

Подставляя это в уравнение движения (2.18), мы находим

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\Lambda}{\rho} (1 + K^2) \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}, \quad (3.1)$$

где

$$K^2 = \frac{4\pi\beta^2}{\epsilon\Lambda}. \quad (3.2)$$

Соответственно, дифференцируя обе части уравнения (3.1) по x и заменяя в нем $\partial Q/\partial x$ на u , получаем уравнение, описывающее распространение деформации:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\Lambda}{\rho} (1 + K^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (3.3)$$

Мы получили обычное волновое уравнение. Одно из его решений есть плоская волна, описываемая формулой (2.6). Фазовая скорость волны v_s дается выражением

$$v_s^2 = \frac{\Lambda}{\rho} (1 + K^2) = v_{s0}^2 (1 + K^2), \quad (3.4)$$

где $v_{s0}^2 = \Lambda/\rho$ есть квадрат скорости волны в отсутствие пьезоэлектрического взаимодействия. Мы видим, что в пьезоэлектрической среде скорость волны увеличивается в $\sqrt{1 + K^2}$ раз. Можно также сказать, что в этом случае упругие свойства среды описываются измененным, или эффективным, модулем упругости, равным

$$\Lambda' = \Lambda (1 + K^2). \quad (3.5)$$

Безразмерная постоянная K носит название константы электро-механической связи. Она определяет влияние пьезоэлектрического эффекта на распространение упругих волн. Величина K у сильных пьезоэлектриков (например, соединений типа $A^{II} - B^{VI}$) имеет порядок 0,1.

§ 4. Упругие волны в пьезоэлектрических полупроводниках

Если электропроводность среды не равна нулю, то необходима вся система уравнений (2.11) — (2.19). Она содержит нелинейные уравнения (2.11) и (2.19), и ее решение в общем случае сложно. Поэтому мы ограничимся случаем малых колебаний и будем пренебрегать теми членами, которые содержат произведения малых переменных величин (при этом интенсивность волны может быть совсем не малой с точки зрения практических применений). Далее, чтобы упростить расчеты, мы сначала 1) пренебрежем диффузией и 2) положим, что прилипания электронов нет ($f = 1$, $\tilde{n}_s = \tilde{n}$).

Тогда мы получим систему линеаризованных уравнений

$$j = e\mu(\varepsilon_0\tilde{n} + n_0\tilde{\mathcal{E}}), \quad (4.1)$$

$$-e \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{D}}}{\partial x} = -4\pi e\tilde{n}, \quad (4.3)$$

$$\tilde{\mathcal{D}} = \varepsilon\tilde{\mathcal{E}} - 4\pi\beta u, \quad (4.4)$$

$$\tilde{s} = \Lambda u + \beta\tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.5)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \tilde{s}}{\partial x^2}. \quad (4.6)$$

Положим, далее, что в кристалле распространяется плоская волна деформации (2.6). При этом мы будем считать ω вещественным, но q — комплексным, так как вследствие взаимодействия волны с электронами ее амплитуда изменяется. Так как теперь уравнения линейны, то и все другие величины будут изменяться по такому же закону:

$$\tilde{\mathcal{E}} \sim \exp[i(qx - \omega t)] \quad \text{и т. д.} \quad (4.7)$$

Поэтому, подставляя (4.7) в уравнения (4.1) — (4.6), мы получим систему алгебраических уравнений

$$-e\mu\varepsilon_0\tilde{n} - e\mu n_0\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{j} = 0, \quad (4.8)$$

$$\omega e\tilde{n} + q\tilde{j} = 0, \quad (4.9)$$

$$4\pi e\tilde{n} + iq\tilde{\mathcal{D}} = 0, \quad (4.10)$$

$$-\varepsilon\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{D}} + 4\pi\beta u = 0, \quad (4.11)$$

$$-\beta\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{s} - \Lambda u = 0, \quad (4.12)$$

$$q^2\tilde{s} - \rho\omega^2 u = 0. \quad (4.13)$$

Дальше задача решается стандартным методом теории колебаний. А именно, так как уравнения (4.8) — (4.13) линейные однородные, то условие существования ненулевых решений, как известно, есть равенство нулю детерминанта коэффициентов этой системы. Это дает соотношение между ω и q :

$$F(\omega, q) = 0, \quad (4.14)$$

или закон дисперсии. Выражая отсюда q , мы получим его комплексным:

$$q = \kappa(\omega) + i \frac{\gamma(\omega)}{2}. \quad (4.15)$$

Подставляя это в формулу (2.6), мы будем иметь

$$u = u_1 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \gamma x + i(\kappa x - \omega t) \right\}, \quad (4.16)$$

что выражает затухающую плоскую волну. Отсюда видно, что коэффициент затухания амплитуды волны $\gamma/2$ и скорость ее распространения v_s получаются непосредственно из дисперсионного уравнения по формулам

$$\frac{1}{2} \gamma = \text{Im } q, \quad v_s = \frac{\omega}{\kappa} = \frac{\omega}{\text{Re } q}. \quad (4.17)$$

Однако мы не будем вычислять детерминант системы, а для получения дисперсионного уравнения будем последовательно исключать различные переменные. Это позволит нам получить промежуточные соотношения, описывающие колебания различных электрических величин, полезные для физической интерпретации результатов.

Введем для краткости обозначение

$$\eta = 1 + \frac{q\mu\mathcal{E}_0}{\omega}. \quad (4.18)$$

Здесь $-\mu\mathcal{E}_0$ есть дрейфовая скорость электронов v_d в постоянном внешнем поле. Далее, учтем, что даже в сильных пьезоэлектриках мы имеем $\gamma \ll \kappa$ (это обозначает, что относительное изменение амплитуды на пути в одну длину волны много меньше единицы). Поэтому в выражении (4.18) можно заменить q на κ и считать $\omega/q = v_s$. Следовательно,

$$\eta = 1 - \frac{v_d}{v_s}, \quad (4.19)$$

где v_d считается положительным, когда электроны движутся в ту же сторону, что и волна. Тогда, исключая \tilde{j} из уравнений (4.8) и (4.9), мы получим

$$\tilde{n} = -\frac{q\sigma_0}{e\omega\eta} \tilde{\mathcal{E}}, \quad (4.20)$$

где $\sigma_0 = e\mu n_0$, а исключая из тех же уравнений \tilde{n} , найдем

$$\tilde{j} = \frac{\sigma_0}{\eta} \tilde{\mathcal{E}}. \quad (4.21)$$

Далее, исключим из уравнений (4.10) и (4.11) $\tilde{\mathcal{D}}$. Это дает

$$\tilde{\mathcal{E}} = i \frac{4\pi e}{q\varepsilon} \tilde{n} + \frac{4\pi\beta}{\varepsilon} u. \quad (4.22)$$

По формулам (4.20) и (4.22) можно выразить \tilde{n} и $\tilde{\mathcal{E}}$ как функции деформации. Тогда для $\tilde{\mathcal{E}}$ получается

$$\tilde{\mathcal{E}} = \frac{4\pi\beta}{\varepsilon} \frac{\omega\tau_M\eta}{\omega\tau_M\eta + i} u. \quad (4.23)$$

Здесь $\tau_M = \varepsilon/4\pi\sigma_0$ есть максвелловское время релаксации. Исключим, наконец, s из последней пары уравнений (4.12) и (4.13). Это приводит к соотношению

$$(\rho\omega^2 - q^2\Lambda)u - q^2\beta\tilde{\xi} = 0. \quad (4.24)$$

Выражая здесь $\tilde{\xi}$ через u по формуле (4.23), мы получаем окончательно

$$u \left\{ \rho\omega^2 - q^2\Lambda \left[1 + K^2 \frac{\omega\tau_M\eta}{\omega\tau_M\eta + i} \right] \right\} = 0,$$

где K^2 — квадрат константы электромеханической связи (3.2). Отсюда следует, что выражение в фигурных скобках равно нулю, что и дает дисперсионное соотношение

$$q^2 = \frac{\rho\omega^2}{\Lambda} \frac{1}{1 + K^2 \frac{\omega\tau_M\eta}{\omega\tau_M\eta + i}}. \quad (4.25)$$

Это соотношение можно упростить. Так как $K^2 \ll 1$, то с хорошим приближением можно положить

$$\begin{aligned} q^2 &\simeq \frac{\rho\omega^2}{\Lambda} \left\{ 1 - K^2 \frac{\omega\tau_M\eta}{\omega\tau_M\eta + i} \right\} = \\ &= \frac{\rho\omega^2}{\Lambda} \left\{ 1 - K^2 \frac{2(\omega\tau_M\eta)^2}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2} + iK^2 \frac{\omega\tau_M\eta}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2} \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда, с тем же приближением, имеем

$$q \simeq \omega \sqrt{\frac{\rho}{\Lambda}} \left\{ 1 - \frac{1}{2} K^2 \frac{(\omega\tau_M\eta)^2}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2} + i \frac{1}{2} K^2 \frac{\omega\tau_M\eta}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2} \right\}. \quad (4.26)$$

Тогда по формулам (4.17) находим для коэффициента поглощения

$$\gamma = K^2 \frac{\omega}{v_{s0}} \frac{\omega\tau_M\eta}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2}, \quad (4.27)$$

где $v_{s0} = \sqrt{\Lambda/\rho}$. Фазовая скорость волны оказывается равной

$$v_s = v_{s0} \left\{ 1 + \frac{1}{2} K^2 \frac{(\omega\tau_M\eta)^2}{1 + (\omega\tau_M\eta)^2} \right\}. \quad (4.28)$$

Остановимся теперь подробнее на поглощении волны. Удобно исследовать поведение коэффициента поглощения, выраженного в единицах $K^2\omega/v_{s0}$. Из формулы (4.27) видно, что он зависит от частоты ω и τ_M (т. е. от электропроводности кристалла), причем обе эти величины входят только в виде произведения. Если внешнего электрического поля нет ($v_a = 0$, $\eta = 1$), то величина $\gamma v_{s0}/K^2\omega$

имеет максимум при $\omega\tau_M = 1$. При этом

$$\gamma_{\max} = \frac{1}{2} K^2 \frac{\omega}{v_{s0}}. \quad (4.23)$$

Зависимость γ/γ_{\max} от $\omega\tau_M$ для случая $v_d = 0$ показана на рис. 15.2.

Однако наиболее интересная особенность поведения γ заключается в его зависимости от внешнего поля. Характер этой зависимости показан на рис. 15.3. Когда электроны и волны движутся

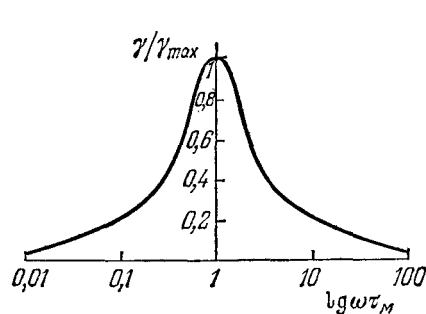


Рис. 15.2. Зависимость электронного коэффициента поглощения звука от $\omega\tau_M$ без внешнего поля.

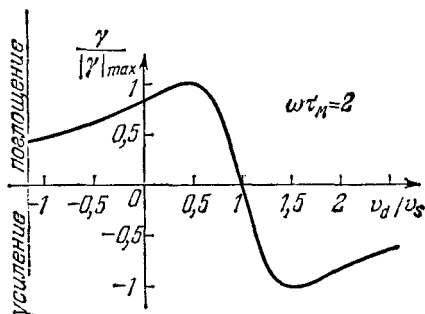


Рис. 15.3. Зависимость электронного коэффициента поглощения звука от дрейфовой скорости электронов.

в одинаковом направлении ($v_d/v_s > 0$), при $v_d > v_s$ в формуле (4.27) η изменяет знак и γ становится отрицательным. Это значит, что волна не затухает, а усиливается сверхзвуковым дрейфом электронов.

Физический смысл этих явлений поясняет рис. 15.4, где показано мгновенное распределение в пространстве различных электрических величин. Упругая волна вызывает колебания электростатического потенциала $\tilde{\varphi}$ и потенциальной энергии $-e\tilde{\varphi}$ электронов. В проводящих средах это приводит к перераспределению электронов, т. е. к экранированию поля, в результате чего образуются электронные сгустки \tilde{n} . Если бы волна не двигалась, эти сгустки были бы на дне потенциальных ям. В движущейся волне сгустки расположены на склонах ям. Образование электронных сгустков сопровождается возникновением переменных токов \tilde{j} и электрических полей $\tilde{\mathcal{E}}$. В результате этого в каждой точке кристалла выделяется дополнительная мощность, которая, в расчете на единицу объема, есть

$$(j_0 + \tilde{j})(\mathcal{E}_0 + \tilde{\mathcal{E}}) - j_0\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_0\tilde{j} + j_0\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{j}\tilde{\mathcal{E}}.$$

Среднее ее значение равно $\langle \tilde{j}\tilde{\mathcal{E}} \rangle$, так как $\langle \tilde{j} \rangle = \langle \tilde{\mathcal{E}} \rangle = 0$. Если $v_d < v_s$ (т. е. $\eta > 0$), то электроны отстают от звуковой волны и

группируются на заднем фронте потенциальных ям (рис. 15.4, слева). Согласно формуле (4.21) колебания \tilde{j} и $\tilde{\mathcal{E}}$ находятся в фазе и $\langle \tilde{j} \tilde{\mathcal{E}} \rangle$ положительно. Эта мощность заимствуется от волны, что и приводит к ее затуханию. Если же $v_d > v_s$, то электроны, напротив, опережают звуковую волну и электронные сгустки располагаются на переднем фронте потенциальных ям (рис. 15.4, справа). Колебания \tilde{j} и $\tilde{\mathcal{E}}$ находятся в противофазе (формула (4.21) при $\eta < 0$), и поэтому $\langle \tilde{j} \tilde{\mathcal{E}} \rangle$ отрицательно. Это значит, что теперь волна

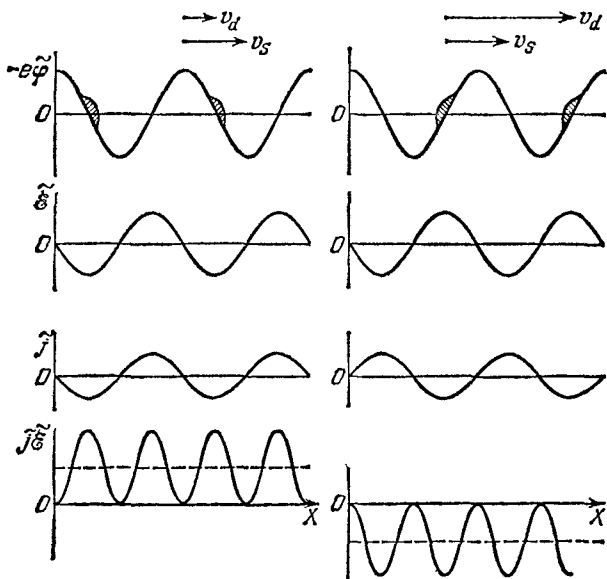


Рис. 15.4. Колебание потенциала $\tilde{\varphi}$, поля $\tilde{\mathcal{E}}$, тока \tilde{j} и мощности $\tilde{j}\tilde{\mathcal{E}}$ при $v_d < v_s$ (слева) и $v_d > v_s$ (справа).

уже не передает свою энергию, а получает ее от дрейфующих электронов. Усиление волны происходит за счет энергии источника тока, поддерживающего дрейф электронов и совершающего дополнительную работу на преодоление тормозящих сил со стороны звуковой волны.

Напомним, что γ есть электронный коэффициент поглощения волны, обусловленный только ее взаимодействием с электронами. Так как имеется еще и поглощение волны самой решеткой, характеризуемое некоторым решеточным коэффициентом поглощения $\gamma_{\text{реш}}$, то суммарный коэффициент поглощения волны равен $(\gamma + \gamma_{\text{реш}})$, а условие ее усиления есть $(\gamma + \gamma_{\text{реш}}) < 0$.

Выше мы везде пренебрегали диффузией электронов. Если бы мы не вычеркнули в формуле (2.11) последнее слагаемое, то,

рассуждая, как и прежде, мы получили бы для коэффициента поглощения более сложное выражение:

$$\gamma = K^2 \frac{\omega}{v_{s0}} \frac{\omega \tau_M \eta}{(1 + q_0^2 L_D^2)^2 + (\omega \tau_M \eta)^2}. \quad (4.30)$$

Здесь L_D — длина экранирования Дебая, выражаемая формулой (VI.7.2), а $q_0 = \omega/v_{s0} = 2\pi/\lambda_z$, где λ_z — длина звуковой волны. Сравнивая формулы (4.27) и (4.30), мы видим, что диффузия уменьшает γ . Это и понятно, так как диффузия противодействует группировке электронов. Далее, из этих формул видно, что учет диффузии становится существенным, если только $q_0^2 L_D^2 \gtrsim 1$, или, иначе, когда $\lambda_z < L_D$. Выбирая для n_0 даже не очень большое значение $\sim 10^{12} \div 10^{13} \text{ см}^{-3}$, мы имеем $L_D \sim 10^{-4} \div 10^{-5} \text{ см}$. Учитывая затем, что $v_{s0} \sim 10^5 \text{ см/с}$, мы находим, что $q_0 L_D \sim 1$ при частоте $\omega \sim 10^9 \div 10^{10} \text{ с}^{-1}$. Таким образом, вплоть до очень высоких частот влиянием диффузии можно пренебречь.

Если бы мы учли еще и прилипание электронов, считая фактор прилипания f вещественным и постоянным («быстрые» ловушки), то мы получили бы прежние формулы (4.27) или, соответственно, (4.30), однако, в выражении для η (4.19) под v_d следовало бы понимать $-f\mu \epsilon_0$, а длину Дебая L_D нужно было бы заменить на fL_D [3, 4].

§ 5. Электронное поглощение и усиление ультразвуковых волн

Остановимся теперь на экспериментах по электронному поглощению и усилению упругих волн. При звуковых частотах эти эффекты очень малы. Однако так как γ_{max} увеличивается с частотой (ср. (4.29)), то при частотах $\omega/2\pi \gtrsim 1 \div 10 \text{ МГц}$ (ультразвуковые волны) они становятся легко измеримыми.

Чтобы оценить порядок ожидаемых величин, рассмотрим конкретный пример сильного пьезополупроводника — сульфида кадмия (CdS). Его пьезоэлектрические свойства таковы, что если волна распространяется в направлении гексагональной оси C , то только продольные колебания оказываются пьезоэлектрически активными. Напротив, при распространении волны перпендикулярно оси C активной является только поперечная волна, в которой смещение параллельно C . Интересующие нас константы при 300 К имеют следующие значения:

CdS	Продольная волна	Поперечная волна
K^2	0,08	0,036
$v_{s0}, \text{ см/с}$	$4,3 \cdot 10^5$	$1,7 \cdot 10^5$