном электромагнитном поле. Пусть напряженности электрического и магнитного полей гармонически меняются со временем с круговой частотой ω. Изменением $\mathcal{E}$ в пространстве, равно как и влиянием магнитного поля на поведение носителей заряда, будем пренебрегать. Как видно из (3.5), последняя аппроксимация оправдана, коль скоро средняя скорость носителей заряда мала по сравнению со скоростью света в пустоте. Действительно, в отличие от случая, рассмотренного в § 7 п. в, напряженности электрического и магнитного полей в электромагнитной волне не независимы, а связаны друг с другом. Так, в плоской волне они относятся, как $\sqrt{\mu/\varepsilon}$, где μ и ε — значения магнитной и диэлектрической проницаемости на соответствующей частоте; по порядку величины это отношение обычно не меньше 0,1 (исключение могут составить сегнетоэлектрики при достаточно низких частотах). Условие, при котором допустима первая из указанных аппроксимаций, будет выписано в конце этого параграфа.

В рассматриваемых условиях кинетическое уравнение (3.12) принимает вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} - e(\mathcal{E}, \nabla_p f) + \frac{f - f_0}{\tau(E)} = 0. \tag{8.1}$$

Удобно положить

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m e^{-i\omega t}, \tag{8.2}$$

где $\mathcal{E}_m$ — амплитуда напряженности поля, а произвольная начальная фаза положена равной нулю.

Как и в случае постоянного поля, решение уравнения (8.1) можно записать в виде (5.1) и (6.6а), с той лишь разницей, что теперь напряженность электрического поля дается равенством (8.2). Подставляя выражения (5.1) и (6.6а) в уравнение (8.1) и ограничиваясь по-прежнему членами, линейными по $\mathcal{E}$, мы получаем

$$\psi = \frac{e}{m} \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} f_0'. \tag{8.3}$$

Сравнивая это с выражением (7.4), видим, что единственное отличие ψ от случая постоянного поля состоит в замене τ на комплексный множитель $\tau(1 - i\omega\tau)^{-1}$:

$$f = f_0 + \frac{e}{m}(\mathbf{p}, \mathcal{E}_m) \frac{\tau}{1 - i\omega\tau} f_0' e^{-i\omega t}. \tag{8.4}$$

Видим, что между колебаниями неравновесной части функции распределения и напряженности поля имеется сдвиг фаз, равный $\operatorname{arctg} \omega\tau$. Когда период колебаний $2\pi/\omega$ значительно превышает время релаксации ($\omega\tau \ll 1$), этот сдвиг очень мал; в противоположном предельном случае ($\omega\tau \gg 1$) он оказывается близким к $\pi/2$. Происхождение этого сдвига ясно из сказанного в § 6: скорость «приспособления» функции распределения к изменившемуся электрическому полю определяется временем τ; поскольку оно отлично от нуля, колебания f_1 должны отставать по фазе от колебаний $\mathcal{E}(t)$. В этом смысле можно сказать, что газ носителей заряда (как и любых других частиц) обладает своеобразной «инерцией». Подчеркнем, однако, что этот эффект обусловлен не массой частиц, а статистическими свойствами их системы. Именно, поле ускоряет все электроны (дырки) одинаковым образом, но на виде функции распределения это сказывается лишь в результате столкновений.

В соответствии с формулой (8.4) комплексной оказывается и электропроводность газа носителей заряда в переменном поле. Действительно, подставляя выражение (8.4) в правую часть (2.2) и выполняя те же вычисления, что и в § 7 (п. *а*), мы получаем

$$\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2, \tag{8.5}$$

причем вещественная и мнимая части электропроводности σ_1 и σ_2 даются формулами

$$\sigma_1 = -\frac{e^2}{3}\int\limits_0^\infty N(E)\,v^2\,\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}\,f_0'\,dE \tag{8.6}$$

и

$$\sigma_2 = -\frac{\omega e^2}{3}\int\limits_0^\infty N(E)\,v^2\,\frac{\tau^2}{1+\omega^2\tau^2}\,f_0'\,dE. \tag{8.7}$$

При $\omega \to 0$ величина σ_1 переходит в статическую электропроводность (7.12), а σ_2 обращается в нуль, чего и следовало ожидать. С другой стороны, при возрастании частоты электрического поля σ_1 уменьшается по сравнению со статической проводимостью. Причина этого ясна из сказанного выше о происхождении сдвига фаз $\operatorname{arctg}\omega\tau$: не поспевая полностью за колебаниями напряженности поля, система свободных носителей заряда ведет себя — в какой-то мере — как совокупность связанных зарядов. Последние не дают вклада в ток проводимости, что и отражается в уменьшении σ_1.

При $\omega\tau \to \infty$ формула (8.6) принимает простой вид:

$$\sigma_1 = -\frac{e^2}{3\omega^2}\int\limits_0^\infty N\tau^{-1}v^2 f_0'\,dE. \tag{8.8}$$

Частотная зависимость σ_1 определяется этим выражением явно; она имеет место при любом механизме рассеяния. Заметим, что, в отличие от статической проводимости, σ_1 в рассматриваемых условиях не возрастает, а убывает с увеличением времени свободного пробега: здесь существенно не рассеяние, ограничивающее подвижность носителей заряда, а сдвиг фаз между колебаниями f_1 и $\mathcal{E}$.

Наличие мнимой части у электропроводности, разумеется, не означает, что комплексным будет джоулево тепло Q: последнее определяется вещественной частью σ. Так, в среднем за период

$$Q = \frac{1}{2} \mathcal{E}_m^2 \sigma_1. \tag{8.9}$$

Физический смысл мнимой части σ ясен из тех же соображений, которые были выше использованы для объяснения частотной зависимости σ_1. В соответствии с ними следует ожидать, что выражение σ_2 будет описывать плотность поляризационного тока, а сама величина σ_2 окажется связанной с вещественной частью диэлектрической проницаемости.

Чтобы найти искомую связь, напишем то уравнение Максвелла, в котором фигурирует плотность тока:

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}. \tag{8.10}$$

Здесь $\mathbf{j} = (\sigma_1 + i\sigma_2)\,\mathfrak{E}$, а $\mathfrak{D}$ есть вектор индукции:

$$\mathfrak{D} = \varepsilon_0 \mathfrak{E}, \tag{8.11}$$

где ε_0 — диэлектрическая проницаемость решетки, вычисленная без учета свободных носителей заряда на частоте ω *). Нас интересует решение с гармонической (вида (8.2)) зависимостью векторов $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{H}$ от времени. При этом уравнение (8.10) принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \left(\omega \frac{\varepsilon_2}{4\pi} + \sigma_1\right) \mathfrak{E} - \frac{i\omega}{c} \left(\varepsilon_1 - \frac{4\pi}{\omega} \sigma_2\right) \mathfrak{E}. \tag{8.12}$$

Здесь ε_1 и ε_2 — вещественная и мнимая части $\varepsilon_0(\omega)$.

Очевидно, что в смысле создания магнитного поля влияние слагаемого — $4\pi\sigma_2/\omega$ физически неотличимо от влияния ε_1. Следовательно, в соответствии с нашими ожиданиями, мнимая часть электропроводности газа свободных носителей заряда определяет их вклад $\Delta\varepsilon$ в вещественную часть диэлектрической проницаемости **):

$$\Delta\varepsilon = -\frac{4\pi}{\omega} \sigma_2 = +\frac{4\pi e^2}{3} \int_0^\infty N(E)\, v^2(E)\, f_0' \frac{\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2}\, dE. \tag{8.13}$$

Согласно (8.13) величина $\Delta\varepsilon$ оказывается отрицательной ($f_0' < 0$). При этом абсолютное значение ее может оказаться и больше ε_1.

---

*) В случае сегнетоэлектрических полупроводников под ε_0 в последующих формулах надо понимать дифференциальную диэлектрическую проницаемость, определяемую для коллинеарных векторов $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ как $dD/d\mathcal{E}$.

**) Равенство (8.13) есть частный случай общего соотношения между комплексными электропроводностью и диэлектрической проницаемостью, вытекающего из уравнения (8.12). Это соотношение показывает, что ε и σ представляют собой, в сущности, одну комплексную характеристику системы в переменном поле. Тот факт, что иногда их все же вводят независимо, объясняется лишь историческими причинами и соображениями удобства.

Соответственно вещественная часть полной диэлектрической проницаемости может оказаться отрицательной. Как известно из электродинамики, это означает, что волны соответствующей частоты не могут распространяться в данном веществе, испытывая полное отражение от его поверхности. Такая ситуация иногда реализуется в плазме (в частности, в ионосфере).

Как и (8.6), формулы (8.7) и (8.13) упрощаются при $(\omega\tau)^2 \gg 1$. При этом величины σ_2 и $\Delta\varepsilon$ вообще перестают зависеть от механизма рассеяния. Так, вместо (8.13) мы получаем (ср. (7.15))

$$\Delta\varepsilon = -\frac{4\pi n e^2}{m_{\text{opt}}\omega^2}. \tag{8.14}$$

Согласно (8.14) эффективную массу можно было бы определить, измеряя диэлектрическую проницаемость вещества как функцию частоты (особенно если из других соображений уже известно, что зона — простая параболическая, когда $m_{\text{opt}} = m$). При этом, однако, возникают два осложнения. Во-первых, условие $(\omega\tau)^2 \gg 1$ оказывается довольно жестким: при не слишком низких температурах характерное время свободного пробега может составлять $10^{-13} \div 10^{-12}$ с; соответственно область частот, в которой справедлива формула (8.14), может оказаться неудобной для радиотехнических измерений обычного типа. Во-вторых, учет анизотропии лишает результаты однозначности. Действительно, пусть изоэнергетические поверхности представляют собой эллипсоиды и значения эффективных масс вдоль главных осей суть m_x, m_y, m_z. В пренебрежении рассеянием формулу для $\Delta\varepsilon$ легко обобщить и на этот случай. Для этой цели надо лишь заметить, что массы m_x, m_y и m_z должны входить в формулу для $\Delta\varepsilon$ равноправно, а при совпадении их друг с другом должна получиться формула (8.14). Этим условиям удовлетворяет выражение

$$\Delta\varepsilon = -\frac{4\pi n e^2}{m_{\text{opt}}\omega^2}, \tag{8.14'}$$

где

$$\frac{1}{m_{\text{opt}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_y} + \frac{1}{m_z}\right). \tag{8.15}$$

Из формулы (8.14′) виден смысл названия *оптическая эффективная масса*: именно эта величина фигурирует при описании ряда оптических явлений, в которых участвуют свободные носители заряда. Оправдан и термин «эффективная масса электропроводности». Действительно, при постоянном и изотропном времени релаксации τ выражение для вещественной части электропроводности кубического кристалла можно было бы записать в виде

$$\sigma_1 = \frac{ne^2}{m_{\text{opt}}}\frac{\tau}{1+\omega^2\tau^2}. \tag{8.14''}$$

Следует, однако, помнить, что фактически время релаксации само зависит от эффективных масс. Более того, как указывалось в § 6, в системе с анизотропным законом дисперсии вообще нельзя ввести единое время релаксации импульса, не зависящее от ориентации последнего относительно осей кристалла.

Из формулы (8.14′) видно, что измерение $\Delta\varepsilon$ может дать не каждую из эффективных масс по отдельности, а только их комбинацию (8.15). В этом отношении метод диамагнитного резонанса (§ IV.3) обладает явным преимуществом.

Чтобы выяснить, в какой мере оправдано принятое выше пренебрежение изменением напряженности поля в пространстве, заменим выражение (8.2) плоской волной с волновым вектором $\mathbf{k}$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_m e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}. \tag{8.16}$$

Аналогичными выражениями будут описываться и векторы $\mathfrak{D}$ и $\mathbf{j}$. Неравновесная часть функции распределения при этом также должна содержать множитель $e^{i\mathbf{kr}}$, а кинетическое уравнение надо писать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v},\ \nabla f) - e(\mathcal{E},\ \nabla_p f) + \frac{f-f_0}{\tau(E)} = 0. \tag{8.17}$$

Соответственно диэлектрическая проницаемость и электропроводность системы будут зависеть как от ω, так и от $\mathbf{k}$. Последняя зависимость носит название пространственной дисперсии. Очевидно, однако, что второе слагаемое в левой части (8.17) есть $i(\mathbf{k},\ \mathbf{v}) f_1$. Отношение его к последнему слагаемому по абсолютной величине равно

$$kv_{\text{т}}\tau = 2\pi \frac{l}{\lambda},$$

где $l = v_{\text{т}}\tau$ есть длина свободного пробега по импульсу, а $\lambda = 2\pi/k$ — длина электромагнитной волны. Видим, что пространственным изменением напряженности поля в рассматриваемой задаче можно пренебречь, коль скоро длина свободного пробега достаточно мала по сравнению с длиной волны. Типичные значения длины свободного пробега во многих интересных полупроводниках составляют $10^{-6} \div 10^{-4}$ см. Таким образом, принятая нами аппроксимация оправдана в довольно широком интервале длин волн.

§ 9. Плазменные волны

Особый интерес представляет случай, когда полная диэлектрическая проницаемость образца

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma \tag{9.1}$$

обращается в нуль. Чтобы выяснить, как влияет последнее обстоятельство на поведение электрического поля в образце, напишем