

а через $B(q, s)$ обозначена функция, характеризующая данный тип взаимодействия. Выражения для нее, равно как и значения s , по которым следует производить суммирование, приведены в таблице 14.1.

Таблица 14.1

Коэффициенты $B(q, s)$ для разных механизмов рассеяния

	Акустические фононы (потенциал деформации)	Акустические фононы (пьезоэлектрический потенциал)	Неполярные оптические фононы	Поляризационные (продольные) фононы
$B(q, s)$	$iE_{\alpha\beta}(s) q_{\alpha}\zeta_{\beta}$ ($iE_1(q_{\zeta}^0)$ *)	$\mp \frac{4\pi\rho e}{\epsilon} f(\theta, \varphi)$	$E_{\alpha\beta}^{(0)} n_{\beta}\zeta_{\alpha}$ ($E_0(n_{\zeta}^0)$ *)	$\frac{4\pi iZe^2 (M_1 + M_2)}{qV_0 \sqrt{M_1 M_2}}$
Значения s	1, 2, 3	1, 2, 3	4, 5, ...	4

*) В скобках во втором и четвертом столбцах указаны упрощенные выражения, соответствующие формулам (3.3) и (3.9).

Выражение, стоящее в четвертом столбце, могло бы описывать и взаимодействие носителя заряда с фононами, ответственными за переходы между различными «долинами» в полупроводнике с несколькими эквивалентными минимумами энергии — в n -Ge, n -Si и др. Следует лишь заменить величину $E_{\alpha\beta}^{(0)} n_{\beta}\zeta_{\alpha}$ другой — также определяемой из опыта — константой размерности энергии и разрешить значку s принимать все значения, начиная с единицы. Действительно, точки в зоне Бриллюэна, отвечающие эквивалентным минимумах энергии, обычно отстоят друг от друга на расстояние, сравнимое с размерами самой зоны — близкое к постоянной обратной решетки. Следовательно и квазиволновые векторы фононов, испускаемых или поглощаемых при переходах электронов из одной «долины» в другую, должны быть по модулю порядка этой постоянной. Как мы видели в гл. XII, при этом различие между оптическими и акустическими фононами в значительной мере теряется.

§ 4. Рассеяние носителей заряда фононами

Согласно (2.19) вычисление коэффициентов \mathcal{F}_1 , \mathcal{F}_2 сводится к расчету матричного элемента

$$(\mathbf{p}', l, n' | H | \mathbf{p}, l, n) = \int dr \int \prod_{q, s} dx_{qs} \Psi_{\mathbf{p}', l, n'}^* H' \Psi_{\mathbf{p}, l, n}. \quad (4.1)$$

Как и в § 2, обозначим совокупность чисел \mathbf{p}, l, n (\mathbf{p}', l', n') через λ (λ').

Поскольку функции ψ_λ и $\psi_{\lambda'}$ описывают газ фононов и электрон, не взаимодействующие друг с другом, мы имеем

$$\psi_\lambda = \psi_p(\mathbf{r}) \Phi_n. \quad (4.2)$$

Функция $\psi_p(\mathbf{r})$ есть не что иное, как функция Блоха, описывающая поведение электрона в идеальной решетке, а Φ_n — волновая функция системы независимых гармонических осцилляторов (XII.5.5).

Подставляя выражения (3.32), (3.32') и (4.2) в правую часть (4.1), мы получаем

$$\langle \mathbf{p}', l; n' | H' | \mathbf{p}, l, n \rangle = \sum_{\mathbf{q}, s} [H'(\mathbf{q}, s) \mathcal{F}_1 + H'^*(\mathbf{q}, s) \mathcal{F}_2], \quad (4.3)$$

где

$$\mathcal{F}_1 = \int \psi_p^* e^{i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_p d\mathbf{r} \int \Phi_n^* b(\mathbf{q}, s) \Phi_n \prod_{\mathbf{q}'', s''} dx_{\mathbf{q}'', s''}, \quad (4.4a)$$

$$\mathcal{F}_2 = \int \psi_p^* e^{-i\mathbf{q}\mathbf{r}} \psi_p d\mathbf{r} \int \Phi_n^* b^*(\mathbf{q}, s) \Phi_n \prod_{\mathbf{q}'', s''} dx_{\mathbf{q}'', s''}. \quad (4.4b)$$

Каждая из величин $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ представляет собой произведение интегралов по координатам электрона и по нормальным координатам решетки. Последние легко вычисляются с помощью соотношений (XII.5.16); с точностью до множителя $2 \left[\frac{\hbar}{2M\omega} \right]^{1/2}$ это — как раз интегралы (XII.5.12). Для вычисления интегралов по \mathbf{r} заметим, что в интересующем нас случае длинных волн решетки оператор (3.32) представляет собой возмущение, лишь очень медленно изменяющееся на протяжении постоянной решетки a . Следовательно, мы вправе воспользоваться методом эффективной массы, заменяя функцию Блоха ψ_p плоской волной

$$\psi_p(\mathbf{r}) = V^{-1/2} e^{i\mathbf{p}\mathbf{r}}. \quad (4.5)$$

Множитель $V^{-1/2}$ в (4.5) выбран в соответствии с условием нормировки (2.2).

Подставляя (4.5) в (4.4a, б) и принимая во внимание равенства (XII.5.12) и (XII.5.14), мы получаем

$$\mathcal{F}_1 = \delta_{\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}'} \sqrt{n(\mathbf{q}, 1)} \prod_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} \prod_{s' \neq 1} \delta_{n'(\mathbf{q}', s'), n(\mathbf{q}', s')} \delta_{n'(\mathbf{q}, 1), n(\mathbf{q}, 1) - 1}, \quad (4.6a)$$

$$\mathcal{F}_2 = \delta_{\mathbf{p} - \hbar\mathbf{k}, \mathbf{p}'} \sqrt{n(\mathbf{q}, 1) + 1} \prod_{\mathbf{q}' \neq \mathbf{q}} \prod_{s' \neq 1} \delta_{n'(\mathbf{q}', s'), n(\mathbf{q}', s')} \delta_{n'(\mathbf{q}, 1), n(\mathbf{q}, 1) + 1}. \quad (4.6b)$$

Видно, что матричные элементы оператора H' (а с ними и вероятность перехода) отличны от нуля, только если числа фононов $n(\mathbf{q}, 1)$ в начальном и конечном состояниях различны. Иначе говоря, процесс взаимодействия электронов с фононами состоит в испускании и поглощении последних. При этом в принятом приближении

(первое приближение теории возмущений и линейная по нормальным координатам форма оператора энергии взаимодействия) возможны только однофононные процессы: в каждом акте взаимодействия испускается или поглощается только один фонон. Очевидно, слагаемое с \mathcal{F}_1 соответствует рассеянию с поглощением, а с \mathcal{F}_2 — рассеянию с испусканием фонона.

Видно, далее, что вероятность перехода отлична от нуля, только если имеют место соотношения

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = -\hbar\mathbf{q} \quad (4.7a)$$

в случае поглощения фонона и

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \hbar\mathbf{q} \quad (4.7б)$$

в случае испускания фонона.

Эти соотношения представляют собой не что иное, как законы сохранения: рассеяние с участием фонона возможно, только если квазиимпульс электрона изменяется на вполне определенную величину $\pm\hbar\mathbf{q}$, связанную формулой де Бройля с квазиволновым вектором фонона \mathbf{q} . Это дает основание назвать вектор $\hbar\mathbf{q}$ квазиимпульсом фонона.

В § XII.6 было показано, что фононам следует приписать энергию $\hbar\omega(\mathbf{q}, s)$. Видим теперь, что зависимость $\omega(\mathbf{q}, s)$ можно рассматривать как закон дисперсии для фононов. Тем самым завершается обоснование представления о фононах как о квазичастицах.

В связи с соотношениями (4.7a, б) следует сделать три замечания.

Во-первых, вывод этих законов сохранения не связан непременно с методом эффективной массы. Как можно показать (см. Приложение XIV), тот же результат получится и при использовании точных функций Блоха $\psi_{\mathbf{p}}$ вместо плоских волн (4.5). При этом следует лишь помнить, что векторы \mathbf{q} и \mathbf{p}/\hbar определены с точностью до вектора обратной решетки \mathbf{b} . Поэтому и законы сохранения (4.7a, б) надо понимать как равенства по модулю $\hbar\mathbf{b}$. Процессы рассеяния, при которых $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = -\hbar\mathbf{q} + \hbar\mathbf{b}$ или $\mathbf{p} - \mathbf{p}' = \hbar\mathbf{q} + \hbar\mathbf{b}$, называются *процессами переброса*. Учет их существен, если вектор $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ может выйти за пределы первой зоны Бриллюэна — тогда добавление слагаемого $\hbar\mathbf{b}$ вновь приводит вектор $\hbar\mathbf{q}$ в первую зону. В дальнейшем мы не будем явно отмечать это обстоятельство. В принятых ранее условиях (минимум энергии носителей заряда расположен в центре зоны Бриллюэна) процессы переброса в интересующих нас задачах оказываются несущественными.

Во-вторых, подчеркнем, что недопустимо смешивать квазиимпульс с импульсом: $\hbar\mathbf{q}$ не есть собственное значение оператора импульса решетки.

Наконец, в-третьих, видно, что длины волн фононов, испускаемых или поглощаемых при рассеянии, — порядка длины волны электрона. Большинство таких фононов (в случае невырожденного электрон-

ного газа) будет иметь длину волны порядка h/\sqrt{mkT} ($\sim 10^{-6}$ см при обычных значениях температуры и эффективной массы). Эта величина значительно превышает постоянную решетки, что и оправдывает сделанное в § 3 предположение о доминирующей роли длинноволновых фононов в процессе взаимодействия с носителями заряда.

Обратимся теперь к вычислению вероятности перехода $\mathcal{P}_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$. Согласно (4.3) и (4.6а, б)

$$\begin{aligned} & |(\mathbf{p}', l, n' | H' | \mathbf{p}, l, n)|^2 = \\ & = |H'(\mathbf{q}, 1)|^2 \prod_{\substack{q', s' \\ (\neq \mathbf{q}, 1)}} \delta_{n'(q', s'), n(q', s')} \{n(\mathbf{q}, 1) \delta_{n'(\mathbf{q}, 1), n(\mathbf{q}, 1) - 1} + \\ & \quad + [n(\mathbf{q}, 1) + 1] \delta_{n'(\mathbf{q}, 1), n(\mathbf{q}, 1) + 1}\}, \quad (4.8) \end{aligned}$$

причем под \mathbf{q} следует понимать $-\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{\hbar}$ в первом слагаемом и $\frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{\hbar}$ — во втором. Таким образом, вероятность перехода с данным изменением квазиимпульса электрона $\mathbf{p} - \mathbf{p}'$ складывается из вероятностей поглощения и испускания фонона:

$$\mathcal{P}_2(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \mathcal{P}_{\text{погл}} + \mathcal{P}_{\text{исп}}. \quad (4.9)$$

Величины $\mathcal{P}_{\text{погл}}$ и $\mathcal{P}_{\text{исп}}$ легко найти, подставляя (4.8) в формулу (2.19). Для аргументов дельта-функции в (2.19) мы получаем при этом, согласно (XII.6.2),

$$\begin{aligned} & E(\mathbf{p}', l, n') - E(\mathbf{p}, l, n) = \\ & = E(\mathbf{p}', l) - E(\mathbf{p}, l) + \sum_{q', s'} \hbar\omega(q', s') [n'(q', s') - n(q', s')] = \quad (4.10) \\ & = E(\mathbf{p}', l) - E(\mathbf{p}, l) \pm \hbar\omega\left(\pm \frac{\mathbf{p}-\mathbf{p}'}{\hbar}, s\right). \quad (4.10') \end{aligned}$$

Верхний и нижний знаки здесь относятся, соответственно, к испусканию и поглощению фонона. Видно, что испусканию или поглощению фонона с квазиимпульсом $\hbar\mathbf{q} = \pm(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$ соответствует уменьшение или увеличение энергии электрона — как раз на величину $\hbar\omega(\mathbf{q}, s)$. Так, конечно, и должно было получиться.

При рассеянии на оптических фононах частота близка к предельному значению ω_0 (§ XII.3). Предположение об упругости рассеяния выполняется при этом, лишь если средняя энергия носителей заряда достаточно велика. Так, в случае невырожденного газа должно выполняться неравенство *)

$$kT \gg \hbar\omega_0. \quad (4.11)$$

*) Условие (4.11) может оказаться очень жестким, ибо значения $\hbar\omega_0$ могут составить несколько сотых эВ.

В противном случае рассеяние становится существенно неупругим и задача о решении кинетического уравнения заметно усложняется (так обычно обстоит дело в случае междолинного рассеяния).

Положение вновь упрощается лишь при достаточно низких температурах, когда $\hbar\omega_0 \gg kT$. При этом практически все электроны могут только поглощать оптические фононы. Поглотив такой фонон, электрон, однако, почти мгновенно вновь испускает его: согласно принципу детального равновесия (XIII.4.4) отношение вероятностей испускания и поглощения фонона составляет $\exp(\hbar\omega_0/kT)$. Этот процесс называется составным рассеянием. В результате энергия электрона изменяется лишь незначительно. В самом деле, если бы частота оптического фонона ω вообще не зависела от его квазиволнового вектора, энергия электрона, испытавшего составное рассеяние, осталась бы неизменной. За счет слабой зависимости ω от q изменение энергии все же имеет место, но оно оказывается сравнительно небольшим: составное рассеяние — почти упругое. Это позволяет вновь ввести время релаксации [M7]; очевидно, оно пропорционально $\exp(-\hbar\omega_0/kT)$. Другая возможность, также возникающая при низких температурах, рассматривается в конце этого параграфа.

С другой стороны, при рассеянии на акустических фононах рассеяние оказывается почти упругим. Действительно, в этом случае для частоты $\omega(q, s)$ можно воспользоваться формулой (XII.3.3'). Соответственно выражение (4.10') принимает вид

$$E(p') - E(p) \pm c_s |p - p'|, \quad (4.10'')$$

где c_s — фазовая скорость продольных ($s = 1$) и поперечных ($s = 2, 3$) звуковых волн.

Пусть газ носителей заряда не вырожден. Тогда $|p - p'| \sim \sqrt{mkT}$ и, следовательно,

$$\frac{c_s |p - p'|}{kT} \sim c_s \sqrt{\frac{m}{kT}} \equiv \frac{c_s}{v_T}, \quad (4.12)$$

где $v_T = \sqrt{kT/m}$ — величина порядка средней тепловой скорости носителя заряда. Как правило, $v_T \sim 10^7$ см/с, в то время как $c_s \sim \sim 5 \cdot 10^5$ см/с: электроны движутся в среднем гораздо быстрее звука. Причина этого ясна: распространение звуковой волны в кристалле связано со смещениями тяжелых частиц — атомов решетки. Полагая для оценки $m = m_0$, видим, что скорости c_s и v_T сравниваются при температуре $\simeq 3$ К. При более высоких температурах последним слагаемым в (4.10'') можно пренебречь: благодаря малости отношения (4.12) изменение энергии электрона при испускании или поглощении акустического фонона, как правило, мало по сравнению с самой этой энергией. При этом аргументы дельта-функций в формулах для $\mathcal{P}_{\text{полг}}$ и $\mathcal{P}_{\text{исп}}$ становятся одинаковыми и равными просто разности энергий электрона в начальном и конечном состояниях.

В условиях почти упругого рассеяния мы получаем, комбинируя формулы (4.8) и (2.19):

$$\mathcal{F}_{\text{полг}} = \frac{V}{G} \cdot \frac{\pi |B(\mathbf{q}, s)|^2}{M\omega(\mathbf{q}, s)} n(\mathbf{q}, s) \delta(E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}')), \quad (4.13a)$$

$$\mathcal{F}_{\text{исп}} = \frac{V}{G} \cdot \frac{\pi |B(\mathbf{q}, s)|^2}{M\omega(\mathbf{q}, s)} [n(\mathbf{q}, s) + 1] \delta(E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}')), \quad (4.13б)$$

причем $\hbar q = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$.

Отношение $V/G = V_0$ представляет собой, очевидно, не что иное, как объем элементарной ячейки. При $G \rightarrow \infty$, $V \rightarrow \infty$ эта величина (а с ней и вероятность перехода) остается конечной (и не зависит от V), как это и должно быть. Заметим, что $V_0/M = \rho^{-1}$, где ρ — плотность кристалла.

Как видно из формул (4.13а, б), не только вероятность поглощения, но и вероятность испускания фонона зависит от числа фононов, уже имеющих в образце. Это есть аналог хорошо известного в оптике явления — вынужденного излучения света (см. ниже § XVIII.4).

При $n(\mathbf{q}, s) \rightarrow 0$ вероятность поглощения фонона, естественно обращается в нуль, но вероятность испускания остается конечной благодаря наличию второго слагаемого в квадратных скобках в формуле (4.13б). Это есть аналог спонтанного излучения фотонов (ср. гл. XVIII). Физическая причина его состоит во взаимодействии носителей заряда с нулевыми колебаниями решетки.

Числа заполнения фононных состояний $n(\mathbf{q}, s)$, входящие в формулы (4.13а, б), строго говоря неизвестны: для них надо было бы составить кинетическое уравнение типа (XIII.3.12). Мы получили бы тогда систему кинетических уравнений для функций $f(\mathbf{p})$ и $n(\mathbf{q}, s)$. Заметим, однако, что величины \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 входят в интеграл столкновений, где они умножаются на неравновесную часть функции распределения электронов f_1 . Можно думать поэтому, что хорошее приближение получится, если взять для $n(\mathbf{q}, s)$ равновесное выражение (XII.6.3)*. При этом, в силу (4.11) и (4.12), функцию Планка (XII.6.3) можно аппроксимировать классическим выражением, отвечающим равномерному распределению энергии по степеням свободы:

$$n[\omega(\mathbf{q}, s)] \simeq \frac{kT}{\hbar\omega(\mathbf{q}, s)}. \quad (4.14)$$

* Это рассуждение может оказаться несправедливым при наличии в кристалле градиента температуры. Действительно, при этом возникает поток фононов, направленный от «горячего» конца к «холодному». Сталкиваясь с носителями заряда, фононы увлекают их за собой, что может заметно увеличить термоэдс. Этот эффект увлечения был впервые теоретически исследован в 1945 г. Л. Э. Гуревичем. Расчет показывает, что в полупроводниках он может быть важен при низких температурах.

Формулы (4.13а, б) и (4.9) дают теперь

$$\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \equiv \mathcal{F} = \frac{2\pi V_0 kT}{M\omega^2(\mathbf{q}, s) \hbar} |B(\mathbf{q}, s)|^2 \delta[E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}')]. \quad (4.15)$$

Формула (4.15) становится несправедливой при достаточно низких температурах ($T \ll T_D$ — дебаевской температуры), когда энергия фонона оказывается больше kT и $n(\mathbf{q}, s) \rightarrow 0$. В этом случае $\mathcal{F}_{\text{погл}} \rightarrow 0$, а для $\mathcal{F}_{\text{исп}}$ мы получаем

$$\mathcal{F}_{\text{исп}} \equiv \mathcal{F} = \frac{2\pi V_0}{M\omega(\mathbf{q}, s)} |B(\mathbf{q}, s)|^2 \delta[E(\mathbf{p}) - E(\mathbf{p}') - \hbar\omega(\mathbf{q}, s)], \quad (4.15')$$

причем $\hbar\mathbf{q} = |\mathbf{p} - \mathbf{p}'|$ (разумеется, $E(\mathbf{p}) > \hbar\omega(\mathbf{q}, s)$). Выражение (4.15') характеризует вероятность рассеяния электронов нулевыми колебаниями решетки.

Значения $B(\mathbf{q}, s)$ для разных механизмов рассеяния приведены в таблице 14.1. Из нее явствует, что правая часть (4.15) действительно имеет вид (XIII.6.1), (XIII.6.5), коль скоро речь идет о рассеянии на оптических фононах. Так же обстоит дело и при рассеянии на акустических фононах за счет потенциала деформации, если используется «изотропная» аппроксимация (3.3). С другой стороны, вероятность рассеяния, обусловленного пьезоэлектрическим потенциалом, оказывается существенно анизотропной: согласно (3.30) функция $f(\theta, \varphi)$ существенно зависит от ориентации вектора \mathbf{q} относительно кристаллографических осей. При расчетах ориентировочного характера иногда пользуются упрощенным выражением для $\mathcal{F}_{\text{пьезо}}$, заменяя функцию $f^2(\theta, \varphi)$ средним ее значением

$$\langle f^2(\theta, \varphi) \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin\theta \cdot f^2(\theta, \varphi) d\theta. \quad (4.16)$$

Подставляя сюда выражение (3.30) и выполняя интегрирование, мы получаем

$$\langle f^2(\theta, \varphi) \rangle = 4/15.$$

Пользуясь этим выражением и сравнивая равенства (4.15) и (XIII.6.1), (XIII.6.5), можем вычислить функцию $S(E, \cos\theta)$, фигурирующую в формуле для времени релаксации (XIII.6.12). Ограничимся сначала параболическим законом дисперсии, совмещающая по-прежнему начало отсчета энергии электронов с дном зоны проводимости ($E_c = 0$). Получим

$$S(E, \cos\theta) = BE^{-r-1/2} (1 - \cos\theta)^{r'}. \quad (4.17)$$

Здесь, как и в гл. XIII, $\theta = \widehat{\mathbf{p}, \mathbf{p}'}$, есть угол рассеяния; значения постоянных B , r и r' для разных механизмов рассеяния указаны в таблице 14.2.

Таблица 14.2

Значения постоянных B , r , r' и C для разных механизмов рассеяния

	B	r	r'	$C^{-1} = \frac{2B \sqrt{2m^3}}{(2\pi)^2 \hbar^3}$
Акустические фононы (потенциал деформации)	$\frac{2\pi V_0 k T E_1^2}{M c_s^2 \hbar}$	-1/2	0	$\frac{V_0 k T E_1^2 \sqrt{2m^3}}{\pi M c_s^2 \hbar^4}$
Акустические фононы (пьезоэлектрическое рассеяние)	$\frac{32\pi^3 \beta^2 e^2 \hbar V_0 k T}{15 M c_s^2 \varepsilon^2 m}$	+1/2	-1	$\frac{16\pi \beta^2 e^2 V_0 k T \sqrt{2m}}{15 \varepsilon^2 M c_s^2 \hbar^2}$
Неполярные оптические фононы*), $kT \gg \hbar\omega_0$	$\frac{2\pi V_0 k T E_0^2}{M \hbar \omega_0^3}$	-1/2	0	$\frac{V_0 k T E_0^2 \sqrt{2m^3}}{\pi M \hbar^4 \omega_0^3}$
Поляризационные фононы, $kT \gg \hbar\omega_0$	$8\pi^3 \hbar k T (Ze^2)^2 \times \frac{(M_1 + M_2)}{V_0 \omega_0^2 m M_1 M_2}$	+1/2	-1	$4\pi k T (Ze^2)^2 \times \frac{(M_1 + M_2) \sqrt{2m}}{V_0 M_1 M_2 \hbar^2 \omega_0^2}$

*) Принято сокращенное обозначение: $|E_{\alpha\beta}^{(0)} n_{\beta} \zeta_{\alpha}|^2 = E_0^2$.

Выражение (4.17) можно обобщить и на случай непараболического (но изотропного) закона дисперсии. Для этой цели надо лишь произвести замену

$$mE \rightarrow \frac{1}{2} p^2(E). \quad (4.18)$$

Эффективная масса m при этом выпадает из формул для C (табл. 14.2).

Теперь легко вычислить время релаксации, связанное с рассеянием на фононах какого-либо из рассматриваемых типов. Подставляя выражение (4.17) в правую часть (XIII.6.13) и интегрируя по углу θ , мы получаем формулу (XIII.7.21):

$$\tau(E) = CE^r, \quad (4.19)$$

с известными уже величинами C и r . Значения C указаны в таблице 14.2.

Проверим теперь, выполняется ли основное условие применимости кинетического уравнения, выражаемое в случае невырожденного газа неравенством (2.22а). Очевидно, в качестве τ в это неравенство надо подставить выражение (4.19), взятое для «существенных» электронов, т. е. при $E \sim kT$. Тогда рассматриваемое условие принимает вид

$$\hbar/C (kT)^{r+1} \ll 1. \quad (4.20)$$

Подстановка типичных значений параметров ($c_s \simeq 10^5$ см/с, $M \simeq 10^{-22}$ г, $E_1 \simeq 10$ эВ, $V_0 \simeq 10^{-22}$ см³) показывает, что в случае

акустического рассеяния условие (4.20) обычно выполняется. С другой стороны, при рассеянии на поляризационных оптических колебаниях нерасенство (4.20) может и нарушаться. Причина этого состоит в сравнительно большой энергии взаимодействия носителей заряда с поляризационными фононами (§ 3, п. г). Связанные с этим осложнения рассматриваются в гл. XVII.

Как и формула (4.15), данные таблицы 14.2 становятся несправедливыми при низких температурах, когда имеет место только рассеяние на нулевых колебаниях решетки. В этом случае неприменима и формула (XIII.6.13), так как рассеяние носит неупругий характер: согласно (4.12) энергия фонона, испускаемого или поглощаемого в процессе рассеяния, оказывается здесь сравнимой с энергией самого носителя заряда. Все же и здесь можно ввести время релаксации квазиимпульса, определив его как характерное «время испускания» фонона:

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int dp' \mathcal{F}(p, p'). \quad (4.21)$$

В качестве $\mathcal{F}(p, p')$ сюда следует подставить выражение (4.15'). Так, определенная величина есть не что иное, как «время жизни» электрона в состоянии с квазиимпульсом p . Это время, вообще говоря, не совпадает с определенным ранее временем свободного пробега *).

Вычислим $\tau(E)$, считая, что рассеяние обусловлено оптическими колебаниями решетки (поляризационными или неполярными). Ограничимся при этом изотропным параболическим законом дисперсии и пренебрежем зависимостью ω от квазиволнового вектора оптических фононов.

Для неполярных фононов мы получаем, подставляя (4.15') в (4.21):

$$\frac{1}{\tau(E)} = \sum_s \frac{V 2m^3 V_0 B_1}{\pi M \hbar^2 V \hbar \omega_0(s)} \left[\frac{E}{\hbar \omega_0(s)} - 1 \right]^{1/2}. \quad (4.22)$$

Здесь $B_1 = |E_{\alpha\beta}^{(0)}(s) n_{\beta} \zeta_{\alpha}|^2$. Заметим, что в этом случае «приход» действительно не играет роли и выражение (4.22) дает обычное время релаксации квазиимпульса. Его можно обобщить и на случай произвольных температур (в предположении о тепловом равновесии фононов). Для этой цели надо принять во внимание рассеяние не только на нулевых, но и на тепловых колебаниях решетки. Иначе говоря, надо принять во внимание зависимость времени релаксации от числа фононов $n[\omega(q, s)]$, уже имеющихся в решетке. Как мы

*) Такое совпадение имело бы место, если бы в кинетическом уравнении можно было опустить член «прихода» (XIII.3.7). Действительно, правая часть (4.21) есть не что иное, как интеграл «ухода» B (XIII.3.8) при $f(p, r) \simeq 1$, $f(p', r') \ll 1$. Как видно из формулы (XIII.6.12), член «прихода» не играет роли, если $\mathcal{F}(p, p')$ не зависит от угла рассеяния.

знаем, вероятности переходов с испусканием и поглощением фононов пропорциональны, соответственно, $n[\omega(\mathbf{q}, s)] + 1$ и $n[\omega(\mathbf{q}, s)]$. Таким образом, искомое обобщение получается, если в правую часть (4.22) ввести множитель

$$\frac{2}{\exp\left[\frac{\hbar\omega_0(s)}{kT}\right] - 1} + 1$$

(в данном случае $\omega(\mathbf{q}, s) = \omega_0(s)$).

Для поляризационных фононов формула (4.15') с учетом таблицы 14.1 дает

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{V_0 \sqrt{2m} B_2}{4\pi M \sqrt{\hbar\omega_0(s)}} \left[\frac{E}{\hbar\omega_0(s)} - 1 \right]^{1/2} \frac{1}{\sqrt{E(E - \hbar\omega_0(s))}} \ln \frac{\sqrt{E} + \sqrt{E - \hbar\omega_0(s)}}{\sqrt{E} - \sqrt{E - \hbar\omega_0(s)}}. \quad (4.23)$$

Здесь $B_2 = \left[\frac{4\pi Ze^2(M_1 + M_2)}{V_0 \sqrt{M_1 M_2}} \right]^2$; суммирование по s отпадает, так как в данном случае значок s отвечает только продольной ветви.

При $E - \hbar\omega_0(s) \ll E$ равенство (4.23) принимает вид, аналогичный (4.22):

$$\frac{1}{\tau(E)} = \frac{V_0 \sqrt{2m} B_2}{2\pi M \sqrt{\hbar\omega_0(s)}} \frac{E}{E} \left[\frac{E}{\hbar\omega_0(s)} - 1 \right]^{1/2}. \quad (4.23')$$

Формулы (4.22) и (4.23') можно переписать в виде

$$\frac{1}{\tau(E)} = \sum_s \frac{1}{\tau_0(s)} \left[\frac{E}{\hbar\omega_0(s)} - 1 \right]^{1/2}, \quad (4.24)$$

где $\tau_0(s)$ — характерное время, явное выражение для которого вытекает из сопоставления правых частей (4.24) и (4.22), (4.23').

При $\hbar\omega_0(s) \gg kT$ и равновесном распределении носителей заряда по энергиям число электронов, способных испускать оптические фононы, пропорционально $\exp[-\hbar\omega_0(s)/kT]$. Следовательно, в этих условиях рассеяние, характеризующееся временами релаксации (4.22) и (4.23), столь же маловероятно, сколь и составное. Положение, однако, может измениться в достаточно сильном электрическом поле, когда электронному газу сообщается достаточно большая энергия (гл. XVI).

§ 5. Рассеяние носителей заряда примесными атомами

При рассеянии электронов неподвижными примесными атомами оператор H' имеет вид

$$H' = \sum_{i=1}^N \delta U(\mathbf{r} - \mathbf{R}_i). \quad (5.1)$$