

### § 4. Электронная температура

В зависимости от роли столкновений между носителями заряда по сравнению с другими механизмами рассеяния выделяются различные предельные случаи. Рассмотрим сначала материал с носителями заряда одного типа. Обозначим через  $\tau_{ee}$  среднее время между столкновениями носителей заряда друг с другом. В силу близости эффективных масс носителей заряда при таких столкновениях происходит заметный обмен как квазиимпульсом, так и энергией. Следовательно, время  $\tau_{ee}$  характеризует скорость обоих этих процессов. Могут иметь место три предельных соотношения между временами  $\tau_{ee}$ ,  $\tau_e$  и  $\tau_p$ :

$$\tau_{ee} \ll \tau_p \ll \tau_e, \quad (4.1)$$

$$\tau_p \lesssim \tau_{ee} \ll \tau_e, \quad (4.2)$$

$$\tau_p \lesssim \tau_e \ll \tau_{ee}. \quad (4.3)$$

В случае (4.1) носители заряда успевают многократно обмениваться энергией и импульсом до того, как сыграет свою роль рассеяние их на фононах или иных несовершенствах решетки. В случае (4.2) это относится только к обмену энергией. Наконец, в случае (4.3) рассеяние носителей заряда друг на друге вообще не играет роли и им можно пренебречь.

Рассмотрим ситуацию, характеризуемую неравенствами (4.1). Тогда газ носителей заряда можно рассматривать, в первом приближении, как самостоятельную термодинамическую подсистему, лишь слабо взаимодействующую с решеткой. Столкновения между носителями приводят к установлению равновесия по энергии и импульсу внутри данной подсистемы. Это означает, что в данном случае, во-первых, имеет однозначный смысл представление о температуре электронов  $T_e$ , отличной, вообще говоря, от температуры решетки  $T$ , и, во-вторых, систему носителей заряда можно характеризовать скоростью  $v_d$ , с которой все они движутся как целое относительно решетки. В сущности, мы имеем здесь то же, что и при движении жидкости или газа в сосуде. Роль последнего играет неидеальная решетка, а роль «жидкости» — система носителей заряда. По этой причине рассматриваемое приближение часто называют гидродинамическим.

Функция распределения  $f(p)$ , зависящая от параметров  $T_e$  и  $v_d$ , должна обращать в нуль интеграл столкновений (XIII.3.11). При  $v_d = 0$  это означало бы, что  $f(p)$  есть функция Ферми, в которой надо лишь заменить температуру  $T$  на  $T_e$ . Так же обстоит дело и при  $v_d \neq 0$ , если рассматривать функцию распределения в системе отсчета, в которой электронный газ как целое покоится. Переходя к системе отсчета, связанной с кристаллической решеткой (в которой электронный газ движется); мы должны заменить  $v$  на

$\mathbf{v} - \mathbf{v}_d$ . Тогда

$$f(\mathbf{p}) = \left\{ \exp \frac{E(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d) - F}{kT} + 1 \right\}^{-1}. \quad (4.4)$$

Здесь энергия носителя заряда  $E$  рассматривается как функция его скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{p})$ .

В отсутствие фермиевского вырождения равенство (4.4) принимает вид

$$f(\mathbf{p}) = \exp \frac{F - E(\mathbf{v} - \mathbf{v}_d)}{kT}. \quad (4.5)$$

Выражение, фигурирующее в правой части (4.5), называется максвелловским распределением с дрейфом.

Пусть скорость дрейфа мала по сравнению с характерной «тепловой» скоростью носителей заряда  $v_{T_e} = \sqrt{kT_e/m}$ . Тогда правую часть (4.5) можно разложить в ряд по степеням  $v_{T_e}$ , и мы получаем выражение вида (2.3), причем теперь

$$f_s = \exp \frac{F - E(\mathbf{v})}{kT}, \quad (4.6)$$

$$f_a = \frac{(\mathbf{v}_d, \nabla_{\mathbf{v}} E)}{kT_e} \exp \frac{F - E(\mathbf{v})}{kT_e}. \quad (4.7)$$

Величины  $F$ ,  $T_e$  и  $\mathbf{v}_d$  в формулах (4.4) — (4.7) остаются пока произвольными. Согласно сказанному в § 3, учет одних межэлектронных столкновений (без процессов переброса) в принципе не позволяет найти  $T_e$  и  $\mathbf{v}_d$ . Для определения стационарных значений дрейфовой скорости и электронной температуры в пространственно однородной системе удобно воспользоваться уравнениями баланса (3.1) и (3.2). Действительно, поскольку функция распределения в рассматриваемом случае известна, можно, задавшись теми или иными механизмами рассеяния энергии и импульса (гл. XIV), вычислить времена  $\tau_e$  и  $\tau_p$ . Они оказываются теперь функциями  $\mathbf{v}_d$  и  $T_e$ , а уравнения баланса превращаются в систему уравнений относительно названных переменных:

$$e\mathfrak{E} = \frac{m_0 \mathbf{v}_d}{\tau_p(\mathbf{v}_d, T_e)}, \quad (4.8)$$

$$e(\mathbf{v}_d, \mathfrak{E}) = \frac{k \cdot (T_e - T)}{\tau_e(\mathbf{v}_d, T_e)}. \quad (4.9)$$

Обратимся теперь к ситуации, характеризуемой неравенствами (4.2). Здесь, как и в предыдущем случае, газ носителей заряда достигает равновесия по энергиям за время порядка  $\tau_{ec}$ , т. е. задолго до того, как станет заметным обмен энергией между электронами и решеткой. Это означает, что в данных условиях представление об электронной температуре по-прежнему имеет однозначный смысл: по отношению к энергии газ носителей заряда можно

рассматривать как почти независимую термодинамическую подсистему. Симметричная часть функции распределения (в системе отсчета, в которой электронный газ как целое покоится) здесь имеет прежний вид (4.6). Однако выражение (4.7) для антисимметричной части в условиях (4.2) оказывается уже несправедливым, сколь бы малой ни была дрейфовая скорость. Действительно, по отношению к импульсу газ носителей заряда в условиях (4.2) отнюдь не образует независимой подсистемы. Рассеяние импульса здесь происходит в основном на несовершенствах решетки, в результате чего сам вид антисимметричной функции распределения оказывается зависящим от механизма рассеяния. Эту функцию здесь следует определять с помощью уравнения\* (2.7). При этом интеграл столкновений  $J_a[f]$ , определяющий скорость рассеяния импульса, можно вычислять, пренебрегая межэлектронными столкновениями; рассеяние на несовершенствах решетки здесь, как и в слабом поле, часто можно считать абсолютно упругим\*). В частности, при рассмотрении стационарного состояния системы с изотропным законом дисперсии остается в силе выражение (XIII.6.11), в котором надо лишь заменить  $J$  на  $J_a$ , а  $f_1$  — на  $f_a$ :

$$J_a[f] = -\frac{f_a}{\tau(E)}. \quad (4.10)$$

Согласно (4.10) и (2.7) антисимметричная часть функции распределения в постоянном электрическом поле имеет вид

$$f_a(\mathbf{p}, \mathfrak{E}) = -\tau(E) \{(\mathbf{v}, \nabla f_s) - e(\mathfrak{E}, \nabla_p f_s)\}. \quad (4.11)$$

Поскольку функция  $f_s$  уже известна, выражение (4.11) позволяет вычислить плотность тока по формуле (XIII.2.2). В пространственно однородной системе, когда первое слагаемое в (4.11) отсутствует, мы получаем

$$\mathbf{j} = en\mu(T_e, T)\mathfrak{E}. \quad (4.12)$$

Условие баланса энергии дает теперь уравнение для определения электронной температуры:

$$en\mu(T_e, T)\mathfrak{E}^2 = \frac{k(T_e - T)}{\tau_e(T_e, T)}. \quad (4.13)$$

Приближение, выражаемое формулами (4.6) и (4.11), иногда называют квазигидродинамическим.

При наличии нескольких типов носителей заряда (электронов и дырок, «легких» и «тяжелых» дырок и т. д.) времена релаксации энергии и импульса вводятся для каждого типа в отдельности. Следует различать также времена между столкновениями носителей одного и того же и разных типов. При этом, в зависимости от соот-

\*) Исключение, как и в слабом поле, может составить случай рассеяния на оптических фонах (см. гл. XIV и § XVI.5).

ношения между их эффективными массами, столкновения между различными носителями заряда могут как сопровождаться, так и не сопровождаться заметным обменом энергией. Так, при резком различии эффективных масс этот тип рассеяния, по сути дела, не отличается от рассеяния на заряженной примеси. Неравенства типа (4.1) — (4.3) теперь надо писать для разных типов носителей заряда по отдельности, и число различных предельных случаев заметно возрастает. Отметим два из них.

а) Пусть эффективные массы носителей разного типа — одного порядка величины. Тогда взаимное рассеяние разных носителей связано с интенсивным обменом энергией и при достаточно малых временах между соответствующими столкновениями имеет однозначный смысл представление о единой температуре носителей заряда, отличной, вообще говоря, от температуры решетки.

б) Пусть эффективные массы носителей заряда разного типа резко различны, но времена между столкновениями носителей одного и того же типа достаточно малы. Тогда имеет однозначный смысл представление о температурах носителей разного типа (например, электронов и дырок), не совпадающих, вообще говоря, как друг с другом, так и с температурой решетки.

Рассмотрим условия, при которых выполняются соотношения (4.1) и (4.2). Прежде всего заметим, что неравенства (4.2) могут иметь место только при условии  $\tau_p \ll \tau_e$ , т. е. в случае слабо неупругого рассеяния. Как мы знаем, так обстоит дело, если рассеяние квазиимпульса происходит в основном на атомах примеси (при любом механизме рассеяния энергии) или если рассеяние и энергии, и квазиимпульса обусловлено взаимодействием носителей заряда с акустическими (в том числе и пьезоэлектрическими) колебаниями решетки. Рассеяние на оптических колебаниях оказывается слабо неупругим, лишь если средняя энергия носителя заряда значительно превышает энергию оптического фона:

$$kT_e \gg \hbar\omega_0.$$

В указанных условиях (4.1) и (4.2) удовлетворяются, если время  $\tau_{ee}$  достаточно мало. Чтобы вычислить его (при параболическом законе дисперсии), надо решить задачу о движении двух заряженных частиц с массами  $m_1$  и  $m_2$ . Потенциальная энергия их есть

$$U = \frac{e_1 e_2}{\epsilon r} \exp(-r/r_0). \quad (4.14)$$

Здесь  $r$  — расстояние между частицами,  $e_1$  и  $e_2$  — их заряды,  $r_0$  — радиус экранирования.

Как известно из механики, такая задача распадается на две: о свободном движении центра инерции всей системы и о движении одной «частицы» с приведенной массой  $m_r = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  и радиус-

вектором  $\mathbf{r}$  в поле  $U(\mathbf{r})$ . Выражение (4.14) формально не отличается от энергии взаимодействия носителя заряда с ионом примеси. По этой причине мы можем непосредственно воспользоваться результатами § XIV.5, заменяя в них  $m$  на  $m_r$  и  $T$  на  $T_e$ . Согласно (XIV.5.19') для невырожденного газа мы имеем по порядку величины

$$\tau_{ee} \sim \frac{\varepsilon^2 m_r^{3/2}}{ne^4} (kT_e)^{3/2} \ln^{-1} \left( \frac{m_r kT_e}{\hbar^2} r_0^2 \right). \quad (4.15)$$

Мы заменили здесь энергию  $E$  на  $3/2 kT_e$  и опустили несущественные численные множители.

Как и следовало ожидать, в невырожденном газе время  $\tau_{ee}$  обратно пропорционально концентрации носителей заряда  $n$  (с точностью до медленно меняющегося логарифмического множителя). Это означает, что неравенства (4.1) и (4.2) выполняются лишь при достаточно больших концентрациях, превышающих некоторые критические значения. Для оценки их надо вычислить отношения  $\tau_e/\tau_{ee}$  и  $\tau_p/\tau_{ee}$ . Приравнявая их единице, получим порядковую оценку критических концентраций  $n_e$  и  $n_p$ , выше которых рассеяние, соответственно, энергии и квазиимпульса за счет межэлектронных столкновений оказывается доминирующим. При этом вместо того, чтобы вычислять  $\tau_e$  и  $\tau_p$  с помощью формул (2.5), (2.7), удобно выразить эти времена через длину свободного пробега по импульсу  $l_p$ , определяемую равенством \*)

$$l_p = v_{T_e} \tau_p, \quad (4.16)$$

где  $v_{T_e}$  — средняя скорость носителей заряда с температурой  $T_e$ . При этом

$$v_d = \frac{e\mathcal{E}l_p}{mv_{T_e}}$$

и, согласно (4.13),

$$\tau_e = \frac{k(T_e - T)}{e^2 \mathcal{E}^2 l_p} m v_{T_e}. \quad (4.17)$$

По порядку величины  $T_e - T \sim T_e$ , и мы получаем

$$\tau_e \simeq \frac{(kT_e)^{3/2} m^{1/2}}{(e\mathcal{E})^2 l_p}. \quad (4.17')$$

Согласно (4.15) и (4.17') для критической концентрации  $n_e$  находим

$$n_e \simeq \frac{\varepsilon^2 \mathcal{E}^2 l_p}{e^2 \ln \left( \frac{8m_r T_e}{\hbar^2} r_0^2 \right)}. \quad (4.18)$$

\*) Определение (4.16) отличается от используемого в случае слабого поля заменой  $T$  на  $T_e$  в формуле для средней скорости.

Далее, на основании формул (4.16) и (4.15)

$$n_p \simeq \frac{(\varepsilon k T_e)^2}{e^4 l_p \ln \left( \frac{8 m_r k T_e}{\hbar^2 r_0^2} \right)}. \quad (4.19)$$

Составляя отношение правых частей (4.18) и (4.19) и пользуясь оценкой (4.17'), мы получаем.

$$\frac{n_e}{n_p} \simeq \left( \frac{e g l_p}{k T_e} \right)^2 \simeq \frac{\tau_p}{\tau_e}. \quad (4.20)$$

Коль скоро рассеяние носит почти упругий характер, правая часть (4.20) значительно меньше единицы.

Таким образом, условия применимости гидродинамического приближения оказываются заметно более жесткими, чем квазигидродинамического. Кроме того, значения  $n$  и  $l_p$  не всегда независимы: действительно, если свободные носители заряда поставляются примесью, то концентрация их не превышает концентрации заряженной примеси. Это означает, что  $\tau_{ee} \simeq \tau_p$ , и, следовательно, формула (4.7) для антисимметричной части функции распределения не дает хорошего приближения. С другой стороны, гидродинамическое приближение может оказаться оправданным в условиях сильной инжекции или в применении к очень узкозонным материалам, когда достаточно велика собственная концентрация носителей заряда.

Квазигидродинамическим приближением иногда пользуются и в условиях, когда оно, строго говоря, неприменимо — концентрация носителей заряда невелика по сравнению с  $n_e$ . Такой подход имеет смысл, если мы интересуемся лишь оценкой физических величин, получающихся путем усреднения сравнительно плавных функций энергии. Действительно, рассмотрим среднее значение некоторой величины  $A(E)$  и будем для простоты считать закон дисперсии изотропным. По определению

$$\langle A \rangle = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3 n} \int f_s(E) A(E) dp = \frac{2}{\pi^2 \hbar^3 n} \int_0^\infty p^2(E) A(E) f_s(E) \frac{dp}{dE} dE. \quad (4.21)$$

Допустим, что функция  $A(E)$  не имеет нулей и изменяется значительно медленнее, нежели  $f_s(E)$ . Тогда с хорошей точностью можно вынести  $A(E)$  за знак интеграла при том значении  $E = E_m$ , которое отвечает максимуму остальных сомножителей в подынтегральном выражении (очевидно,  $E_m$  порядка  $kT_e$ ). Остающийся интеграл дает — независимо от вида  $f_s(E)$  — концентрацию частиц  $n$ , и мы получаем

$$\langle A \rangle \simeq A(E) |_{E=E_m}. \quad (4.22)$$

Неточность связана здесь лишь с отождествлением  $E_m = kT_e$ . Этот прием иногда называют *методом электронной температуры*.

С другой стороны, если функция  $A(E)$  достаточно сильно зависит от  $E$ , заметно изменяясь на интервале энергии порядка  $kT_e$ , то указанный выше прием может стать непригодным. Действительно, главный вклад в интеграл (4.21) здесь дает лишь сравнительно небольшая область энергий, отвечающая максимуму всего подынтегрального выражения. При этом существенным оказывается явный вид функции распределения  $f_s(E)$ . Если последняя заметно отличается от (4.6), то метод электронной температуры может оказаться неприменимым.

### § 5. Роль неупругости рассеяния

В условиях, определяемых неравенствами (4.3), носители заряда нельзя рассматривать как независимую подсистему: доминирующую роль играет рассеяние их на несовершенствах решетки. Вид неравновесной функции распределения  $f(\mathbf{p})$  здесь заранее не известен: он устанавливается в результате совместного действия внешнего поля и тех же процессов рассеяния, которые определяют и средние значения энергии и импульса носителей заряда. Эти процессы описываются уравнениями (2.6) и (2.7), которые и надо решить для определения функций  $f_s(\mathbf{p})$  и  $f_a(\mathbf{p})$ . При этом результат оказывается не универсальным: вид функции распределения зависит от природы образца и условий опыта. Существенную роль здесь играет степень неупругости рассеяния, определяемая равенством

$$\eta = \frac{\tau_p}{\tau_e}. \quad (5.1)$$

Действительно, рассмотрим уравнения баланса (3.1) и (3.2). Умножая равенство (3.2) скалярно на  $\mathbf{v}_d$ , получим

$$e(\mathbf{v}_d, \mathbf{S}) = \frac{m_\sigma v_d^3}{\tau_p}.$$

Сравнивая это соотношение с уравнением (3.1) и принимая во внимание (1.3'), находим

$$kT_e + \frac{2}{3}E_d - kT = \frac{m_\sigma v_d^3}{\eta}. \quad (5.2)$$

По определению при слабо неупругом рассеянии  $\eta \ll 1$ , а при сильно неупругом  $\eta \simeq 1$ . Рассмотрим эти два случая по отдельности.

При  $\eta \ll 1$  из соотношения (5.2) вытекает неравенство

$$m_\sigma v_d^3 \ll k(T_e - T) + \frac{2}{3}E_d. \quad (5.3)$$

Поскольку энергия дрейфа  $E_d$  обращается в нуль вместе с  $\mathbf{v}_d$  (например, при квадратичном законе дисперсии  $E_d = \frac{1}{2}m v_d^2$ ), неравенство (5.3) можно переписать в виде

$$m_\sigma v_d^3 \ll kT_e. \quad (5.3')$$