Следует, однако, помнить, что фактически время релаксации само зависит от эффективных масс. Более того, как указывалось в § 6, в системе с анизотропным законом дисперсии вообще нельзя ввести единое время релаксации импульса, не зависящее от ориентации последнего относительно осей кристалла.

Из формулы (8.14′) видно, что измерение $\Delta\varepsilon$ может дать не каждую из эффективных масс по отдельности, а только их комбинацию (8.15). В этом отношении метод диамагнитного резонанса (§ IV.3) обладает явным преимуществом.

Чтобы выяснить, в какой мере оправдано принятое выше пренебрежение изменением напряженности поля в пространстве, заменим выражение (8.2) плоской волной с волновым вектором $\mathbf{k}$:

$$\boldsymbol{\mathcal{E}} = \boldsymbol{\mathcal{E}}_m e^{-i\omega t + i\mathbf{kr}}. \tag{8.16}$$

Аналогичными выражениями будут описываться и векторы $\boldsymbol{\mathfrak{D}}$ и $\mathbf{j}$. Неравновесная часть функции распределения при этом также должна содержать множитель $e^{i\mathbf{kr}}$, а кинетическое уравнение надо писать в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v},\ \nabla f) - e\,(\boldsymbol{\mathcal{E}},\ \nabla_p f) + \frac{f - f_0}{\tau(E)} = 0. \tag{8.17}$$

Соответственно диэлектрическая проницаемость и электропроводность системы будут зависеть как от ω, так и от $\mathbf{k}$. Последняя зависимость носит название пространственной дисперсии. Очевидно, однако, что второе слагаемое в левой части (8.17) есть $i\,(\mathbf{k},\ \mathbf{v})\,f_1$. Отношение его к последнему слагаемому по абсолютной величине равно

$$kv_{\text{т}}\tau = 2\pi\,\frac{l}{\lambda},$$

где $l = v_{\text{т}}\tau$ есть длина свободного пробега по импульсу, а $\lambda = 2\pi/k$ — длина электромагнитной волны. Видим, что пространственным изменением напряженности поля в рассматриваемой задаче можно пренебречь, коль скоро длина свободного пробега достаточно мала по сравнению с длиной волны. Типичные значения длины свободного пробега во многих интересных полупроводниках составляют $10^{-6} \div 10^{-4}$ см. Таким образом, принятая нами аппроксимация оправдана в довольно широком интервале длин волн.

§ 9. Плазменные волны

Особый интерес представляет случай, когда полная диэлектрическая проницаемость образца

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{4\pi i}{\omega}\,\sigma \tag{9.1}$$

обращается в нуль. Чтобы выяснить, как влияет последнее обстоятельство на поведение электрического поля в образце, напишем соответствующие уравнения Максвелла и уравнение непрерывности. Магнитным полем электромагнитной волны при этом будем полностью пренебрегать. Обозначая через ρ объемную плотность заряда, мы имеем

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = 4\pi\rho, \quad \frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0. \tag{9.2}$$

Будем искать решение этих уравнений в виде (8.16). Тогда (с учетом (8.11))

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = i\,[\mathbf{k} \times \mathfrak{E}], \quad \operatorname{div} \mathfrak{D} = i\varepsilon_0 (\mathbf{k},\ \mathfrak{E})$$

и для амплитуды поля $\mathfrak{E}_m$ получаются два уравнения:

$$[\mathbf{k} \times \mathfrak{E}_m] = 0, \quad \varepsilon\,(\mathbf{k},\ \mathfrak{E}_m) = 0. \tag{9.3}$$

При $\varepsilon \neq 0$ уравнения (9.3) имеют, очевидно, только тривиальное решение $\mathfrak{E}_m = 0$. Этого и следовало ожидать, ибо мы пренебрегли взаимосвязью электрического и магнитного полей, т. е. как раз тем фактором, который обеспечивает существование электромагнитных волн. Однако при $\varepsilon = 0$ положение меняется. Действительно, второе из уравнений (9.3) при этом превращается в тождество, а из первого следует лишь, что $\mathfrak{E}_m \parallel \mathbf{k}$, т. е. что рассматриваемые волны должны быть продольными. Итак, при $\varepsilon = 0$ оказывается возможным распространение продольных волн напряженности электрического поля и объемной плотности заряда. Эти волны называют *плазменными*. В сущности, они представляют собой один из типов нормальных колебаний поля в среде со свободными зарядами. Физический механизм их распространения состоит в том, что колебания плотности заряда и напряженности поля взаимно поддерживают друг друга.

Рассмотрим условие $\varepsilon = 0$, ограничиваясь для простоты достаточно высокими частотами ($\omega^2\tau^2 \gg 1$), когда $\Delta\varepsilon$ дается выражением (8.14′), а вещественной частью электропроводности σ_1 можно пренебречь. Диэлектрическую проницаемость решетки будем считать вещественной ($\varepsilon_0 = \varepsilon_1$). Это означает, что нас будет интересовать интервал частот, далеких от области поглощения света самой решеткой.

В принятых аппроксимациях $\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$ и условие $\varepsilon = 0$ принимает вид

$$\omega^2 = \frac{4\pi n e^2}{\varepsilon_0 m_{\mathrm{opt}}} \equiv \omega_{\mathrm{pl}}^2. \tag{9.4}$$

Частота ω_{pl}, определяемая этим соотношением, называется плазменной. В соответствии с аппроксимациями, принятыми при выводе формулы (9.4), последняя имеет смысл, лишь если $(\omega_{\mathrm{pl}}\tau)^2 \gg 1$. В большинстве полупроводников это условие оказывается довольно жестким. Действительно, полагая для оценки $\varepsilon_0 = 16$, $m_{\mathrm{opt}} = 0{,}1 m_0$, $n = 10^{16}$ см$^{-3}$, получим из (9.4) $\omega_{\mathrm{pl}} = 4{,}5 \cdot 10^{12}$ с$^{-1}$. Если неравенство $(\omega_{\text{pl}}\tau)^2 \gg 1$ не выполняется, то пренебречь величиной σ_1 нельзя. При этом условие $\varepsilon = 0$ состоит из двух уравнений:

$$\operatorname{Im} \varepsilon(\omega) = 0, \qquad \operatorname{Re} \varepsilon(\omega) = 0. \tag{9.5}$$

Удовлетворить им можно, лишь считая саму частоту комплексной величиной. Физически появление мнимой части у частоты означает, что плазменные волны будут затухать со временем, чего и следует ожидать при наличии омических потерь.

Поскольку при не слишком больших частотах формула (8.14) также несправедлива, решение уравнений (9.5) может оказаться довольно громоздким. Как мнимая, так и вещественная части плазменной частоты при этом оказываются зависящими от механизма рассеяния. Существование затухающих плазменных волн проявляется, в частности, в некоторых оптических эффектах (§ XVIII.3).

Формулы (8.13), (8.14) и, следовательно, вытекающие из них выражения для ω_{pl} получены в пренебрежении изменением напряженности поля в пространстве, т. е., формально, при $k \to 0$. Учет этого изменения с помощью уравнения (8.17) привел бы к зависимости ω_{pl} от волнового вектора $\mathbf{k}$. Определяясь, согласно сказанному в § 8, членами порядка $(kl)^2$, эта зависимость не очень сильна. Так, при $\omega_{\text{pl}}\tau \gg 1$ она свелась бы просто к появлению в правой части (9.4) малого дополнительного слагаемого *). Однако эта зависимость может оказаться существенной принципиально, ибо: а) благодаря ей мы получаем не одно дискретное значение плазменной частоты, а непрерывный их набор и б) только при учете зависимости ω от k оказывается отличной от нуля групповая скорость плазменных волн, равная $d\omega/dk$.

---

*) Легко видеть, что при больших волновых числах плазменные волны вообще не могут распространяться. Действительно, согласованное поведение объемной плотности заряда и напряженности электрического поля возможно, лишь если много заряженных частиц движутся почти синфазно. Это сводится к неравенству $kn^{-1/3} < 1$.